Instituto Federal de Brasília
Campus Estrutural
Licenciatura em Matemática

LUCAS DUTRA SOUZA

DISTRIBUIÇÕES EXTREMAIS MAXIMAIS:
UMA PROPOSTA DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Brasília
2022

LUCAS DUTRA SOUZA

DISTRIBUIÇÕES EXTREMAIS MAXIMAIS: UMA PROPOSTA DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso do curso de Licenciatura em Matemática para obtenção de nota parcial.

Orientador(a): Dr. Wembesom Mendes Soares

Brasília
2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

FICHA DE APROVAÇÃO EM BANCA EXAMINADORA

Trabalho de Conclusão de Curso

Discente: Lucas Dutra Souza
Título: Distribuições Extremais Maximais: Uma proposta de Transposição Didática para o Ensino Médio

Trabalho aprovado em: 07/ 02/ 2022 .

Brasília - DF, 07 de Fevereiro de 2022.

Banca Examinadora

Orientador (Presidente): Dr. Wembesom Mendes Soares
Examinadora (membra): Ma. Adriana Barbosa de Souza
Examinador (membro): Dr. Vinícius Facó Ventura Vieira

RESUMO

A teoria probabilística de valores extremos é uma mistura curiosa e fascinante de uma enorme variedade de aplicações envolvendo fenômenos, como precipitação de chuvas, inundações, rajadas de vento, poluição do ar, etc. No contexto de ensino e aprendizagem, tal teoria permite o desenvolvimento de noções elementares: construir tabelas simples e gráficos de barras; discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa, analisar padrões observados e esperados. Uma vez que essas noções fazem parte da Educação Básica, há a possibilidade de um estudo inicial de seus conceitos através de alguns exemplos e aplicações para o Ensino Médio. Apoiamo-nos em *Design-based research*(DBR) ou Pesquisa de Desenvolvimento proposta por Ann L. Brown,que possibilita a reflexão sobre o saber científico reelaborado para ser utilizado em situações de ensino. Deste modo, com o objetivo de apresentar interessantes aplicações da Probabilidade/Estatística e motivar os estudantes na sua aprendizagem, este trabalho traz uma proposta de sequência didática, isto é, um conjunto de atividades planejadas, visando auxiliar o ensino dos conceitos de Probabilidade/Estatística, na educação básica, normatizados pela Base Nacional Comum Curricular.

Palavras-chave: Transposição Didática; Distribuições Maximais; Pesquisa de Desenvolvimento.

ABSTRACT

The probabilistic theory of extreme values is a curious and fascinating mixture of a huge variety of applications involving phenomena such as rainfall, flooding, gusts of wind, air pollution, etc. In the context of teaching and learning, such theory allows the development of elementary notions: building simple tables and bar graphs; discuss the differences between deterministic and random experiments; estimate probabilities through relative frequency, analyze observed and expected patterns. Since these notions are part of Basic Education, there is the possibility of an initial study of their concepts through some examples and applications for High School. We rely on Design-based research (DBR) or Development Research proposed by Ann L. Brown, which enables reflection on re-elaborated scientific knowledge to be used in teaching situations. Thus, with the objective of presenting interesting applications of Probability/Statistics and motivating students in their learning, this work presents a proposal for a didactic sequence, that is, a set of planned activities, aiming to help the teaching of Probability/Statistics concepts. , in basic education, regulated by the National Curricular Common Base.

Keywords: Didactic Transposition; Maximum Extreme Value distribution; Design-based research.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Probabilidade está entre os corpos de conhecimento mais usados na vida diária. Embora ela tenha grande importância na tomada de decisões, entender a teoria de probabilidade não é tão fácil para todos. Essa diferença também é válida durante o período de graduação onde os alunos desenvolvem entendimentos diferentes de probabilidade. Essa situação traz consigo alguns problemas no processo de aprendizagem da disciplina de probabilidade. Embora a probabilidade tenha um lugar importante em várias ciências, os estudos também revelaram que a maioria dos professores de matemática não tem conhecimento e habilidades suficientes no ensino de probabilidade, como podemos ver em Tamosaitiene et al (2021). Algumas das várias razões para a dificuldade no ensino de probabilidade são tratadas em Koparan (2015). Entre os motivos para o não entendimento da probabilidade, estão o fato de que as perguntas não são entendidas pelos alunos, de que há uma tentativa de memorização de fórmulas em detrimento da compreensão e de que os alunos têm uma atitude negativa em relação à probabilidade.

Faz sentido, portanto, buscar experiências pedagógicas que visem o desenvolvimento de habilidades probabilísticas, ou a simples curiosidade dos estudantes para a área, através de situações motivadoras ligadas ao mundo concreto. Este trabalho propõe uma intervenção voltada para esse interesse, a partir da concepção do autor, engendrada em experiências de pesquisa recente, de que temas relevantes da Matemática avançada podem ser usados em modelagens como bom indutor de interesse nos estudantes, em geral. Um tema particularmente relevante para modelagem matemática nos tempos recentes é a Teoria dos Valores Extremos.

Problemas e investigações acerca do valor máximo ou mínimo de dados são uma recorrência em Estatística e Probabilidade. Sempre que buscamos compreender o comportamento do nível máximo de uma represa, do tempo máximo de duração dos componentes num sistema em paralelo ou número máximo de sinistros para uma seguradora, estamos lidando com essa questão. O campo de estudo no qual desenvolve-se essa vertente é A Teoria de Valores Extremos (TVE) ou Teoria Extremal. A TVE manteve um ritmo forte de desenvolvimento neste século, apesar de remontar aos séculos anteriores, tanto do ponto de vista metodológico quanto do ponto de vista aplicado. A relevância do tema pode ser facilmente constatada, por exemplo, pela quantidade de trabalhos recentes publicados já em 2021. Só para citar alguns exemplos: Tamosaitiene et al (2021) versa sobre aplicações na Engenharia; Meng et al (2021) traz aplicações em Geologia; Taloni e Zapperi (2021) faz aplicação em Meio Ambiente; Spearing et al (2021) modela a teoria em Esportes; Wang et al (2021) traz a abordagem para o mundo das finanças e Bonate (2021) aplica a temática no mundo farmacêutico. Por esse ponto de vista aplicado e teórico seria interessante proporcionar seu estudo a estudante do ensino médio.

Os alunos têm dificuldade em compreender as questões abstratas de probabilidade no processo de ensino e aprendizagem. Em geral, o principal problema é que os conceitos são abstratos e são ministrados com métodos clássicos e tradicionais. Esses conceitos precisam ser incorporados de forma orgânica (ou com naturalidade) para afetar positivamente o interesse e a atitude dos alunos em relação ao curso. Os professores precisam ir além do cálculo no ensino de probabilidade e fazer atividades que ajudem os alunos a compreender as probabilidades abstratas com a ajuda de situações da vida real. No contexto da pesquisa correlata, segundo Lopes (2008), as sugestões feitas no sentido de melhora do processo de ensino e aprendizagem da probabilidade são para aumentar a consciência dos alunos em aplicações de probabilidade e usar a tecnologia para aprofundar os conceitos em conjunto com a análise de dados (LOPES, 2008). Os métodos de ensino tradicionais vêm sendo substituídos por métodos de ensino contemporâneos nos quais os alunos podem ser mais ativos.

A transposição didática surge nesse cenário, pois permite que o saber científico seja transposto e levado aos estudantes, saber ensinado. Esse Saber Ensinado é contextualizado de modo que permita o estudante compreender a sociedade e o mundo no qual vive. Fazendo reflexões e percebendo de forma própria a descoberta e produção e conhecimento. Deve ser feito de forma interdisciplinar para que entenda a Probabilidade como parte do conhecimento cientifico.

Neste trabalho propomos uma sequência didática usando a Teoria de valores extremos como motivação ao ensino de probabilidade/estatística.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Trataremos, a seguir, dos referenciais teóricos que embasam a presente atividade experimental: As Distribuições Maximais e uma parte que justifica o uso dessa teoria na sala de aula transposição didática, BNCC e Pesquisa de Desenvolvimento. A transposição didática faz a ponte entre a matemática dita mais avançada a da sala de aula. A Pesquisa de Desenvolvimento nos ajuda a procurar por inovação na Educação. Por fim a BNCC pode por tal inovação.

2.1 Distribuições Maximais

A teoria probabilística de valores extremos, em primeiro lugar, trata do comportamento estocástico do máximo e do mínimo de variáveis aleatórias independentes e indeticamente distribuídas (i.i.d.). As propriedades de distribuição dos extremos (máximo e mínimo), estatísticas de ordem extrema e intermediária e excedências sobre (abaixo) limites altos (baixos) são determinadas pelas caudas superior e inferior da distribuição subjacente.

Historicamente, o trabalho em problemas de valores extremos pode ser rastreado até 1709, quando Nicolas Bernouilli discutiu a maior distância média da origem dados n pontos aleatoriamente em uma linha reta de comprimento fixo t (TAMOŠAITIENĖ; YOUSEFI; TABASI, 2021).

A teoria do valor extremo originou-se principalmente das necessidades dos astrônomos em utilizar ou rejeitar observações periféricas. Os primeiros trabalhos de Fuller (1914) e Griffith (1920) sobre o assunto eram especializados tanto em campos de aplicação quanto em métodos de análise matemática. Gumbel foi o primeiro a chamar a atenção de engenheiros e estatísticos para possíveis aplicações da teoria formal dos “valores extremos” a certas distribuições que anteriormente haviam sido tratadas empiricamente. O primeiro tipo de problema tratado dessa maneira nos EUA teve a ver com fenômenos meteorológicos - fluxos anuais de inundação, máximas de precipitação, etc. Isso ocorreu em 1941.

Nesta seção, apresentaremos brevemente os principais aspectos da Teoria Extremal Clássica, na linha narrativa de (GNEDENKO, 1943). A parte de Teoria de Probabilidade (MAGALHÃES,2006).

A roupagem técnica para uma amostra aleatória de distribuição inicialmente desconhecida é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid). Assim, considere $\{X_n\}_{n>1}$ uma sequencia de variáveis aleat´orias iid. ´E imediato perceber que o m´máximo dessas variáveis, $M_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$, também É uma variável aleatória, cuja função de distribuição acumulada ´e dada por

$$P(M_n \leq x) = F^n(x).$$

Na tentativa de compreender o comportamento a longo prazo de M_n, esperamos poder fazer essa análise sem a dependência da distribuição desconhecida F. Note que

$$F^n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{se, } F(x) < 1 \\ 1 & \text{se , } F(x) = 1 \end{cases}.$$

Portanto, a distribuição limite da estatística do máximo é degenerada, razão pela qual não conseguimos responder satisfatoriamente perguntas sobre a estrutura e tendência dela.

Já que distribuição limite de M_n é degenerada, temos que recorrer a uma estabilização para se obter uma lei limite não-degenerada. De fato, essa estratégia tem o condão de já ter sido bem sucedida no caso da estatística da média de variáveis aleatórias iid, $\bar{X}_n$, no resultado conhecido como Teorema do Limite Central (TLC). No caso da média amostral, a Lei dos Grandes Números atesta que tal estatística converge para a média populacional, isto é, $\bar{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\longrightarrow}} \mu$, e o TLC mostra que uma estabilização conveniente contorna esse problema do comportamento assintótico da média amostral através da distribuição Gaussiana, ou seja

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu_n)}{\sigma_n} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} N(0,1).$$

Os específicos modos de convergência e os enunciados do TLC e da LGN estão dispostos abaixo.

Definição 1 *(Convergência em distribuição)*: Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias com funções de distribuição $F, F_1, F_2 \ldots$ respectivamente. Diz-se que a sequência X_n converge em distribuição para X, quando $n \to \infty$, se

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

para todo x, ponto de continuidade de $F(x)$,. A notação comum para o fenômeno é $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

Teorema 1 *(LFGN e TLC)*: Sob condições de regularidade e sendo $X, X_1 \ldots, X_n$ i.i.d. a X com

$$\bar{X}_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n},$$

se existir $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}\,(\bar{X}_n) = \mathrm{Var}\,(X)/n = \sigma^2/n$, e consequentemente, $\mu_n = E(X_n) = E(X) = \mu$, tem-se, quando $n \to \infty$,

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \mu$$

$$(\bar{X}_n - \mu_n)\sigma_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1)$$

Retomando a estatística do máximo, a pergunta-chave é, então: Existem sequências $a_n > 0$ e b_n para as quais obtemos uma distribuição limite não degenerada para $\frac{M_n - b_n}{a_n}$?

Ao contrário do TLC, a existência das sequências acima implica, segundo Fisher e Tippett (1928), em 3 comportamentos possíveis, isto é, três distribuições não degeneradas: Gumbel, Fréchet e Weibull. A investigação desse problema remonta ao século 18, conforme Kotz e Nadarajah (2011). A contribuição matemática mais robusta nessa temática foi dada por Gnedenko (1943).

Para $X_1, X_2 \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d com distribuição F e $w(F) = sup\{x: F(x) < 1\}$, temos que a variável $M_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$, de distribuição $P(M_n \le x) = P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) = F^n(x)$, converge quase certamente para $w(F)$, que pode ser finito ou infinito. Buscamos normalizar (ou estabilizar) M_n para conseguirmos uma distribuição limite não degenerada, isto é, obtermos, para uma distribuição não degenerada $G(x)$:

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) = F^n(a_n x + b_n) \to G(x)$$

quando $n \to \infty$. Se isso é válido para escolhas convenientes de a_{n} e b_{n}, então dizemos que G é o limite assintótico e F está no domínio de atração de G, $F \in D(G)$. Diremos mais a frente que os dois valores extremos G e G^* serão do mesmo tipo se $G^*(x) = G(ax + b)$ para algum $a > 0$, b e todo x. O Teorema dos Tipos Extremais

(GNEDENKO, 1943) caracteriza o limite de G como mesmo tipo de uma das três classes:

$$1\colon \Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, x \in \mathbb{R}$$
$$2\colon \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se}\ , x < 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{se}\ , x \geq 0 \end{cases}$$
$$3\colon \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & se, x < 0 \\ 1 & se, x \geq 0 \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$. Assim, qualquer distribuição de valor extremo pode ser classificada como um dos tipos 1,2 e 3, conhecidas como tipo Gumbel, Fréchet e Weibull, respectivamente.

Na atividade proposta , nos concentramos principalmente na modelagem de extremos usando a distribuição Gumbel. Para facilitar as contas usamos A distribuição de valor extremo generalizado (GEV) unifica as três distribuições de valores extremos, com o valor do parâmetro de forma nesta distribuição controlamos a cauda da distribuição reduzindo do GEV para os modelos Gumbel / Fréchet / Weibull quando é zero / positivo / negativo (COLES, 2001). O modelo de Gumbel, conforme usado nesta atividade, tem função de sobrevivência:

$$P(X > x) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

onde X é um característico numérico, como o nível do mar, por exemplo, x representa um valor de interesse, μ e σ são os parâmetros de locação e escala, respectivamente. É prática comum estimar esses parâmetros via máxima verossimilhança. Nesta atividade, nenhuma descrição de probabilidade máxima é fornecida, e as estimativas são simplesmente fornecidas $\mu = 8{,}636$ e $\sigma = 1{,}275$.

2.2 Sobre transposição didática

Os conceitos da Teoria de Valores extremos são extremamente abstratos e carregados de formalismo matemático que foge ao domínio de um aluno de ensino médio. A atividade proposta utilizou de conceitos da transposição didática de Yves Chevallard (1991). Ela trata de modificações sofridas por um saber para sua inserção na sala de aula. Um conceito transposto passa por modificações, mas mantém semelhanças com a ideia original, mas adquire significados próprios da sala de aula. Estes saberes não são meras simplificações dos saberes iniciais, mas novos capazes de responder ao problema proposto.

Os saberes são classificados em três níveis básicos(GONÇALVES; BITTAR, 2018). O Saber Sábio é concebido por pesquisadores e cientistas e publicados em periódicos. O Saber a Ensinar é resultado da transposição de um conceito do Saber Sábio para o ambiente escolar em algum nível de ensino adquirindo caráter didático. O último, Saber Ensinado, possui didática própria maneira como o Saber Sábio se apresenta aos estudantes na sala de aula.

Então na transposição didática o que está sendo ensinado na escola é algo gerado fora da escola que é deslocado, “transposto” para a escola (GUERRA, 2021). Existe um distinção entre o conhecimento matemático ‘original’ como é produzido por matemáticos (ou outros) e conhecimento “a ser ensinado” como é concebido pelos currículos. O conhecimento matemático é mais frequentemente produzido fora das instituições de ensino e necessita de uma série de adaptações antes sendo aceito para ensinar.

Chevallard(1991) afirma que muitas vezes há uma imensa diferença entre esses objetos de conhecimento , e define a didática transposição como o trabalho feito durante a transformação do conhecimento através do conhecimento a ser ensinado e o conhecimento real ensinado a conhecimento aprendido.

O processo de transposição didática tem seu início distante escola (ALMEIDA; LORENCINI JÚNIOR, 2020). Segue-se então um processo de reconstrução de diferentes elementos do conhecimento com o objetivo de torná-los ensináveis. O primeiro passo nesta sequência de transformações do conhecimento está ocorrendo na noosfera, um conjunto não estruturado de especialistas. Analisando o “conhecimento a ser ensinado” através dos elementos da noosfera revela as condições e restrições sob as quais o “conhecimento a ser ensinado” é constituído.

O que realmente existe numa ‘transposição’ é evidenciado pelos objetos, a reconstrução dos objetos ou disfunções e seus produtos (ou seja, o resultado da transposição didática), existente na didática da escolar. A análise do didático visa tornar visível a diferença entre o objeto transposto (ensinado) e objeto acadêmico, uma diferença não percebida espontaneamente pelo professor(OLIVEIRA, Rannyelly Rodrigues de; ALVES; SILVA, 2017). Além disso, embora regido por normas e valores atrelados a instituição de ensino, o professor nem sempre assume a responsabilidade das consequências epistemológicas dessa diferença. Isso está relacionado a ilusão de transparência, ou seja, um sentimento de que o conhecimento ensinado não deve ser questionado, o que pode levar a uma “ruptura epistemológica” dos objetos de conhecimento.

Alguns objetos do conhecimento matemático acadêmico são definidos como objetos diretos construídos no sistema didático (por definição ou construção), noções matemáticas, como, por exemplo, adição (MANGUEIRA *et al.*, 2021). No entanto, existem outros objetos de conhecimento, denominados paramatemáticos. noções, úteis em atividades matemáticas, mas muitas vezes não configuradas como objetos em si, mas pré-construídos, como, equação. Em um nível didático mais profundo, também temos o proto-matemático, noções usadas em atividades da matemática escolar, como o uso de padrões geométricos. Por essa distinção, alguns objetos tornam-se objetos para o ensino, enquanto outros servem como objetos auxiliares, e apenas os primeiros são avaliado diretamente.

O nível de “ensinabilidade” de um corpo de conhecimento é então visto como dependente de três fatores, relacionados à organização social e valores culturais: relevância epistemológica, relevância cultural e grau de exposição a sociedade (NASCIMENTO; ARAÚJO, 2019). Embora reivindicado pela noosfera como tendo forte relevância cultural, por expressões como a sociedade “precisa” de forte conhecimento matemático em seus cidadãos, a matemática carece disso e se baseia em sua relevância epistemológica. A exposição pública (abertura) possibilita um controle social dos aprendizes desenvolvendo sistemas para testes. A transposição didática implica uma textualização do conhecimento, bem como uma despersonalização, produzindo assim uma objetivação possível de ser tornada pública e constituir uma base para ao controle. O texto do conhecimento produzido serve, assim, como norma para o conhecimento e para o que significa conhecer, bem como para a progressão do conhecimento autorizando escolhas didáticas.

O sucesso da transposição depende de vários fatores. O conceito tem de ser relevante para a comunidade científica e a sociedade. Deve gerar exercícios e outras formas de avaliação criando identidade própria. A TVE preenche esses requisitos. Sua relevância perante a sociedade e a comunidade é indiscutível. Mas, ainda não está inserida no contexto escolar. Esta sequência ou atividade adapta os conceitos da TVE para alunos do ensino médio seguindo a linha de raciocínio de (OLIVEIRA, Márcia

Donizete Leite, 2014). A intenção é transpor didaticamente os conceitos e torna-los acessíveis.

2.3 Sobre a BNCC

O uso da teoria dos valores extremos com o uso para resolução de problemas tem potencial para ser uma forma de organização do pensamento científico e também uma forma de resolução de situações-problema. Essa ideia encontra eco na BNCC, visto que " Processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) (BNCC, 2018). Neste documento existem dez competências gerais, sendo a competência definida como mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Em sua segunda competência lembra que o aluno deve exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação. A sétima leva em conta a necessidade de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular, negociar e defender ideias.

No ensino médio, A BNCC, estabelece que os objetos de conhecimento sejam ensinados de forma aprofundada por meio de Itinerários Formativos. Estes possibilitam a mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo itinerários integrados (BRASIL, 2018, p. 477).

Os objetos de conhecimento do itinerário formativo para matemática e suas tecnologias são:

> II – matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;(BRASIL, 2018, p. 477).

O letramento científico é valorizado na BNCC em todas as suas vertentes (estatístico, cartográfico, financeiro, digital, ...), tendo sempre em vista questões atuais para a sociedade. Assim, a transposição aqui apresentada pode ser estendida para alunos do ensino médio interessados no itinerário formativo como preparação na área de ciências exatas. A BNCC estimula o uso de atividades para a construção de pensamento voltado para o mundo real. Que faz uso de modelos matemáticos para representação e análise de relações quantitativas de grandezas (BRASIL, 2018, p. 270). A competência número três estabelece aos professores e estudantes a utilização de estratégias e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em contextos diversos, analisando resultados para construir argumentação.

2.4 Sobre inovar a Educação

A *Design-based research* (DBR) ou Pesquisa de Desenvolvimento é uma família de abordagens metodológicas para o estudo no contexto da aprendizagem (BROWN, 1992). Ele usa pesquisa e análise sistemática de estratégias e ferramentas instrucionais, tentando garantir que o ensino e a pesquisa sejam interdependentes. Supõe-se que a pesquisa educacional separada da prática não pode levar em consideração a influência do contexto na natureza complexa dos resultados, ou não pode identificar adequadamente suas restrições e fatores condicionantes: “Argumentamos que a Pesquisa de Desenvolvimento pode ajudar a criar e estender o conhecimento sobre o desenvolvimento, execução e sustentação de ambientes de aprendizagem inovadores” (BROWN, 1992). Este autor utilizou o termo Pesquisa de Desenvolvimento para diferenciar sua abordagem do design experimental clássico no ensino, atribuindo cinco características a este método:

- Os objetivos centrais de projetar ambientes de aprendizagem e desenvolver teorias ou “prototeorias” de aprendizagem estão interligados.
- O desenvolvimento e a pesquisa ocorrem por meio de ciclos contínuos de design, promulgação, análise e redesenho.
- A pesquisa deve levar a teorias compartilháveis que ajudem a comunicar implicações relevantes para outros educadores.
- A pesquisa deve levar em conta ambientes autênticos. Ele não deve apenas documentar o sucesso ou o fracasso, mas também enfocar nas interações que refinam nossa compreensão das questões de aprendizagem envolvidas.

- O desenvolvimento de tais relatos depende de métodos que podem documentar e conectar processos de promulgação a resultados de interesse. (BROWN, 1992).

Como paradigma metodológico, DBR, especifica como conduzir estudos de pesquisa, ou seja, investigações de alguma extensão em intervenções educacionais induzidas geralmente por um conjunto projetado de atividades curriculares inovadoras e / ou de tecnologia instrucional. Frequentemente, o que é projetado é todo um 'ambiente de aprendizagem' com atividades, materiais, ferramentas, sistemas de notação e outros elementos, incluindo meios de sequenciamento e base (KENNEDY-CLARK; GALSTAUN; REIMANN, 2021). Normalmente não há separação estrita entre desenvolvimento e teste de teoria, mas ambos estão interconectados de uma forma que lembra a "teoria fundamentada". No entanto, em DBR não há interesse particular em evitar o uso de teorias anteriores; pelo contrário, incentiva a construção de teorias que incorporam elementos além das observações. Experimentos de pesquisa são conduzidos para desenvolver teorias, não apenas para ajustar empiricamente 'o que funciona' (PREDIGER; GRAVEMEIJER; CONFREY, 2015) destacam o papel da teoria no que eles chamam de “inovação ontológica” a invenção de novas categorias científicas, especificamente categorias que fazem um trabalho útil em geração, seleção e avaliação.

3 METODOLOGIA

Uma pesquisa pode ser: descritiva, de associação com/sem interferência entre variáveis, em relação ao seu tipo lógico (VOLPATO, 2015). Quanto a isso temos um trabalho de caráter descritivo. Este tipo de pesquisa busca descrever, caracterizar dizer como determinado objeto de estudo é (VOLPATO, 2015). Aqui o objeto é uma transposição didática. O delineamento da Transposição Didática se deu pela Pesquisa de Desenvolvimento com organização por Sequência de Ensino. Geralmente, uma Pesquisa de Desenvolvimento, são investigações que incluem delineamento, como a elaboração do artefato em sua primeira versão, com refinamento desse artefato em processo continua.

Após expor a abordagem metodológica segue o detalhamento das etapas da pesquisa. Na Figura abaixo, temos um resumo do caminho metodológico seguindo a Pesquisa de Desenvolvimento (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015).

Fase da Pesquisa	Tópicos	Passos Metodológicos
Fase 1: Análise do problema.	Definição do problema	Discussão entre orientando e orientador
	Consulta	Apresentação e aprovação para o orientador
	Questões de pesquisa	Aspectos a respeito do ensino de probabilidade/estatística
	Revisão de literatura	Definição da abordagem da TD para o produto educacional e revisão de literatura.
Fase 2: Desenvolvimento da proposta.	Construção Teórica.	Estudo de textos científicos sobre a abordagem
	Desenvolvimento do projeto de princípio para a orientação do plano.	Desenvolvimento da TD
	Descrição da proposta de intervenção.	Conclusão da proposta didática, sem implementação com os alunos.

A proposta de problematização emergiu durante o PIBIC do pesquisador que, em discussões com o orientador, percebeu a grande variedade de aplicações das Distribuições Maximais. Isso dialoga diretamente com a BNCC, que propõe um estudo mais contextualizado da probabilidade/estatística.

Para articular essa questão foi proposta uma TD das Distribuições Maximais na forma de sequência didática como produto educacional direcionado para o ensino médio. A sequência foi pensada da seguinte forma: definição do problema (Motivação), desenvolvimento (Partes 2,3), implementação (Parte 4).

4 A SEQUENCIA

Apresentamos, a seguir, a sequência didática elaborada à luz da Pesquisa de Desenvolvimento para oportunizar A transposição didática da teoria de valores extremos para o ensino médio. apesar de pensada para o ensino médio, ela pode ser usada para o ensino superior a partir de alguns ajustes.

- **Publico alvo**: Alunos do 3º ano do ensino médio
- **Tempo estimado**: 7 horas-aulas (o primeiro encontro de uma hora-aula)
- **Pré-Requisitos:** trabalhar com logaritmo, exponenciais e calculadora científica.
- **Recursos:** Caderno, lápis, computador com acesso à internet.
- **Objetivo Geral**: Introduzir noções de teoria de valores extremos
- **Habilidade:** (EM13MAT408) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. Habilidades anteriores podem ser requeridas.
- **Desenvolvimento:**
  - **Aula 1:** Tem caráter motivador. Discutir a importância e a história da teoria de valores extremos. Comentar relações com matérias anteriores e sua interdisciplinaridade. Uma hora-aula.
  - **Aula 2 e Aula 3 :** Caráter prático. Começar a trabalhar e discutir os dados.

- **Aula 4:** Caráter aplicado. Usar os conhecimentos anteriores na a aplicação de um modelo real.

4.1 Aula 1(Motivação)

Como encaminhar

- Relembrar conceitos estatísticos de tendencia central de maneira breve.
- Introduzir o tema da aula: Teoria de valores extremos
- Propor uma pesquisa sobre o tema e discussão em fórum
- Apresentar a situação problema mais os dados disponíveis.

Comentários

Nesta etapa, pretende-se mostrar a importância de se estudar valores extremos mostrando o link entre diversas áreas. Aconselha-se que no início da aula o professor estimule os alunos com relação a importância da TVE, como também curiosidades históricas. Relembrar conceitos de tendencia central. Destacando a diferença. Nela, a preocupação é com valores mínimos e máximos, exemplos de medidas de dispersão. Mas, por que podemos estar interessados em valores extremos, ao invés de medidas de tendência central? Para responder essa pergunta partimos da seguinte situação.

Suponha que você seja o matemático da equipe de cientistas trabalhando em uma nova seção do sistema de defesa contra inundações. Um dos engenheiros civis pede que você analise qual a probabilidade de ultrapassar determinado valor. Será disponibilizada uma tabela com Nível do mar máximo anual durante um período de 50 anos antes de um furacão. Usar situação hipotética como estímulo e estudo inicial dos dados da Figura 1.

Figura 1 - Observações do nível máximo do mar em pés

8.5	8.9	9.1	8.9	8.4	9.7	9.1	9.6	8.7	9.3
9.6	9.3	8.7	9.0	8.8	8.9	8.9	12.2	7.8	7.7
8.3	8.1	7.3	6.8	6.7	7.3	7.6	8.2	8.6	9.8
9.5	7.4	7.3	10.2	10.3	10.4	8.8	9.7	10.0	10.8
11.1	12.7	11.5	11.8	12.6	13.0	10.5	10.5	10.0	9.4

Fonte: (FAWCETT; WALSHAW, 2016).

A avaliação nessa etapa pode verificada pela participação num fórum sobre o problema (pode ser um debate na sala mesmo, os alunos podem ser agrupados para pensarem numa estratégia em grupo).

4.2 Aula 2 (Trabalhando com frequência relativa)

Como encaminhar

- No começo da aula é recomendado ao professor que explique de maneira detalhada a notação usada, procurando tirar as dúvidas referentes aos resultados que ela produz.
- Relembrar ou introduzir o conceito de frequência relativa. Fazer exercícios breves. Mostrando as formas como ela aparece graficamente e analiticamente.
- Resolver a situação proposta usando a frequência relativa.

Comentários

Nesta segunda etapa, pretende-se abordar o problema pela estimativa da probabilidade, via frequência relativa, de alguns eventos aleatórios selecionados. usando os dados da Figura 1, podemos ver, por exemplo, que 33 observações excedem 8,75 pés, isto é:

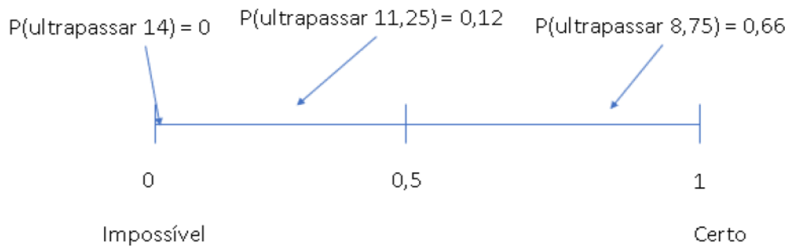
$$P(X > 8{,}75) = \frac{33}{50} = 0{,}66$$

Aqui, X denota o nível da água. pede-se aos estudantes trabalharem da mesma maneira para 11,25 e 14, para posicionar os resultados numa escala de probabilidades:

$$P(X > 11{,}25) = \frac{6}{50} = 0{,}12$$
$$P(X > 14) = \frac{0}{50} = 0$$

A partir desses dados podemos pensar em uma escala de probabilidade. Na Figura 2 abaixo podemos visualizar.

Figura 2 - Escala de probabilidade



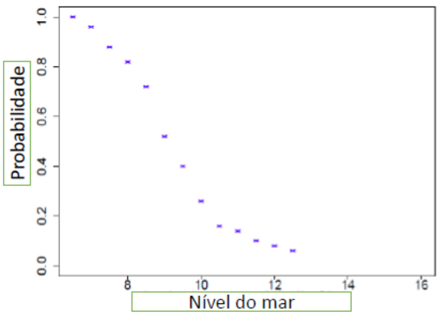
Fonte: O autor, 2022

Depois de se envolver a classe sobre as interpretações práticas dessas probabilidades, com referência à escala de probabilidade, os alunos são, então, convidados a criticar a interpretação dessas probabilidades. Especialmente, aquela dada pela terceira equação. Usar apenas dados anteriores implica que uma probabilidade maior que 14 pés é impossível, entretanto, numa situação de furacão esta pode chegar, por exemplo, a 14,4. A tarefa estimar tal evento parece impossível, a menos que extrapolemos a situação usando um modelo de probabilidade adequado (parte 2 desta atividade). Antes disso podemos fazer mais contas sobre frequências relativas.

Como a obtenção dessas frequências relativas é muito simples, temos aí uma maneira extremamente acessível de começar a atividade. quase todos os alunos podem concluir esta tarefa sem assistência e, mais importante, podem ver a relevância de simples ideias de probabilidade da aula para o mundo real. para terminar a primeira tarefa, os alunos são então solicitados a completar, o gráfico mostrado na figura 3. aqui, eles devem traçar probabilidades de excedência para 6,5, 7,0, ..., 12,5 pés, sendo essas probabilidades obtidas usando a abordagem de frequência relativa, como antes. os resultados a serem obtidos estão dispostos na figura 3 e, podem ser informados ao fim da etapa como verificação da aprendizagem relativa a usar a probabilidade frequencista nessa situação específica.

Figura 3 - Visualização dos Dados

Nível	Nº de ultrapassagens	Probabilidade
6.5	50	50/50 = **1.00**
7.0	48	48/50 = **0.96**
7.5	44	44/50 = **0.88**
8.0	41	41/50 = **0.82**
8.5	36	36/50 = **0.72**
9.0	26	26/50 = **0.52**
9.5	20	20/50 = **0.40**
10.0	13	13/50 = **0.26**
10.5	8	8/50 = **0.16**
11.0	7	7/50 = **0.14**
11.5	5	5/50 = **0.10**
12.0	4	4/50 = **0.08**
12.5	3	3/50 = **0.06**



Fonte: O autor, 2022

4.3 Aula 3 (Modelo de probabilidade para extremos)

Como encaminhar

- Primeiro relembrar definições pertinentes de logaritmo e exponencial.
- Apresentar calculadora científica com as funções necessárias de calculo exponencial e de logaritmos.
- Discutir a história da Teoria de Valoes Extremos.
- Apresentar o modelo de Gumbel
- Resolver a situação proposta pelo modelo de Gumbel.
- Discutir a diferença entre o modelo frequencista e o modelo de Gumbel.

Comentários

Esta etapa pretende usar uma distribuição extremal de máximo para abordar a situação-problema de forma mais eficiente. Agora discutimos ideias simples de modelagem e dados com objetivo de estimar probabilidades eventos raros, tentamos justificar a necessidade de um modelo bem ajustado a partir do qual podemos extrapolar. Nós discutimos que isso requer um pouco de fé em que um modelo que descreve bem os nossos dados observados podem ser estendido além do alcance de nossos dados, e tal incerteza significa que somos mais confiantes do que nunca no modelo que escolhemos.

Depois de discutir um pouco da história em torno do desenvolvimento da Teoria dos Valores Extremos, alunos são apresentados ao modelo de Gumbel para superação probabilidades. Todas as noções de funções de densidade e distribuição são evitadas, o modelo de Gumbel sendo simplesmente apresentado como função (COLES, 2001), esta função dando com base em modelo estimativas das frequências relativas obtidas empiricamente a partir dos dados. Pode-se trabalhar diretamente com a fórmula

$$P(X > x) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

onde X é um característico numérico, como o nível do mar, por exemplo, x representa um valor de interesse, μ e σ são os parâmetros de locação e escala, respectivamente. Suas estimativas são simplesmente fornecidas $\mu = 8{,}636$ e $\sigma = 1{,}275$ (FAWCETT; WALSHAW, 2016).

Agora podemos trabalhar com valores particulares de x, por exemplo $x = 7{,}5$

$$P(X > 7{,}5) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{7{,}5 - 8{,}030}{1{,}2}\right)\right]\right\} = 0{,}907$$

Neste ponto, o professor tem duas opções, dependendo do seu próprio nível de confiança e do público estudantil: (1) trabalho diretamente com a fórmula , demonstrando o uso do modelo de Gumbel para as estimações da segunda etapa com uma calculadora científica e permitindo que os alunos experimentem isso por si mesmos; (2) usar programação para automatizar os cálculos no modelo de Gumbel, permitindo que alunos se envolvam com as ideias por trás do modelo sem a preocupação com cálculos.

Se o professor decidir trabalhar com a fórmula de Gumbel diretamente com os alunos, usando uma calculadora científica em vez de programação, as estimativas dos parâmetros do modelo devem ser fornecidas. Nós recomendamos um certo treinamento para ajudar os alunos a realizar os cálculos em uma calculadora científica. Uma discussão sobre a função exponencial tende a ser mais relevante nessa opção. Os alunos podem trabalhar em pares neste ponto. Embora o trabalho com calculadora seja desafiador, eles podem ficar extremamente satisfeitos quando perceberem a semelhanças com os resultados da segunda etapa e o que conseguem realizar somente com a calculadora à mão. Indicamos os seguintes valores para comparação.

$$P(X > 8{,}75) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{10 - 8{,}75}{1{,}2}\right)\right]\right\} = 0{,}66$$
$$P(X > 11{,}25) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{11{,}25 - 8{,}536}{1{,}2}\right)\right]\right\} = 0{,}12$$
$$P(X > 14) = 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{14 - 8{,}536}{1{,}2}\right)\right]\right\} = 0{,}01$$

O professor deve pedir aos alunos que façam os mesmos cálculos também com os valores a mais que eles escolheram na segunda etapa. Fazendo então uma figura 4 de comparação entre estimativas baseadas em modelos de algumas probabilidades, com as estimativas empíricas associadas às observações dos extremos. Os alunos são convidados a pensar sobre o porquê, de acordo com à nossa análise e resultados na figura 4, um furacão pode ser considerado um evento muito raro. A discussão que se segue costuma ser muito interessante. Alguns alunos podem fazer a conexão entre a probabilidade de 0,01 e uma vez a cada cem anos imediatamente, enquanto outros não fazem tal link direto, mas observa corretamente que uma probabilidade de 0,01 significa que este tipo de evento é extremamente improvável.

Tabela 1 - Comparação entre estimativas

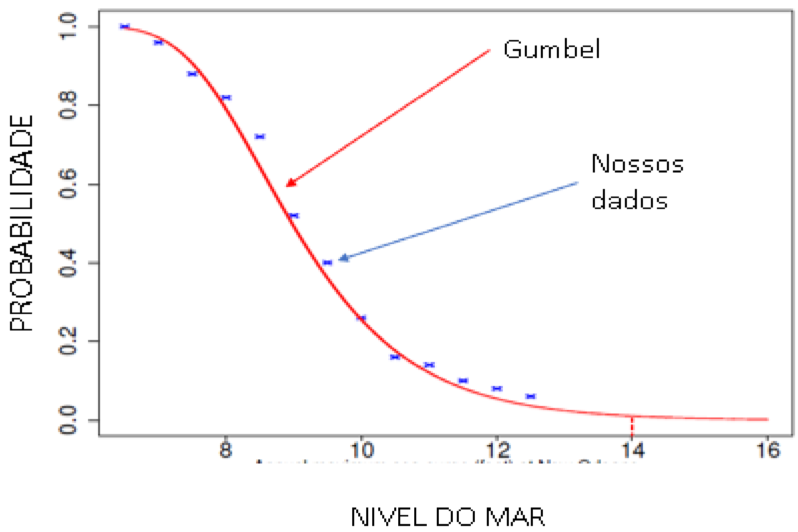
Eventos	8,75	11,25	14
Probabilidade de ocorrência estimada via frequencista	0,66	0,12	0
Probabilidade estimada via modelo de Gumbel	0,575	0,1	0,01

Fonte: O autor, 2022

Desta comparação fica claro o título da atividade e alguns alunos podem se entusiasmado com o fato de que podem entender a informação Estatística de forma mais profunda e que eles conseguiram fazer os cálculos próprios. Da vantagem que a modelagem tem sobre a abordagem frequencista: ela nos permite trabalhar com qualquer valor de interesse, não nos limitando aos dados concretos. Neste ponto, discutimos o processo de extrapolação a que nos referimos anteriormente e a confiança, mais do que nunca, em um modelo adequado para observações.

A discussão em torno dos modelos mais adequados pode ser feita, apoiado por comparações com a atividade anterior. Os alunos são lembrados da importância de um modelo de bom ajuste como base para extrapolação. Uma avaliação informal do Modelo de Gumbel, em relação a outros modelos de probabilidade, pode ser feito comparando visualmente as curvas Figura 4 para as frequências relativas dos dados.

Figura 1 - Comparação visual



Fonte: O autor, 2022

4.4 Aula 4 (Desafio: Estrutura de defesa)

Como encaminhar

- Relembrar os principais pontos das aulas anteriores tirando as principais dúvidas.
- Relembrar propriedades de exponenciais e logaritimos.
- Apresentar a situação desafio
- Receber a parte escrita com comentários e dúvidas.

Comentários

Esta etapa pode ser vista como uma avaliação geral podemos discutir uma aplicação potencial do modelo Gumbel ajustado: seu uso como uma ferramenta para auxiliar na concepção de um sistema de defesa contra grandes ondas, ou seja, um paredão. Discutir as compensações entre segurança e custo, quanto mais alto o paredão, o maior o nível de segurança oferecido a uma cidade, mas também maior o custo de construção incorridos. A seguinte questão é colocada: Durante um furacão, o nível do mar ultrapassou 14 pés e partes do sistema de paredões que protegem a cidade foram destruídos. Um novo sistema de defesa contra inundações deve ser construído; qual a altura que o paredão deve ter para se proteger contra a tempestade que podemos esperar ver, em média, uma vez a cada 500 anos. O objetivo dessa atividade é mostrar o potencial do modelo ajustado de Gumbel.

Os alunos agora precisam ponderar como eles podem ser capazes de usar o modelo Gumbel ajustado para ajudar responder a esta pergunta. O professor pode vagar pela sala, perguntando aos alunos se eles saberiam por onde começar com isso. Geralmente, muito poucos o fazem. No entanto, o seguinte pode ser suficiente para alguns alunos começarem a lidar com o problema:

$$P(\text{ Nível do } \mathrm{mar} > x) = \frac{1}{500}$$

Substituindo o lado esquerdo da com o modelo Gumbel ajustado e, em seguida, resolver para x. Geralmente é gerenciável para alunos que são algebricamente confiantes e familiarizado com exponenciais / logaritmos naturais. Segue a resolução abaixo.

$$1-\exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-8{,}536}{1{,}2}\right)\right\}\right]=\frac{1}{500}$$

$$\exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-8{,}536}{1{,}2}\right)\right\}\right]=\frac{499}{500}$$

$$-\exp\left\{-\left(\frac{x-8{,}536}{1{,}2}\right)\right\}=-\ln\left(\frac{499}{500}\right)$$

$$-\left(\frac{x-8{,}536}{1{,}2}\right)=\ln\left[-\ln\left(\frac{499}{500}\right)\right]$$

$$x=-1{,}2\cdot\ln\left[-\ln\left(\frac{499}{500}\right)\right]+8{,}536$$

$$x=15{,}992\approx 16\text{ pés}$$

Assim, a altura do paredão de proteção contra grandes ondas provocadas por uma furação que poderíamos esperar uma vez (em média) a cada 500 anos é de 16,56 pés. Isso é conhecido como nível de retorno de 500 anos estimado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que as atividades discutidas neste artigo podem ter um impacto positivo no entusiasmo dos alunos para estatística. Os alunos podem se tornar muito mais receptivo ao uso de Estatística/Probabilidade em assuntos que não sejam matemática sem ligação com o mundo real. Trabalhos futuros poderiam investigar a motivação dos alunos quantitativamente associando essas considerações às perguntas formuladas oralmente e escritas

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, H. A. de; LORENCINI JÚNIOR, Á. Relações entre a teoria da transposição didática e as analogias no Ensino de Ciências. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, vol. 11, no. 6, p. 644–662, 18 Oct. 2020. DOI 10.26843/rencima.v11i6.2220..

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. de. Por que a pesquisa de desenvolvimento na educação matemática? Why design research in mathematics education? **Revista Do Programa De Pós-Graduação Em Educação Matemática**, vol. 8, p. 526–546, 2015. .

BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília, DF: MEC, 2018.

BROWN, A. L. Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. **Journal of the Learning Sciences**, vol. 2, no. 2, p. 141–178, Apr. 1992.

COLES, S. **An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values**. London: Springer London, 2001. vol. 21, (Springer Series in Statistics).

FAWCETT, L.; WALSHAW, D. Sea-surge and wind speed extremes: optimal estimation strategies for planners and engineers. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, vol. 30, no. 2, p. 463–480, 29 Feb. 2016. DOI 10.1007/s00477-015-1132-3.

GNEDENKO, B. Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire. **The Annals of Mathematics**, vol. 44, no. 3, p. 423, Jul. 1943.

GONÇALVES, K. R.; BITTAR, M. ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO FERRAMENTAS DE ESTUDO DE UM PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA. 2018. **XII SESEMAT** [...]. [*S. l.*: *s. n.*], 2018.

GUERRA, J. Transposição didática: traduttore, traditore. **Matices en Lenguas Extranjeras**, vol. 14, no. 2, p. 55–82, 26 Oct. 2021. DOI 10.15446/male.v14n2.90735.

KENNEDY-CLARK, S.; GALSTAUN, V.; REIMANN, P. Preparing pre-service teachers for Teaching Performance Assessments using the OTTO Model. **Teachers and Teaching**, vol. 27, no. 1–4, p. 164–180, 19 May 2021.

MANGUEIRA, M.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma experiência da engenharia didática no processo de hibridização da sequência de leonardo. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, vol. 10, no. 02, p. 271–297, 1 Dec. 2021.

MAGALHÃES, M. N. Probabilidade e Variáveis Aleatórias. 2 ed. São Paulo: Editora USP, 2006.

NASCIMENTO, A. N. do; ARAÚJO, D. L. de. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA SOBRE O ENSINO DE PRODUÇÃO TEXTUAL NA BNCC. **Revista Espaço do Currículo**, vol. 12, no. 2, p. 380–396, 26 May 2019. 1579.2019v12n2.42062.

OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; SILVA, R. S. da. O estudo de definições matemáticas no contexto de investigação histórica: um experimento didático envolvendo engenharia didática e sequências polinomiais de fibonacci. **Tear: Revista de Educação Ciência e Tecnologia**, vol. 6, no. 1, p. 1–14, 2017. .

OLIVEIRA, M. D. L. Trabalho docente: a transposição didática, como fazê-la? **Dialogia**, no. 20, p. 167–190, 2014. https://doi.org/10.5585/dialogia.n20.4924.

PREDIGER, S.; GRAVEMEIJER, K.; CONFREY, J. Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. **ZDM**, vol. 47, no. 6, p. 877–891, 7 Oct. 2015..

TAMOŠAITIENĖ, J.; YOUSEFI, V.; TABASI, H. Project portfolio construction using extreme value theory. **Sustainability (Switzerland)**, vol. 13, no. 2, p. 1–13, 2021.

VOLPATO, G. L. **Ciência: da Filosofia à Publicação.** [*S. l.*]: Cultura Acadêmica, 2015.

Documento Digitalizado Público

TCC LUCAS DUTRA

Assunto: TCC LUCAS DUTRA
Assinado por: Antonio Neto
Tipo do Documento: Trabalho de Conclusão de Curso - TCC
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Público
Tipo do Conferência: Documento Original

Documento assinado eletronicamente por:

- **Antonio Dantas Costa Neto**, **COORDENADOR DE CURSO - FUC1 - ES-GRAD-LM**, em 18/08/2022 11:03:48.

Este documento foi armazenado no SUAP em 18/08/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 377147
Código de Autenticação: 4d54d36cdb