



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília
Campus Estrutural
Licenciatura em Matemática

CAINAN CLEMENTE FERNANDES

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE A TRIGONOMETRIA EUCLIDIANA E A
TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA**

Brasília

2026

CAINAN CLEMENTE FERNANDES

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE A TRIGONOMETRIA EUCLIDIANA E A
TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura em Matemática do
Campus Estrutural do Instituto Federal de
Brasília como requisito parcial para obtenção
do título de Graduado em Matemática.

Orientador: Dr. Jorge Augusto Gonçalo de
Brito

Coorientador: Dr. Vinicius Facó Ventura Vieira

Brasília

2026



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

ANEXO 4 - FICHA DE APROVAÇÃO EM BANCA EXAMINADORA

Trabalho de Conclusão de Curso

Discente: Cainan Clemente Fernandes

Título: Uma Comparação entre a Trigonometria Euclidiana e a Trigonometria Hiperbólica

Aprovado em 15/06 /2026.

Brasília - DF, 23 de junho de 2026.

Banca Examinadora

(Presidente)

Jorge Augusto Gonçalo de Brito

(Orientador)

Vinicius Facó Ventura Vieira

(Co-orientador)

Adriana Barbosa de Souza

(Examinador A)

Wembesom Mendes Soares

(Examinadora B)

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jorge Augusto Goncalo de Brito**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 23/06/2026 17:40:33.
- **Wembesom Mendes Soares**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 23/06/2026 18:54:08.
- **Vinicius Faco Ventura Vieira**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 24/06/2026 10:10:26.
- **Adriana Barbosa de Souza**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 24/06/2026 15:22:07.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 23/06/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifb.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 706139

Código de Autenticação: a284ec793e



Campus Estrutural
Área Especial nº 01, Quadra 16, None, Cidade do
Automóvel/SCIA, ESTRUTURAL / DF, CEP 71.255-200

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Iraneide e Adriano, por serem a minha base absoluta, que nunca desistiram e sempre me deram grandes motivos para continuar. Este trabalho e a conclusão desta etapa são o reflexo do amor, dos sacrifícios e do apoio incondicional que sempre recebi de vocês. Agradeço imensamente toda a parceria entre nós. Sem o porto seguro que vocês me proporcionaram, nenhuma dessas linhas seria escrita. Dedico esta conquista a vocês. À minha irmã caçula, pelas distrações que me proporcionou, pelos iogurtes eternos. À minha namorada, Paula, pelo companheirismo, pelos animes e doramas nos momentos de cansaço e por acreditar em mim mesmo quando eu duvidava. Sua presença e seu incentivo foram essenciais para que eu chegasse até aqui. Aos meus amigos, que estiveram comigo desde o primeiríssimo dia desta jornada. Obrigado por dividirem as angústias, os prazos apertados e, acima de tudo, por me darem sempre os melhores motivos para sorrir e me manter firme no curso. Vocês tornaram o caminho mais leve e inesquecível, principalmente um grupo de malucos: Humberto, Vitor, Wellington, Pedro e Isaac. Aos meus orientadores, que não apenas aceitaram o desafio de entrar neste trabalho comigo, mas guiaram meus passos com paciência, sabedoria e incentivo. Esta pesquisa ganhou vida graças à dedicação de vocês. A todos os meus mestres, que cruzaram meu caminho ao longo desses anos. Obrigado por compartilharem não apenas seus ensinamentos técnicos, mas por confiarem no meu potencial e na minha capacidade em grande parte desta trajetória: quando fui monitor, quando me tornei pibidiano e quando engajei em um projeto de evento. Vocês moldaram o profissional que me tornei hoje. A todos que, de forma direta ou indireta, fizeram parte deste ciclo: meus mais sinceros obrigados.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como questão central investigar de que modo a substituição do postulado das paralelas de Euclides pelo axioma de Lobachevsky altera as relações entre lados e ângulos dos triângulos. Para tanto, elaborou-se um referencial teórico constituído por uma introdução histórica e uma compilação axiomática das geometrias neutra e hiperbólica, a fim de, posteriormente, aprofundar os conceitos trigonométricos. A pesquisa, de natureza qualitativa e método axiomático-dedutivo, foi conduzida em três etapas: (i) seleção do material bibliográfico; (ii) construção axiomática das geometrias e redação do trabalho; (iii) comparação sistemática da trigonometria hiperbólica com a euclidiana. Entre os principais resultados obtidos, deduzem-se as relações trigonométricas hiperbólicas, o Teorema de Pitágoras Hiperbólico, a Lei dos Senos Hiperbólica e as duas versões da Lei dos Cossenos Hiperbólica. Demonstra-se que, para triângulos suficientemente pequenos, as fórmulas hiperbólicas aproximam-se das euclidianas, evidenciando a Geometria Euclidiana como caso limite local da Geometria Hiperbólica. Conclui-se, assim, que a substituição do postulado das paralelas altera as relações trigonométricas mediante o emprego das funções seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica, preservando, contudo, a estrutura formal das leis. O trabalho também aborda a relevância do estudo das geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, ressaltando sua contribuição para o desenvolvimento de uma prática docente fundamentada.

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica; Geometria Euclidiana; Trigonometria Hiperbólica; Disco de Poincaré; Formação do Professor de Matemática.

ABSTRACT

This undergraduate thesis investigates how the replacement of Euclid's parallel postulate by Lobachevsky's axiom alters the relationships between sides and angles of triangles. To this end, a theoretical framework was developed, comprising a historical introduction and an axiomatic compilation of neutral and hyperbolic geometries, deepening the trigonometric concepts. The research, qualitative and axiomatic-deductive in nature, followed three stages: bibliographic selection, axiomatic construction and writing, and systematic comparison between hyperbolic and Euclidean trigonometry. The main results include the Hyperbolic Pythagorean Theorem, the Hyperbolic Law of Sines, and the two versions of the Hyperbolic Law of Cosines. It is shown that for sufficiently small triangles, the hyperbolic formulas approximate the Euclidean ones, evidencing Euclidean geometry as the local limiting case of hyperbolic geometry. It is concluded that changing the postulate transforms the trigonometric relations through the use of $\sinh$, $\cosh$, and $\tanh$, while preserving the formal structure of the laws. The work also highlights the relevance of studying non-Euclidean geometries in the initial training of Mathematics teachers.

Keywords: Hyperbolic Geometry; Euclidean Geometry; Hyperbolic Trigonometry; Poincaré Disk; Teacher Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Exemplos de retas hiperbólicas no disco de Poincaré: diâmetros e arcos de círculo ortogonais ao bordo.	28
Figura 2 -	Construção da única reta hiperbólica (arco de círculo ortogonal) passando por dois pontos não colineares com o centro.	29
Figura 3 -	Reta hiperbólica como diâmetro quando os pontos são colineares com o centro do disco.	29
Figura 4 -	Medida de ângulo hiperbólico como ângulo entre as retas tangentes euclidianas no ponto de interseção.	30
Figura 5 -	Cálculo da distância hiperbólica via razão cruzada dos comprimentos euclidianos na reta que passa por A e B	31
Figura 6 -	Retas limítrofes m e m' passando por um ponto P exterior a uma reta n , definindo as direções de paralelismo.	32
Figura 7 -	Demonstração da existência de infinitas paralelas por um ponto exterior a uma reta.	32
Figura 8 -	Retas limítrofes m e m' de retas limítrofes.	34
Figura 9 -	Retas limítrofes que formam ângulos agudos com a perpendicular.	35
Figura 10 -	Representação dos pontos ideais como extremidades no infinito de uma reta hiperbólica.	36
Figura 11 -	Triângulo ideal com vértices A , B (ordinários) e Ω (ideal).	36
Figura 12 -	Teorema do ângulo externo em um triângulo generalizado: o ângulo externo é maior que o ângulo interno não adjacente.	37
Figura 13 -	Congruência lado-ângulo (LA) para triângulos ideais.	38
Figura 14 -	Congruência ângulo-ângulo (AA) para triângulos ideais.	39
Figura 15 -	Congruência ângulo-lado-ângulo (ALA) para triângulos ideais.	40
Figura 16 -	Quadrilátero de Saccheri: base AB , topo DC , lados AD e BC , ângulos do topo em D e C	41
Figura 17 -	Demonstração de que os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos usando pontos ideais.	42

Figura 18 -	Quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice C	43
Figura 19 -	Construção para provar que a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo hiperbólico é menor que 90°	44
Figura 20 -	Quadrilátero $BDEC$ usado na demonstração da congruência de triângulos com ângulos respectivamente iguais.	45
Figura 21 -	Construção para demonstrar que a função ângulo de paralelismo θ é sobrejetora no intervalo $(0, 90^\circ]$ - primeira parte.	46
Figura 22 -	Construção para demonstrar a sobrejetividade da função ângulo de paralelismo - segunda parte: reta m paralela.	47
Figura 23 -	Existência e unicidade da perpendicular comum a duas retas hiperbólicas que não se interceptam.	48
Figura 24 -	Concorrência das mediatrizes em um ponto ordinário (circuncentro) em um triângulo hiperbólico.	50
Figura 25 -	Concorrência das mediatrizes em um ponto ultra-ideal: perpendicular comum às mediatrizes.	51
Figura 26 -	Concorrência das mediatrizes em um ponto ideal (paralelas na mesma direção).	52
Figura 27 -	Situação impossível: as três mediatrizes formando um triângulo generalizado.	52
Figura 28 -	Variação da distância de um ponto sobre uma reta a outra reta concorrente.	54
Figura 29 -	Decrescimento da distância entre retas paralelas na direção do paralelismo.	54
Figura 30 -	Construção para obter um ponto sobre uma reta paralela com distância pré-determinada à outra reta.	55
Figura 31 -	Variação da distância entre retas hiperparalelas (ultraparalelas) com afastamento do pé da perpendicular comum.	56
Figura 33 -	Demonstração da unicidade do ponto correspondente a um ponto dado em uma reta paralela.	57
Figura 32 -	Definição de pontos correspondentes: P e Q em retas paralelas com ângulos congruentes no mesmo lado.	57
Figura 34 -	Bissetriz generalizada b de duas retas paralelas: conjunto dos pontos equidistantes.	59

Figura 35 - Construção da bissetriz generalizada a partir das bissetrizes dos ângulos formados por um segmento AB com as retas.	60
Figura 36 - Existência de ponto correspondente Q usando bissetriz generalizada b . . .	61
Figura 37 - Horocírculo: curva limite de circunferências com centro tendendo ao ponto ideal.	62
Figura 38 - Horocírculo: curva limite de circunferências com centro tendendo ao ponto ideal.	62
Figura 39 - Congruência de horocírculos H (centro um ponto ideal) e H' (centro outro ponto ideal): translação leva um ao outro.	64
Figura 40 - Congruência dos segmentos AA' e BB' em horocírculos concêntricos H e H'	65
Figura 41 - Raio M divide arcos correspondentes AB em H e $A'B'$ em H' se M é ponto médio do arco AB	66
Figura 42 - Divisão do arco P_0P_n em n partes iguais induz divisão correspondente em horocírculo concêntrico.	67
Figura 43 - Proporcionalidade: a razão entre os arcos AB e AC é igual à razão entre os arcos correspondentes $A'B'$ e $A'C'$ para horocírculos concêntricos H e H'	68
Figura 44 - Razão constante entre arcos A_1B_1 e A_2B_2 para horocírculos com distância fixa d	70
Figura 45 - Decaimento exponencial: comprimento s_x é igual a s_0 vezes e elevado a menos x para arcos correspondentes.	71
Figura 46 - Discretização: pontos $P_0, P_1, P_2, \dots$ com distância unitária para provar que S_n é igual a S_0 vezes e elevado a menos n	72
Figura 47 - Construção: reta t perpendicular a r em B é paralela a m	73
Figura 48 - Triângulo isósceles EAB e casos: t intersecta m ou é hiperparalela . . .	74
Figura 49 - Relações: S menos s igual a S vezes e elevado a menos $(t$ mais $u)$ e S mais s igual a S vezes e elevado a $(t$ menos $u)$	76
Figura 50 - Relação $s = \sinh(a)$: arco de horocírculo igual ao seno hiperbólico da distância perpendicular.	78

Figura 51 - Associação dos números reais a pontos na reta hiperbólica com origem O e unidade $OA = 1$	79
Figura 52 - Coordenadas hiperbólicas (x, y) no disco de Poincaré: abscissa e ordenada.	80
Figura 53 - Horocírculo passando por P para dedução da equação	81
Figura 54 - Retas paralelas ao eixo O_x	82
Figura 55 - Números complementares z e z' e a relação (iii).	83
Figura 56 - Triângulo retângulo hiperbólico ABC com partes $a, b, c, ,$	85
Figura 57 - Triângulo retângulo hiperbólico e seus elementos.	86
Figura 58 - Construção auxiliar para deduzir $\sinh(c) = \sinh(a) * \cosh(l)$	87
Figura 59 - Triângulo ABC com função ângulo de paralelismo	89
Figura 60 - Altura h relativa ao vértice B usada na dedução da Lei dos Senos Hiper- bólica.	90
Figura 61 - Triângulos retângulos ADB e ADC para demonstrar que a função ângulo de paralelismo.	94
Figura 62 - Triângulos retângulos ADB e ADC para demonstrar que a função ângulo de paralelismo.	97
Figura 63 - Triângulo de referência para comparação das fórmulas trigonométricas.	98
Figura 64 - Paralela à direita	109
Figura 65 - Retas paralelas	110
Figura 66 - Figura de apoio à demonstração de paralelismo entre três retas	111
Figura 67 - Triângulos Congruentes LAL	112
Figura 68 - Triângulos Congruentes ALA	113
Figura 69 - Lema do ponto no interior do ângulo: raio BE intersecta o segmento AC .	113
Figura 70 - Triângulos Congruentes LLL	114
Figura 71 - Demonstração do critério de congruência AAL (ou LAA).	115
Figura 72 - Teorema dos ângulos alternos internos para retas que não se intersectam.	116
Figura 73 - Existência e unicidade da reta perpendicular a uma reta dada por um ponto externo.	117
Figura 74 - Teorema do ângulo externo	118

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	
1.1	Objetivos	14
	Objetivos Específicos	15
2	METODOLOGIA	
2.1	Uso de IA	16
2.2	Organização Metodológica	17
3	INTRODUÇÃO HISTÓRICA	
3.1	A geometria antes de Euclides	19
3.2	Geometria Euclidiana	20
3.3	Quinto postulado	21
4	REFERENCIAL TEÓRICO	
4.1	Geometria Neutra	24
4.2	Geometria Hiperbólica	27
4.2.1	<i>Modelo de Poincaré</i>	27
4.2.2	<i>Quinto postulado na Geometria Hiperbólica</i>	31
4.2.3	<i>Pontos ideais e propriedades dos triângulos generalizados</i>	35
4.2.4	<i>Quadriláteros especiais</i>	40
4.2.5	<i>A soma dos ângulos de um triângulo</i>	44
4.2.6	<i>Pontos ultra ideais</i>	48
4.2.7	<i>Variação da distância entre duas retas</i>	53
4.2.8	<i>Horocírculos e curvas equidistantes</i>	56
5	TRIGONOMETRIA	
5.1	Arcos correspondentes e horocírculos Concêntricos	64

5.2	Comprimentos de arcos correspondentes e distâncias	69
5.3	Relações trigonométricas	77
5.4	Um sistema de coordenadas hiperbólicas	79
5.5	Lei dos senos e lei dos cossenos	84
5.6	Comparação entre as Trigonometria Hiperbólica e Euclidiana	97
5.6.1	<i>Teorema de Pitágoras Hiperbólico</i>	99
5.6.2	<i>Lei dos Senos Hiperbólica</i>	100
5.6.3	<i>Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 1</i>	100
5.6.4	<i>Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 2</i>	101
5.6.5	<i>Teorema de Pitágoras</i>	102
5.6.6	<i>Axioma de Lobachevsky e Trigonometria Hiperbólica</i>	103

6 CONCLUSÃO

APÊNDICE A

A.1	Conceitos Básicos de Geometria Neutra	108
A.1.1	<i>Axiomas de Hilbert</i>	108
A.1.2	<i>Propriedades das paralelas</i>	108
A.1.3	<i>Proposições Importantes</i>	112
A.1.4	<i>Paralelismo na geometria neutra</i>	116

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso constrói um referencial teórico sobre Trigonometria Hiperbólica e compará-la com a Euclidiana. A Geometria Hiperbólica surgiu no século XIX a partir da substituição do quinto postulado de Euclides pelo Postulado das paralelas de Lobachevsky e produziu novas relações entre lados e ângulos dos triângulos. No âmbito da formação inicial do professor de Matemática, o aprofundamento nos sistemas geométricos, particularmente nos não euclidianos, mostra-se importante para o desenvolvimento de uma prática docente fundamentada.

Diante desse contexto, a presente pesquisa orienta-se pela seguinte questão: Como a substituição do postulado das paralelas de Euclides pelo axioma de Lobachevsky modifica as relações entre lados e ângulos dos triângulos, expressas pelo Teorema de Pitágoras, pela Lei dos Senos e pela Lei dos Cossenos? Especificamente, investigam-se as funções seno, cosseno e tangente, bem como a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, na comparação entre triângulos da Geometria Euclidiana plana e triângulos da Geometria Hiperbólica.

O estudo evidencia que as relações trigonométricas clássicas não desaparecem na geometria hiperbólica, mas assumem novas formas expressas por funções hiperbólicas. Além disso, mostra-se que, em escalas suficientemente pequenas, as fórmulas hiperbólicas aproximam-se das fórmulas euclidianas, revelando a Geometria Euclidiana como um caso limite local.

A escolha por esse problema de pesquisa justifica-se por dois motivos principais. Primeiramente, identifica-se uma lacuna na formação inicial do professor de Matemática: temas como Geometria Neutra, Geometria Hiperbólica e modelos métricos alternativos raramente são abordados de maneira aprofundada nos currículos dos cursos de licenciatura, apesar de sua relevância para a compreensão da estrutura lógica da Matemática e das relações entre axiomas, modelos e teoremas. O estudo comparativo aqui proposto não apenas evidencia tais relações, mas também oferece ao futuro docente um repertório conceitual que amplia sua visão sobre a natureza da ciência matemática.

Em segundo lugar, a investigação comparativa entre as trigonometrias euclidiana e hiperbólica possibilita demonstrar, de forma concreta, como a Matemática se constitui como um sistema dedutivo aberto: a modificação de um único postulado (o das paralelas) gera estruturas

geométricas distintas, porém igualmente consistentes. Essa compreensão é fundamental para o desenvolvimento de uma prática docente reflexiva e fundamentada.

Do ponto de vista matemático duas questões emergem naturalmente no estudo da geometria hiperbólica: (i) como a negação do postulado das paralelas altera as relações trigonométricas? (ii) como os horocírculos se conectam às funções hiperbólicas? Tais questionamentos motivam parte da análise comparativa deste trabalho, fundamentado principalmente em Agustini (2022), Batista (2019), Barbosa (1995a) e Barbosa (1995b).

Esta compreensão mais ampla acerca do tema tem implicação direta na formação docente, tendo como objetivo proporcionar o ambiente e as ferramentas para que os futuros professores desenvolvam competências e, posteriormente, possam auxiliar seus alunos a construir conhecimento. Para tanto, é imprescindível que o profissional da educação se mantenha em constante atualização e aprofundamento em sua área, sendo capaz de oferecer novas perspectivas sobre os conteúdos curriculares. Este é, precisamente, um dos objetivos previstos no Projeto Pedagógico de Curso (PPC) da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Brasília – *Campus Estrutural*:

Formar professores para os ensinos fundamental, médio e profissional, com amplo domínio dos conhecimentos específicos em torno dos quais deverá atuar. [...] Criar e estimular condições e oportunidades que promovam a reflexão teórica e prática sobre a matemática, fazendo uso de novas tecnologias e compreendendo sua formação profissional como processo contínuo, autônomo e permanente (Instituto Federal de Brasília, 2025, p.39).

Assim, este trabalho não se restringe a uma revisão teórica: pretende construir uma análise comparativa que evidencie as diferenças estruturais entre as duas geometrias, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento matemático do futuro professor e, por extensão, para a qualificação do ensino de matemática na educação básica.

1.1 Objetivos

Temos como objetivo geral construir um referencial teórico sobre Trigonometria Hiperbólica e a compara com a euclidiana. Para tanto, organizamos os objetivos específicos, que orientam o desenvolvimento metodológico do trabalho.

Objetivos Específicos

1. Fundamentar a Geometria Neutra através dos axiomas de Hilbert.
2. Definir a Geometria Hiperbólica e a Geometria Euclidiana.
3. Construir formalmente o modelo do disco de Poincaré.
4. Caracterizar as principais propriedades da Geometria Hiperbólica.
5. Compreender os principais resultados da Trigonometria Hiperbólica.
6. Apresentar um quadro comparativo dos principais resultados das trigonometrias euclidiana e hiperbólica.

Num primeiro momento, faremos um apanhado histórico do estudo da Geometria. O objetivo dessa parte é ambientar a construção da área. Depois, retomaremos brevemente os conhecimentos básicos de Geometria neutra, a fim de fundamentar as noções comuns entre as geometrias euclidiana e hiperbólica. Neste contexto, apresenta-se o modelo de Poincaré e aprofunda-se em conhecimentos de geometria hiperbólica. Em seguida, apresenta-se a Trigonometria Hiperbólica com seus principais resultados acerca das razões trigonométricas hiperbólicas e relações trigonométricas. Depois, é apresentada uma comparação entre as duas trigonometrias.

A organização deste TCC foi construída por capítulos que apresentam os fundamentos históricos e conceituais da pesquisa. O Capítulo 3 apresenta os principais marcos históricos na construção das geometrias, fundamentando-se em (Castanheira, 2020) e (Barbosa, 1995b). O Capítulo 4 aborda as Geometrias Neutra e Hiperbólica, expondo os conceitos que as fundamentam, bem como a construção do modelo do disco de Poincaré (escolhido para melhor visualização geométrica no plano euclidiano). Essas teorias dialogam diretamente com (Barbosa, 1995b) e (Andrade, 2013), fontes específicas sobre o tema. Na sequência, o Capítulo 5, Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana, desenvolve os principais resultados da Trigonometria Hiperbólica e suas representações no modelo do disco de Poincaré. Ainda neste último capítulo, uma seção é dedicada à comparação dos resultados obtidos com a trigonometria clássica da Geometria Euclidiana.

2 METODOLOGIA

Este trabalho adota uma abordagem metodológica qualitativa, centrada na pesquisa exploratória de base bibliográfica. Especificamente, o método empregado é o axiomático-dedutivo, uma vez que a investigação parte de postulados fundamentais (axiomas) para deduzir teoremas e propriedades das geometrias euclidiana e hiperbólica.

Este trabalho tem como finalidade analisar e comparar conceitos matemáticos teóricos. Para isso, adota-se uma abordagem de pesquisa básica “pesquisa pura”, conforme definida por Gil (2022, p.17). São comparadas e descritas as diferentes formulações da trigonometria nas geometrias euclidiana e hiperbólica, a fim de compreender em profundidade o próprio conceito de trigonometria, bem como o modo como suas leis e relações fundamentais se adaptam e se transformam em diferentes espaços geométricos.

A pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado. Tradicionalmente, essa modalidade de pesquisa inclui ampla variedade de material impresso, como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos. Todavia, em virtude da disseminação das novas tecnologias de comunicação e informação, passaram a incluir materiais em outros formatos, como discos, fitas magnéticas, microfilmes, CDs, bem como o material disponibilizado pela Internet (Gil, 2022, p.44).

2.1 Uso de IA

A Portaria 2664/2026, de 6 de março de 2026, denominada “Política de Integridade na Atividade Científica”, é uma política de integridade científica. Em resumo, segue três princípios básicos: i) a pesquisa deve ser eticamente conduzida em todas as etapas; ii) a autoria precisa ser verdadeira e rastreável durante toda a produção; iii) o autor é responsável por tudo o que publica.

Art. 9º São diretrizes de integridade na pesquisa apoiada pelo CNPq: [...] c) declarar o uso de ferramentas de Inteligência Artificial Generativa - IAG, de qualquer espécie e em qualquer fase do desenvolvimento da pesquisa (concepção, redação, análise de dados, submissão) especificando nos respectivos textos e exposições eletrônicas, a ferramenta utilizada e a finalidade;

Conforme estabelecido no Art. 9º, item (c), cabe destacar que neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) fez-se uso de ferramentas de inteligência artificial, em específico o Chat

DeepSeek, restrito exclusivamente a correções ortográficas na língua portuguesa.

2.2 Organização Metodológica

A metodologia é organizada em três fases, cada uma com funções específicas na construção deste TCC. A primeira fase, de caráter exploratório, dedica-se ao contato direto com o material bibliográfico: livros, dissertações, teses e artigos relacionados às geometrias estudadas. Nos termos de Piovesan (1995), essa é uma “etapa exploratória inicial” que serve para mapear ideias, conceitos recorrentes, abordagens históricas e diferentes interpretações sobre as geometrias não euclidianas.

Desse modo, a partir de uma pesquisa preliminar, optou-se por trabalhar com artigos, dissertações de mestrado, teses de doutorado e livros. Dentre os materiais selecionados, destacam-se: o trabalho de Barbosa (1995b), que serve como fonte principal por conter os principais conceitos teóricos de Geometria Hiperbólica; o trabalho de Castanheira (2020), obra indicada pelo orientador, que reúne fatos históricos relevantes; o trabalho de Andrade (2013), identificado por meio de pesquisas próprias, escolhido por abordar o modelo de Poincaré utilizado ao longo do trabalho; e o trabalho de Barbosa (1995a), sobre geometria plana, recomendado pelo Projeto Pedagógico de Curso (PPC) para a disciplina de Geometria I.

Os materiais de apoio, incluindo dissertações e fontes oficiais relevantes, foram selecionados com base em três critérios: relevância temática para a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica, rigor matemático na exposição dos conceitos e adoção de uma abordagem axiomática formal. Dentre os materiais extras destacam-se (Arcari, 2008), (Andrade, 2013) e (Agustini, 2022). Todos estes materiais foram encontrados em sites de pesquisa como Google Acadêmico, portal de periódicos Capes, além de recomendações do orientador.

A segunda fase corresponde à escrita dos capítulos que compõem o referencial teórico deste TCC. O Capítulo de Introdução Histórica apresenta os principais marcos históricos na construção das geometrias, fundamentando-se em (Castanheira, 2020) e (Barbosa, 1995b). O Capítulo de Referencial Teórico aborda a Geometria Neutra e Hiperbólica e expõe os conceitos que fundamentam essas geometrias e a construção do modelo do disco de Poincaré, dialogando diretamente com (Barbosa, 1995b) e (Andrade, 2013), fontes específicas sobre o tema.

A terceira e última fase corresponde à escrita do Capítulo de Trigonometria: Trigonometrias Hiperbólica e Euclidiana. Nele, são apresentados os principais resultados da Trigonometria

Hiperbólica e suas representações no modelo do disco de Poincaré. Ainda neste último capítulo, uma seção será dedicada à comparação dos resultados obtidos e à discussão acerca das principais conclusões.

Embora o foco do trabalho seja de natureza matemática, busca-se, sempre que pertinente, evidenciar conexões conceituais para a formação do professor de Matemática, especialmente no que diz respeito à compreensão da Matemática como um sistema axiomático e à relação entre diferentes modelos geométricos.

3 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Neste capítulo, abordam-se questões históricas que buscam familiarizar o leitor com o contexto de surgimento das geometrias euclidiana e hiperbólica, bem como com seu desenvolvimento ao longo do tempo. Dentre os materiais de referência tomou-se como base as obras de Castanheira (2020), Barbosa (1995b), Batista (2019) e Ryan (1986).

3.1 A geometria antes de Euclides

A geometria é uma subárea da matemática dedicada ao estudo dos espaços e de suas propriedades. Suas origens remontam à antiguidade, quando as primeiras civilizações já demonstravam padrões geométricos em pinturas. A geometria tal como conhecida hoje, porém, foi sistematizada no Egito Antigo. Os egípcios registravam conteúdos matemáticos em papiros. Segundo Mol (2013), o mais famoso desses documentos é o Papiro de Rhind, que contém 84 problemas geométricos e aritméticos.

A civilização mesopotâmica documentava suas informações em tabuletas de argila, e muitas delas contêm conteúdo matemático, tendo se tornado valiosas fontes para a análise do estágio do conhecimento matemático dessa civilização. De acordo com Mol (2013), os babilônicos desenvolveram vários conhecimentos de cálculo e medida, que se aplicavam, sobretudo, a problemas de natureza econômica e comercial.

A Geometria é o ramo da matemática que estuda as formas espaciais, suas estruturas, relações operativas e propriedades por meio de um método axiomático, lógico e dedutivo. Segundo Silva (2015, p.10), “um método axiomático é um método que demonstra que os resultados são corretos, baseados na veracidade de outros e através de deduções lógicas”. De acordo com Meneses (2010), o primeiro registro da sistematização da matemática surge com Tales de Mileto, que apresentou dedutivamente conceitos geométricos e as primeiras demonstrações matemáticas. São elas:

- Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- O ângulo inscrito em um semicírculo é reto.

- Quando duas retas se interceptam, os ângulos opostos são iguais.
- Os lados de triângulos semelhantes são proporcionais.
- Dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos e um lado iguais.

3.2 Geometria Euclidiana

Durante o período grego, a matemática dedutiva desenvolveu-se significativamente. Coube a Euclides a escrita de *Os elementos*, obra que reúne vários livros matemáticos de autores contemporâneos e antecessores. Embora pareça que toda a geometria da época esteja contida nesse compêndio, observa-se:

Ao contrário da visão que muitos têm, a obra não traz um apanhado geral da geometria da época. Muitos resultados geométricos, já conhecidos, ficaram de fora, como o estudo das Cônicas. Alguns outros incluídos eram aritméticos e algébricos, não geométricos (Batista, 2019, p.4).

Os elementos de Euclides foi utilizado por vários séculos no ensino da matemática, tanto na Grécia quanto em períodos posteriores, por constituir uma compilação dos livros, teoremas e teorias construídos até então. A Geometria Euclidiana é construída pelo método axiomático, que consiste em estabelecer uma base de proposições a partir da qual, de forma dedutiva, se constroem os demais elementos da teoria. Os postulados e teoremas presentes nessa obra podem ser encontrados em Andrade (2013), Castanheira (2020) e Barbosa (1995b).

Na Geometria Euclidiana clássica, distinguem-se duas categorias importantes: as noções comuns e os postulados. As noções comuns são ideias que devem ser apenas observadas e compreendidas. Os postulados (ou axiomas), por sua vez, são construções e definições que também devem ser aceitas, porém são mais diretas e específicas. Cabe destacar que Euclides utilizou algumas leis sem uma axiomatização formal, e essas leis foram posteriormente incorporadas e denominadas como os axiomas de Hilbert, que compõem os principais livros de geometria plana euclidiana atualmente. Desse modo, apresentam-se a seguir as noções comuns e os postulados presentes na primeira versão da teoria, ou seja, os postulados que constam em *Os Elementos*.

Noções Comuns

- a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

- c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- e) O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Postulados

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- II. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- IV. Todos os ângulos retos são iguais.
- V. É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

3.3 Quinto postulado

O quinto postulado da Geometria Euclidiana é o que mais se diferencia dentre os cinco primeiros. Isso se deve ao fato de que ele viria a ser uma proposição em *Os Elementos* – mais especificamente, a vigésima nona proposição. No entanto, como era uma afirmação sem demonstração, foi colocado como axioma. Observa-se esse fato ao notar que este axioma só é utilizado a partir da 29ª proposição, sendo as outras 28 proposições anteriores válidas em qualquer geometria (Batista, 2019). O estudo da geometria sem levar em consideração o quinto postulado denomina-se Geometria Neutra, tema que será abordado com precisão posteriormente.

Uma das tentativas de demonstrar o quinto postulado mais famosas foi a do matemático Girolamo Saccheri (1667-1733), que desejava provar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros, utilizando uma técnica de redução ao absurdo. Sua abordagem chegou a demonstrar resultados importantes do que viria a ser chamada de Geometria Hiperbólica. Outro matemático que propôs uma tentativa de demonstração foi o alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Ele foi o primeiro a apresentar o teorema segundo o qual a área A de um triângulo depende unicamente de seus ângulos α , β e γ e de uma constante k :

$$A = k (\pi - \alpha - \beta - \gamma), \quad k > 0 \quad (3.1)$$

Lambert também afirmou, em algumas ocasiões, que uma geometria sem quadrados só seria possível em uma superfície cuja curvatura fosse igual a -1 (ou seja superfícies hiperbólicas) um conceito que só seria formalmente definido cerca de um século depois, por Gauss. A ideia de uma geometria não euclidiana colocava os matemáticos em confronto com a filosofia de Kant¹, que havia sido assimilada pela Igreja Romana e considerada quase como dogma. Segundo (Barbosa, 1995b), nesse período, muitos viviam sob a influência da Inquisição, que perseguia aqueles cujos conhecimentos contrariavam a doutrina oficial.

A despeito disso, matemáticos como Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Farkas Bolyai (1775-1856) e János Bolyai (1802-1860) não são tradicionalmente reconhecidos como os fundadores da Geometria Hiperbólica, sendo esse mérito atribuído ao matemático Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), um matemático russo que publicou em seu próprio país. No entanto, sua pesquisa não ganhou fama nem nacional nem internacionalmente. Isso fez com que Lobachevsky publicasse, em alemão, traduções e novos resultados e, pouco antes de sua morte, uma versão em francês, na esperança de ser reconhecido.

Carl Friedrich Gauss foi um dos primeiros matemáticos a vislumbrar a possibilidade de geometrias não euclidianas, embora não tenha publicado seus resultados. A ele se atribui a forma local do teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico com a curvatura da superfície:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{\Delta} K, dA, \quad (3.2)$$

onde α, β, γ são os ângulos internos do triângulo geodésico Δ e K é a curvatura gaussiana da superfície X .

Geodésica é um conceito abstrato que denota a curva que minimiza a distância entre dois pontos. A partir da equação de Gauss para a soma dos ângulos de um triângulo, percebe-se que, quanto menor a curvatura da superfície, mais próxima de π estará a soma dos ângulos internos.

Considerando a equação 3.2, é natural analisar as situações em que a curvatura K do

¹Naquele período, a Igreja Católica incorporou conhecimentos de diversas áreas, incluindo a matemática. Caso tais conhecimentos contrariassem os princípios da Igreja, eram destruídos e seus autores perseguidos. Entre os conhecimentos tomados como dogmas estava parte da filosofia de Kant.

espaço é constante. Nesses casos, a integral da curvatura sobre a área do triângulo se reduz ao produto $K \cdot A$, resultando em:

$$K \cdot A = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi, \quad (3.3)$$

onde K é constante e A é a área do triângulo.

de onde concluímos que,

1. $K = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$, (Geometria Euclidiana).
2. $K > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$, (Geometria Esférica)
3. $K < 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$, (Geometria Hiperbólica)

O matemático Georg Friedrich Riemann (1826–1866) revolucionou a geometria ao ampliar o conceito de espaço para além da geometria euclidiana. Orientado por Gauss durante o doutorado, introduziu o conceito de superfícies de Riemann e lançou as bases da geometria de múltiplas dimensões, conhecida como Geometria Riemanniana. Esses estudos deram origem a importantes desenvolvimentos da Geometria Diferencial, cuja formulação depende diretamente das ferramentas do cálculo. Anos mais tarde, a Geometria Riemanniana tornou-se o fundamento matemático da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Assim, o surgimento das geometrias não euclidianas, entre elas a Geometria Hiperbólica, é importante tanto por seu impacto conceitual quanto por suas aplicações científicas.

Em todas estas três geometrias existem relações trigonométricas, sendo essas características fundamentais nas geometrias como um todo. A trigonometria, em seu conceito mais fundamental, é compreendida como o estudo das relações entre ângulos e lados de um triângulo. Assim, é enriquecedor o estudo específico da Geometria Hiperbólica e de suas características por meio de uma revisão bibliográfica acerca do tema.

Dessa forma, a Geometria Neutra reveste-se de importância histórica e acadêmica para o professor de matemática, uma vez que será apresentada no capítulo seguinte com o objetivo de fundamentar os conceitos comuns às geometrias euclidiana e hiperbólica.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo aborda os conceitos fundamentais da Geometria Neutra e da Geometria Hiperbólica, com ênfase nas proposições e construções relevantes para as relações trigonométricas, foco central deste trabalho. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados nos materiais de (Barbosa, 1995b), (Andrade, 2013), (Arcari, 2008) e (Agustini, 2022)

4.1 Geometria Neutra

Como mencionado anteriormente, o matemático Johann Bolyai buscou demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros axiomas. No entanto, aquilo que impressionava Bolyai eram as proposições que não dependiam do quinto postulado, estas formam a Geometria Absoluta (Geometria Neutra) (Barbosa, 1995b). A Geometria Neutra surgiu a partir dessa concepção, sendo definida por Plácido Andrade como aquela comum às geometrias euclidiana e hiperbólica, bem como qualquer outra que tenha como fundamento somente os quatro primeiros axiomas de Euclides. Em termos dos axiomas de Hilbert, a Geometria Neutra é qualquer teoria que dispensa o axioma das paralelas, assim como é destacado em (Andrade, 2013).

Por vários séculos, *Os Elementos* foi a principal fonte de transmissão do conhecimento matemático. Conforme apresentado anteriormente, houve diversas tentativas de demonstrar o quinto postulado, e uma das mais notórias foi a de Johann Bolyai. A geometria absoluta, como ele a denominava, tinha como pilar os quatro primeiros postulados, sem levar em consideração o postulado das paralelas.

Embora a tentativa de Bolyai tenha resultado na redescoberta de conceitos já formulados por Gauss e Lobachevsky, ela ainda é de grande importância para a fundamentação teórica deste trabalho.

Apresentam-se, a seguir, os conceitos básicos da Geometria Neutra: os quatro primeiros postulados e as proposições deles decorrentes. Conforme Barbosa (1995b):

- I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.
- II. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- III. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

O matemático alemão David Hilbert (1862-1943) reformulou o conjunto de axiomas da geometria que é utilizado atualmente, pois esse sistema preenche as lacunas identificadas ao longo do tempo. A estrutura axiomática de Hilbert está organizada em quatro grupos principais: os Axiomas de Incidência, os Axiomas de Ordem, os Axiomas de Congruência e os Axiomas de Continuidade.

Uma vez que a axiomatização de Hilbert é referência para as obras modernas de geometria plana, apresentam-se a seguir os primeiros axiomas, conforme constam no artigo de Silva (2015) e na obra de Andrade (2013).

Axiomas de incidência Na axiomática de Hilbert, o termo “incidência” denota a relação entre elementos de naturezas distintas. Trata-se, especificamente, da relação entre pontos e retas, conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana.

Axioma 4.1.1. *Para quaisquer pontos distintos existe uma única reta que os contém.*

Axioma 4.1.2. *Qualquer reta contém pelo menos dois pontos distintos.*

Axioma 4.1.3. *Existem pelo menos três pontos distintos com a propriedade de que não são todos os três “incidentes” com uma mesma reta.*

Axiomas de ordem

Axioma 4.1.4. *Se um ponto B está entre dois outros pontos A e C , então, A , B e C são três pontos distintos de uma reta e B está entre A e C .*

Axioma 4.1.5. *Dados dois pontos distintos B e D , existem pontos A , C e E tais que:*

- B está entre A e C ;
- C está entre B e D ;
- D está entre C e E ;

Axioma 4.1.6. *Dados três pontos distintos de uma reta, apenas um deles localiza-se entre outros dois.*

Axioma 4.1.7 (Axioma de Pasch). *Sejam A , B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos, então, se l intersepta o segmento $\overline{AB}$, ela, também intersepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.*

Axiomas de congruência

Axioma 4.1.8. *Se A e B são pontos distintos e se A' é qualquer ponto, então, para toda semirreta r com origem em A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $AB = A'B'$.*

Axioma 4.1.9. *Se um segmento $A'B'$ e outro segmento $A''B''$ são congruentes a um segmento AB então os segmentos $A'B'$ e $A''B''$ são congruentes entre si.*

Axioma 4.1.10. *Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, então $AC \equiv A'C'$.*

Axioma 4.1.11. *Se $\hat{B}$ é um ângulo e se $\overline{B'C'}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\overline{A'B'}$ em cada lado de $\overline{B'C'}$ tal que $\hat{B}' \equiv \hat{B}$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.*

Axioma 4.1.12. *Se para dois triângulos ABC e $A'B'C'$ as congruências $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ são válidas então as congruências $\hat{B} \equiv \hat{B'}$ e $\hat{C} \equiv \hat{C'}$ são satisfeitas.*

O Axioma 4.1.8 também é conhecido por Axioma do transporte de segmentos enquanto o Axioma 4.1.11 trata sobre o transporte de ângulos, é válido destacar ainda que o Axioma 4.1.10 é denotado como o Axioma da aditividade de segmentos.

Axiomas de continuidade

Axioma 4.1.13 (Axioma de Arquimedes). *Sejam $\overline{CD}$ um segmento qualquer, A um ponto, e r uma semirreta com início em A . Então, para cada ponto $B \neq A$ em r existe um número n tal que quando $\overline{CD}$ é colocado n vezes em r a partir de A , um ponto E é obtido de tal forma que $n \cdot \overline{CD} \equiv \overline{AE}$ e, ou $B = E$ ou B está entre A e E .*

Axioma 4.1.14 (Axioma da Completude da Reta (ou Axioma de Cantor)). *Se $A_n B_n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto P pertencente a todos os segmentos da coleção.*

Estes axiomas fundamentam o presente trabalho, uma vez que as conclusões obtidas no âmbito da Geometria Neutra são válidas também para as demais geometrias. As demais proposições encontram-se no Apêndice A.

Ao admitir o postulado das paralelas como verdadeiro, surge a clássica Geometria Euclidiana Plana. Ao negá-lo, surgem duas possibilidades. A primeira considera que, dada uma reta, não existem retas paralelas a ela. Essa teoria é denominada Geometria Elíptica, e seus triângulos são chamados de triângulos esféricos. A segunda possibilidade considera que, dada uma reta e um ponto, há pelo menos duas retas paralelas à reta dada. Essa teoria é o enfoque deste trabalho e denomina-se Geometria Hiperbólica, e seus triângulos são chamados de triângulos hiperbólicos.

4.2 Geometria Hiperbólica

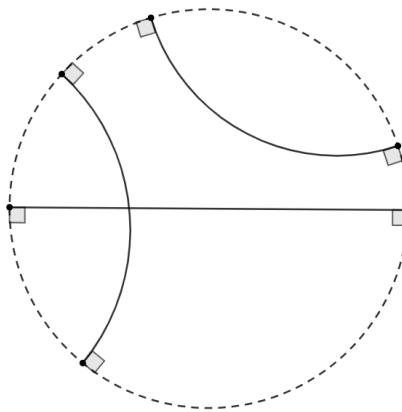
Assim como foi mencionado, as geometrias não euclidianas surgem da tentativa de estabelecer uma estrutura minimal com os quatro primeiros axiomas. A primeira tentativa de demonstrar a conjectura que viria a ser o quinto postulado na Geometria Euclidiana partiu de Ptolomeu, contemporâneo de Euclides. No entanto, Ptolomeu assumiu que o paralelismo acarreta a semelhança de duas figuras, premissa que é válida somente na Geometria Euclidiana (Batista, 2019). Segundo Andrade (2013), a mais importante tentativa de demonstração foi a do italiano Giovanni Girolamo Saccheri, cuja abordagem foi por redução ao absurdo, supondo que não existiam retângulos. Apesar de provar, sem erros lógicos, propriedades da Geometria Hiperbólica, ele nunca acreditou na existência de outra geometria além da euclidiana. Desse modo a Geometria Hiperbólica é definida como aquela em que são aceitos os quatro primeiros postulados ou os equivalentes axiomas de Hilbert mais o quinto postulado característico da Geometria Hiperbólica.

4.2.1 Modelo de Poincaré

Esta subseção apresenta ao leitor o modelo do disco de Poincaré com o propósito de oferecer melhores representações gráficas ao longo do trabalho. Segundo Arcari (2008, p.41), um modelo para um sistema axiomático é um ambiente no qual se representam (ou interpretam) os conceitos primitivos, tornando os axiomas afirmações aceitas como verdadeiras. A base desse modelo é um disco euclidiano D de raio 1, cujo interior é denotado por H . Utilizando os axiomas de Hilbert e teoremas da Geometria Euclidiana, constrói-se o modelo. Partindo de uma noção intuitiva, apresentamos o que segue.

- i) **Pontos:** os pontos hiperbólicos são os pontos de H .
- ii) **Retas:** as retas hiperbólicas são as interseções de H com um diâmetro de D ou com um círculo perpendicular ao bordo de D (dois círculos são perpendiculares quando se intersectam e suas tangentes nos pontos de interseção formam ângulos retos), veja a Figura 1.
- iii) **Plano:** o plano hiperbólico é o interior do disco D , denotado por H , ou seja, os pontos de D excluído o bordo.

Figura 1 – Exemplos de retas hiperbólicas no disco de Poincaré: diâmetros e arcos de círculo ortogonais ao bordo.

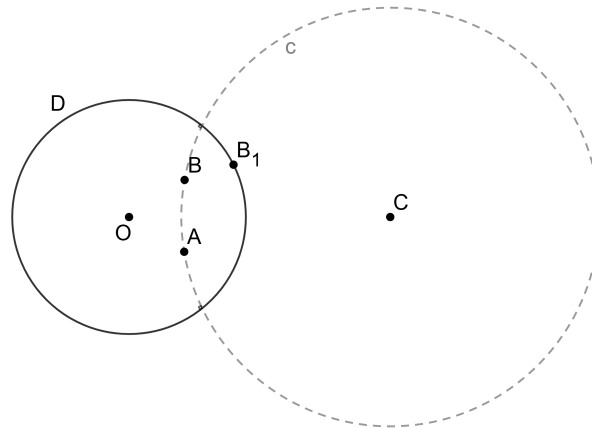


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 4.2.1. Prova-se que a interseção não vazia, em D , de dois arcos de círculos distintos ortogonais ao bordo de D ocorre em um único ponto. Analogamente, a interseção não vazia entre um arco de círculo ortogonal ao bordo de D e um diâmetro de D , ou entre dois diâmetros de D , também ocorre em um único ponto.

Proposição 4.2.1. Dados os pontos não colineares A, B, O (onde O é o centro de D), existe um único círculo euclidiano c que passa por A e B e intersecta o bordo de D ortogonalmente (veja a Figura 2).

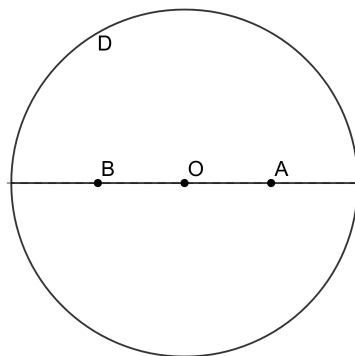
Figura 2 – Construção da única reta hiperbólica (arco de círculo ortogonal) passando por dois pontos não colineares com o centro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Proposição 4.2.2. *Se os pontos A , B e O são colineares, então existe uma única reta euclidiana r passando por eles e ortogonal ao bordo de D (veja a Figura 3).*

Figura 3 – Reta hiperbólica como diâmetro quando os pontos são colineares com o centro do disco.



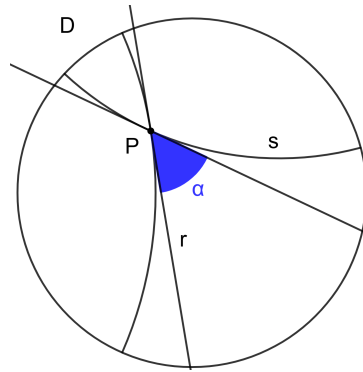
Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que estas noções das proposições anteriores são, por definição, equivalentes ao Axioma 4.1.1. Além disso, segundo Barbosa (1995b, p. 147), a interseção em H de círculos e/ou retas distintos(as) como as acima ocorre em um único ponto de H . Façamos as seguintes interpretações em H :

Ainda é válido destacar que as noções hiperbólicas de “estar em” (ponto pertencente a uma reta) e “estar entre” (ponto entre dois outros) correspondem às mesmas noções no plano

euclidiano.

Figura 4 – Medida de ângulo hiperbólico como ângulo entre as retas tangentes euclidianas no ponto de interseção.



Fonte: Elaborado pelo autor.

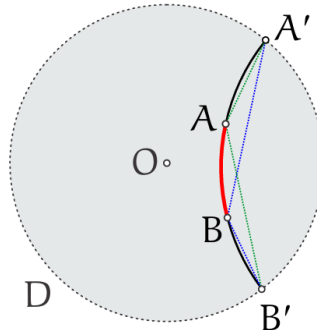
Definimos o **ângulo hiperbólico** entre duas semirretas hiperbólicas de mesma origem como sendo o ângulo (euclidiano) entre suas tangentes (euclidianas) no ponto de interseção (Figura 4). Assim, a medida de ângulo é feita exatamente como no sentido euclidiano e, portanto, obedece aos axiomas relativos a tais medições.

Definição 4.2.1. *Dado um segmento hiperbólico AB (Figura 5), sejam A' e B' as extremidades da reta hiperbólica que contém AB . A **distância hiperbólica** $d_D(A, B)$ (ou **comprimento hiperbólico** de AB) é definida por:*

$$d_D(A, B) = \ln \left(\frac{A'B \cdot BA'}{A'A \cdot BB'} \right), \quad (4.1)$$

onde AB' , BA' , AA' e BB' são os comprimentos euclidianos correspondentes. O logaritmando é a **razão cruzada**, sempre maior que 1 (igualdade apenas quando $A = B$), donde $d_D(A, B) \geq 0$.

Figura 5 – Cálculo da distância hiperbólica via razão cruzada dos comprimentos euclidianos na reta que passa por A e B .



Fonte: Agustini (2022, p.52).

Observação 4.2.2. Com a definição de distância em D , a reta hiperbólica tem comprimento infinito: quando A tende a A' ou B tende a B' , $d_D(A, B) \rightarrow \infty$. O segmento hiperbólico entre A e B é a curva em D de menor comprimento hiperbólico ligando esses pontos. As retas hiperbólicas definidas anteriormente satisfazem essa condição de minimalidade.

Em estudos avançados, tais retas são chamadas de “geodésicas”, e os segmentos, de “segmentos geodésicos”. O termo remete aos círculos máximos da superfície terrestre, que cumprem a mesma condição de minimalidade com a métrica euclidiana.

A métrica está intimamente relacionada à forma da geodésica. Dada uma métrica, deduz-se o formato das geodésicas; o inverso (deduzir a métrica a partir das geodésicas) é geralmente mais difícil.

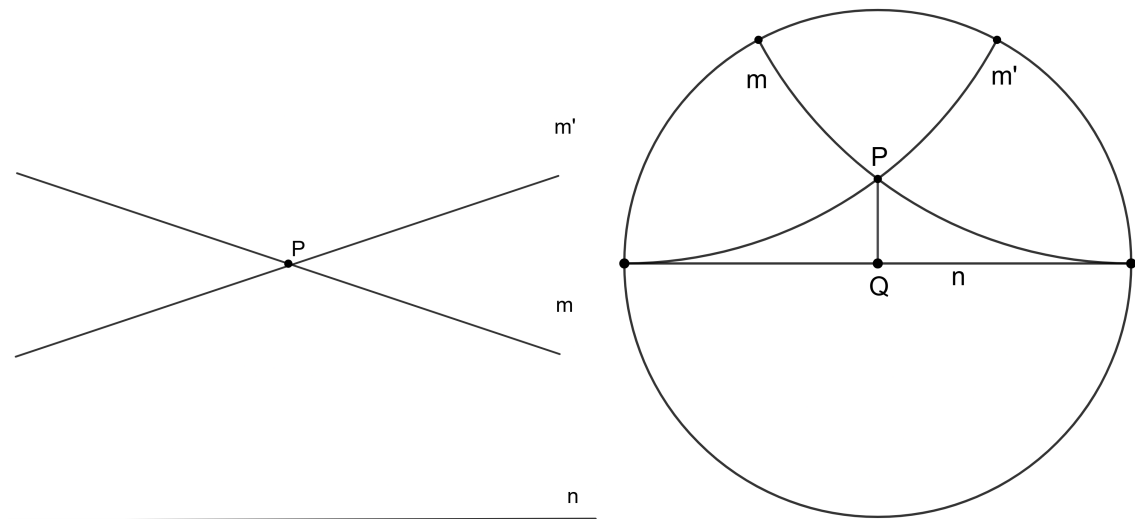
O disco de Poincaré definido anteriormente é um modelo para o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica Plana, no qual o Axioma das Paralelas de Hilbert é substituído pelo Axioma 4.2.1.

4.2.2 Quinto postulado na Geometria Hiperbólica

O axioma das paralelas característico da Geometria Hiperbólica assume a existência de pelo menos duas retas paralelas a uma reta dada. Com isso, apresentamos a construção dessa geometria. A seguir, examinamos o quinto axioma característico da Geometria Hiperbólica.

Axioma 4.2.1 (Axioma V - Geometria Hiperbólica). *Por um ponto exterior a uma reta, passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada.*

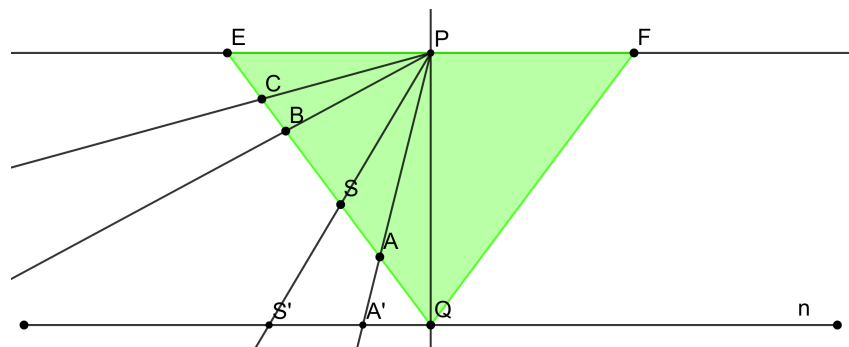
Figura 6 – Retas limitrofes m e m' passando por um ponto P exterior a uma reta n , definindo as direções de paralelismo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Proposição 4.2.3 (Geometria Hiperbólica). *Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta, existem exatamente duas retas m e m' que passam pelo ponto P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n .*

Figura 7 – Demonstração da existência de infinitas paralelas por um ponto exterior a uma reta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Baixe a perpendicular do ponto P à reta n e designe por Q o pé desta perpendicular

(Figura 7). Em seguida, trace a reta passando por P e perpendicular ao segmento $\overline{PQ}$, a qual sabemos que não intercepta a reta n .

Escolha dois pontos E e F sobre esta reta, de modo que P pertença ao segmento $\overline{EF}$. Considere o triângulo EFQ . Como o ponto P pertence ao lado $\overline{EF}$, todas as retas que passam por P , com exceção da reta que passa por E e F , são retas que cortam o segmento $\overline{EF}$ em um ponto, e que, conseqüentemente, cortam também o segmento $\overline{EQ}$ ou o segmento $\overline{QF}$. Vamos nos restringir, inicialmente, às que cortam o segmento $\overline{EQ}$. Observe que, neste segmento, cada ponto representa uma das retas que passa por P .

Estes pontos podem ser separados em duas classes, a dos que representam retas que não interceptam n , e que chamaremos de N , e a dos que representam retas que interceptam n , e que chamaremos de M . É claro que $N \cap M$ é vazio, que $E \in N$ e que $Q \in M$. Além disto, se $A \in M$, então, $\overline{QA} \subset M$. Para ver que isto ocorre, seja A' o ponto de n onde a reta que passa por P e A intercepta n ; observe que qualquer reta que penetre no triângulo PQA' pelo vértice P deve cortar o lado $\overline{QA'}$. Da mesma forma, se $B \in N$, então, $\overline{EB} \subset N$. Aqui o raciocínio é o mesmo que já utilizamos para garantir a existência de infinitas retas que não interceptam a reta n .

Pelo Axioma da Completude (Cantor), aplicado à reta EQ , existe um único ponto $S \in EQ$ que separa os conjuntos M e N . Mostremos que $S \notin M$.

Suponha, por absurdo, que $S \in M$. Então a reta PS intercepta n em um ponto S' . Tome um ponto T na semirreta QS' tal que $Q * S' * T$ (isto é, S' está entre Q e T). Por construção, a reta PT intercepta EQ em um ponto U com $Q * S * U$ (pois T está além de S'). Mas isso colocaria $U \in M$ à direita de S , contradizendo o fato de que S é o ponto de separação (todos os pontos à direita de S em EQ deveriam pertencer a N). Logo, $S \notin M$; portanto $S \in N$.

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento $\overline{QF}$, obtendo-se outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto P em duas categorias as que interceptam n e as que não interceptam n . Além disto, estas duas retas não interceptam n .

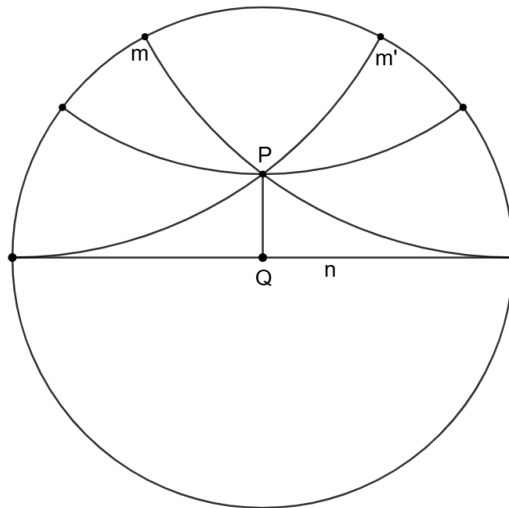
■

A proposição acima é uma das mais importantes para a geometria hiperbólica, pois define dois conjuntos: o das retas paralelas e o das retas não paralelas a uma reta dada. Assim, apresenta a existência de duas retas, que denotaremos por m e m' . Estas duas retas serão utilizadas ao

longo deste texto. Dada uma reta r e um ponto P , pela Proposição 4.2.3 existem m e m' tais que qualquer ponto no semiplano comum a m e m' e o ponto P formam uma infinidade de paralelas.

Definição 4.2.2 (Retas Limítrofes). *Chamaremos as retas m e m' de retas limítrofes.*

Figura 8 – Retas limítrofes m e m' de retas limítrofes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

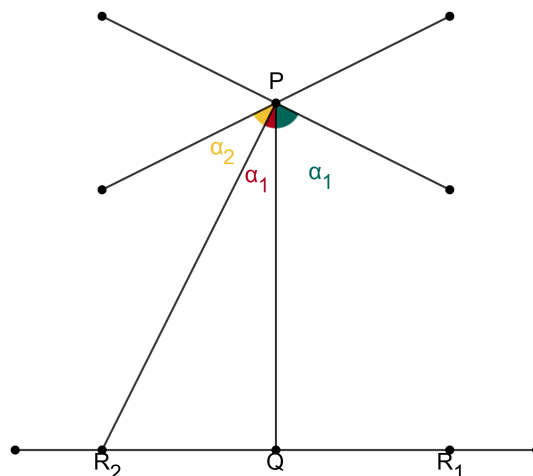
Para qualquer ponto no semiplano comum a essas retas, P e esse ponto determinam uma infinidade de retas paralelas (Figura 8).

Proposição 4.2.4. *As retas limítrofes paralelas a n por P formam ângulos iguais com a perpendicular de P a n . Tal ângulo é agudo.*

Dem.: Como anteriormente, seja $\overline{PQ}$ o segmento perpendicular a n traçado a partir de P (Figura 9). Sejam α_1 e α_2 os dois ângulos referidos. Suponha que $\alpha_1 < \alpha_2$. No lado em que está o ângulo α_2 , trace uma reta passando por P que forme ângulo α_1 com $\overline{PQ}$. Pela escolha das paralelas, tal reta cortará n em um ponto, chamado R_2 . Seja R_1 um ponto na reta n tal que Q seja o ponto médio de $\overline{R_1R_2}$. Então os triângulos PQR_1 e PQR_2 são congruentes. Consequentemente, $\widehat{QPR_1} = \alpha_1$, o que é absurdo.

■

Figura 9 – Retas limítrofes que formam ângulos agudos com a perpendicular.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.3 Pontos ideais e propriedades dos triângulos generalizados

Na Geometria Hiperbólica, um ponto ideal é um conceito de ponto no infinito. Segundo Barbosa (1995b), sua introdução consiste em adicionar infinitos à reta, de modo que tenhamos $-\infty$ antes e $+\infty$ depois de todos os pontos da reta. Esses novos pontos são denominados pontos ideais, enquanto os demais são chamados de pontos ordinários. Como consequência, duas retas são paralelas se possuem em comum um ponto ideal na direção do paralelismo. É válido destacar que a reta hiperbólica pode apresentar-se como orientada ou não orientada a depender do que é estudado.

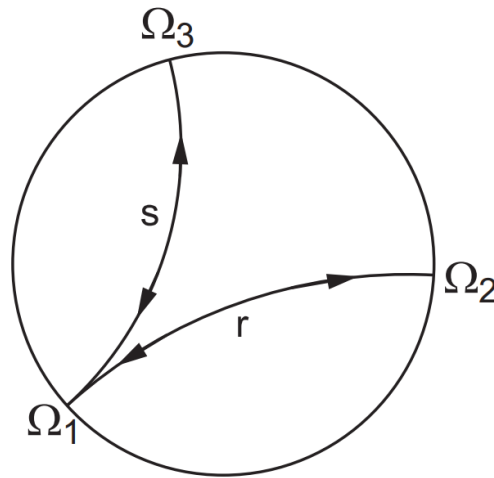
A seguir, apresenta-se a definição conforme Batista (2019):

Definição 4.2.3 (Pontos Ideais). *Os pontos ideais são os dois pontos localizados um antes e outro depois de todos os pontos de cada reta no plano, representados por letras maiúsculas gregas.*

Esta noção de pontos ideais e pontos ordinários tem como objetivo simplificar os enunciados a partir de agora. Na Figura 10, é possível visualizar melhor a forma de um ponto ideal.

Nesta discussão, merecem destaque os triângulos generalizados, os quais podem ser constituídos tanto por pontos ordinários quanto por pontos ideais. Nesse âmbito, as proposições que se seguem são equivalentes ao Axioma de Pasch quando aplicado aos vértices de um triângulo generalizado.

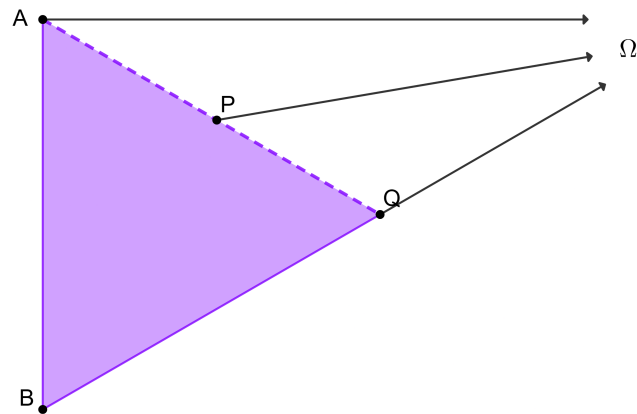
Figura 10 – Representação dos pontos ideais como extremidades no infinito de uma reta hiperbólica.



Fonte: Arcari (2008, p.58).

Proposição 4.2.5. *Se uma reta penetra em um triângulo generalizado $AB\Omega$ por um de seus vértices, então, ela corta o lado oposto a este vértice.*

Figura 11 – Triângulo ideal com vértices A, B (ordinários) e Ω (ideal).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Se a reta penetra por A , ou por B , então, deve interceptar o lado oposto (Figura 11). Isto ocorre simplesmente porque as retas $A\Omega$ e $B\Omega$ são paralelas. Considere, pois, uma reta que vem do ponto Ω e passa em algum ponto P interior ao triângulo. Pelo paralelismo, a semirreta $\overrightarrow{AP}$ intercepta $B\Omega$ em um ponto Q . Pelo axioma de Pasch, a reta que vem de Ω e passa por P

deve interceptar um dos outros dois lados do triângulo ABQ . Não pode interceptar $\overline{BQ}$, pois do contrário, coincidiria com o lado BQ . Logo, intercepta $\overline{AB}$.

■

Proposição 4.2.6. *Se uma reta corta um dos lados do triângulo generalizado ABQ , e não passa por nenhum de seus vértices, então intercepta um, e somente um, dos outros dois lados.*

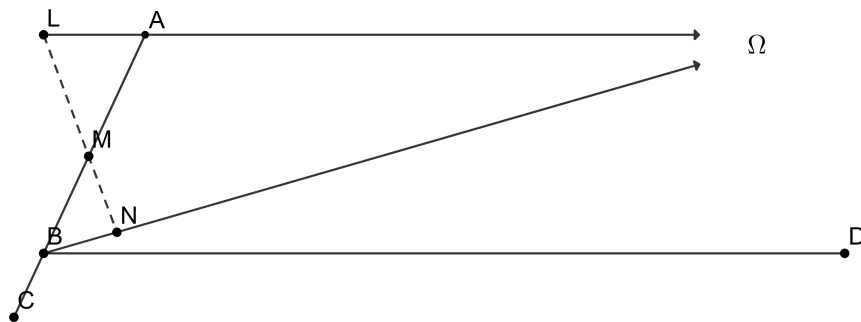
Dem.: Se a reta intercepta AQ ou BQ , o resultado se segue do paralelismo e do axioma de Pasch. Se ela intercepta $\overline{AB}$ em um ponto R , o leitor deve traçar RQ , reduzindo a prova ao teorema anterior.

■

O teorema do ângulo externo possui também uma versão aplicada a triângulos generalizados. A seguir, apresenta-se sua construção e demonstração.

Teorema 4.2.1 (Teorema do Ângulo externo). *Em um triângulo generalizado ABQ , qualquer ângulo externo é sempre maior que o ângulo interno a ele não adjacente.*

Figura 12 – Teorema do ângulo externo em um triângulo generalizado: o ângulo externo é maior que o ângulo interno não adjacente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Dado o triângulo generalizado ABQ (Figura 12), seja C um ponto na semirreta S_{AB} , fora do segmento $\overline{AB}$. Temos que $\widehat{CBQ}$ é um ângulo externo do triângulo. Desejamos provar que $\widehat{CBQ} > \widehat{BAQ}$. Para isso, trace, a partir de B , um segmento $\overline{BD}$, tal que $\widehat{CBD} = \widehat{BAQ}$.

Como decorrência dos quatro primeiros postulados, a reta que passa por B e D não intercepta AQ . Consequentemente, o ponto D não pode estar na região interior ao triângulo ABQ . Se

D ficar fora do triângulo, como na figura anterior, o resultado fica demonstrado. Resta, portanto, excluir a possibilidade de que D esteja sobre $B\Omega$.

Suponha que isso ocorra. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Baixe uma perpendicular de M até um ponto $N \in B\Omega$. Na reta que passa por A e Ω , marque um ponto L de modo que $\overline{LA} = \overline{BN}$ e que L e N estejam em lados opostos em relação à reta AB . Pelo primeiro caso de congruência de triângulos (ordinários), o caso LAL,

$$\triangle LAM \equiv \triangle NBM. \quad (4.2)$$

Segue-se facilmente que L , M e N são colineares e, conseqüentemente, $\overline{LN}$ é uma perpendicular comum a $L\Omega$ e $N\Omega$. Mas isso contradiz a Proposição 4.2.4.

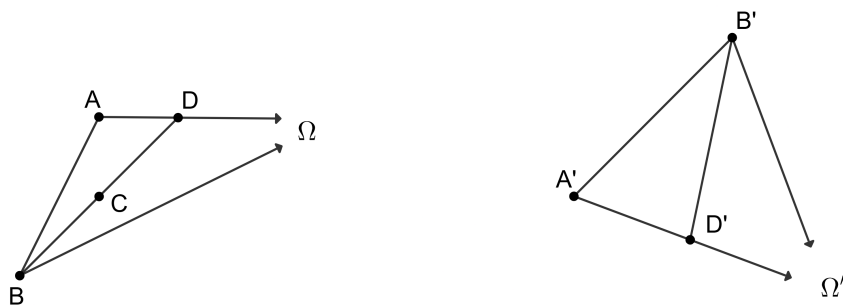
■

A congruência de triângulos é um tema amplamente abordado na educação básica. Os principais casos de congruência (LAL, ALA, LLL, AAL) encontram-se no Apêndice A, referente à Geometria Neutra.

A seguir, apresentam-se as congruências entre triângulos generalizados.

Proposição 4.2.7 (Congruência de Triângulos Ideais Lado-Ângulo (LA)). *Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\widehat{BA\Omega} = \widehat{B'A'\Omega'}$, então, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$.*

Figura 13 – Congruência lado-ângulo (LA) para triângulos ideais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Devemos mostrar que $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$ (Figura 13). Vamos supor que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\widehat{AB\Omega} > \widehat{A'B'\Omega'}$.

Tome, pois, uma semi-reta S_{BC} tal que $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'\Omega'}$. Esta semi-reta penetra no ângulo $\widehat{AB\Omega}$. Logo, pelo Teorema 7, ela corta o lado $A\Omega$ em um ponto D . Tome o ponto D' em $A'\Omega'$, de sorte que $\overline{A'D'} = \overline{AD}$. Segue-se de nossas hipóteses que $\widehat{ABD} = \widehat{A'B'D'}$.

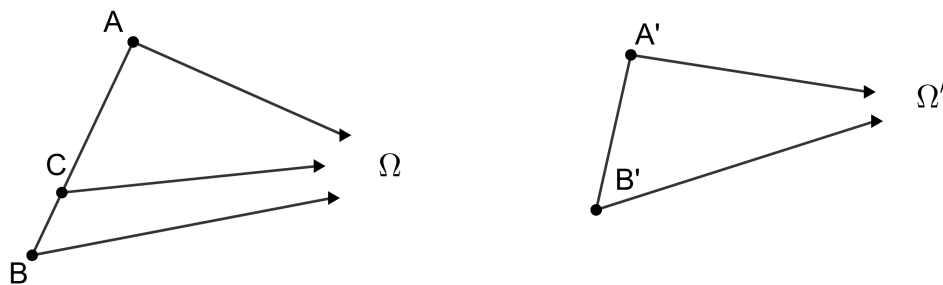
Consequentemente,

$$\widehat{A'B'D'} = \widehat{ABD} = \widehat{A'B'\Omega'}, \quad (4.3)$$

■

Proposição 4.2.8 (Congruência de Triângulos Ângulo-Ângulo(AA)). *Se $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$ e $\widehat{BA\Omega} = \widehat{B'A'\Omega'}$, então, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$.*

Figura 14 – Congruência ângulo-ângulo (AA) para triângulos ideais.



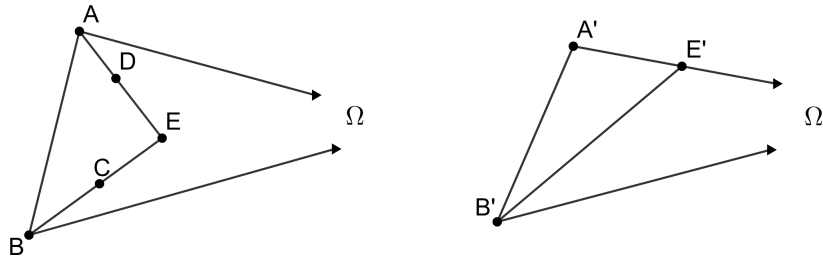
Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Devemos provar que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (Figura 14). Vamos supor que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Seja C um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC} = \overline{A'B'}$. Considere a reta $C\Omega$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos generalizados, teremos que $\widehat{AC\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$. Portanto, $\widehat{AC\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$. Como este último é, por hipótese, igual a $\widehat{AB\Omega}$, então o triângulo $CB\Omega$ possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que contradiz o Teorema 4.2.1.

■

Proposição 4.2.9 (Congruência de Triângulos Ideais Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)). *Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{B'A'\Omega'}$ e $\widehat{A'B'\Omega'} = \widehat{B'A'\Omega'}$, então, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$.*

Figura 15 – Congruência ângulo-lado-ângulo (ALA) para triângulos ideais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: É suficiente provar que $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$ (Figura 15). Vamos supor que este não seja o caso. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\widehat{AB\Omega} > \widehat{A'B'\Omega'}$. Construa, então, ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BAD}$, iguais entre si e iguais a $\widehat{A'B'\Omega'}$. Pela Proposição 4.2.5 e pelo Axioma de Pasch, concluímos que as semirretas S_{AD} e S_{BC} se interceptam em um ponto E , no interior do triângulo $AB\Omega$.

Marque, no lado $A'\Omega'$, um ponto E' tal que $\overline{A'E'} = \overline{AE}$. Segue-se que os triângulos ABE e $A'B'E'$ são congruentes. Mas, então, teremos $\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE}$. Como este último é igual a $\widehat{A'B'\Omega'}$, o ponto E' deve pertencer a $B'\Omega'$, o que é absurdo.

■

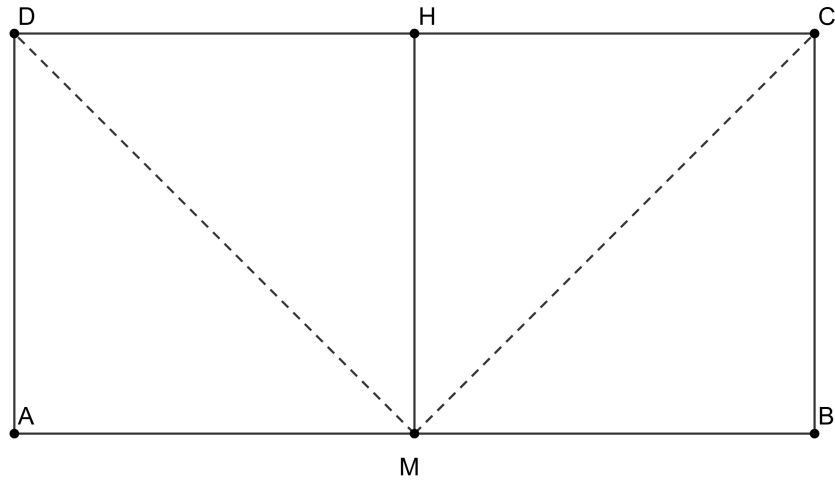
4.2.4 Quadriláteros especiais

Outro conceito importante é o de quadriláteros hiperbólicos, que surgiram das tentativas de demonstrar o quinto postulado. São eles os quadriláteros de Saccheri e os de Lambert. A seguir, apresentam-se suas características e algumas proposições.

Em um Quadrilátero de Saccheri, o lado comum aos dois ângulos retos é denominado base. O lado oposto à base é chamado de topo. Os outros dois lados recebem o nome de lados do quadrilátero. Por sua vez, os dois ângulos não retos, que se localizam no topo, são denominados ângulos não retos ou ângulos do topo.

Definição 4.2.4 (Quadrilátero de Saccheri). *Os Quadriláteros de Saccheri são definidos como os quadriláteros $ABCD$ que satisfazem $AB = CD$ e possuem ângulos retos em $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCD}$. Nessa configuração, o lado comum aos dois ângulos retos denomina-se base; o lado oposto à*

Figura 16 – Quadrilátero de Saccheri: base AB , topo DC , lados AD e BC , ângulos do topo em D e C



Fonte: Elaborado pelo autor.

base é o topo; os demais segmentos são denominados lados; os dois ângulos não retos recebem o nome de ângulos do topo.

Proposição 4.2.10. *A reta ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao topo e à base; os ângulos do topo são congruentes.*

Dem.: Seja $\overline{AB}$ a base do quadrilátero de Saccheri $DABC$ (Figura 16). Sejam M e H os pontos médios da base e do topo respectivamente. É fácil provar que $\triangle DAM \equiv \triangle CBM$, e que, em consequência, $\widehat{DMH} = \widehat{CMH}$. Segue-se daí que MH é perpendicular a $\overline{DC}$ e, somando ângulos em M , que MH é também perpendicular a $\overline{AB}$. Somando ângulos em D e C , obtemos a igualdade dos ângulos do topo.

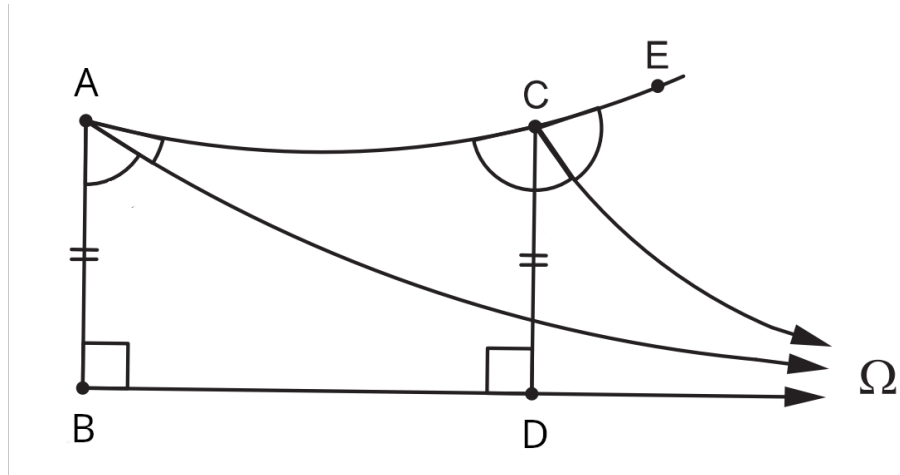
■

Corolário 4.2.1. *As retas que contêm a base e o topo de um quadrilátero de Saccheri não se interceptam.*

A demonstração deste corolário é uma aplicação direta da definição de quadrilátero de Saccheri e do Teorema do Ângulo Externo, sendo válida em toda Geometria Neutra.

Proposição 4.2.11. *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.*

Figura 17 – Demonstração de que os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos usando pontos ideais.



Fonte: Arcari (2008, p.69) adaptado.

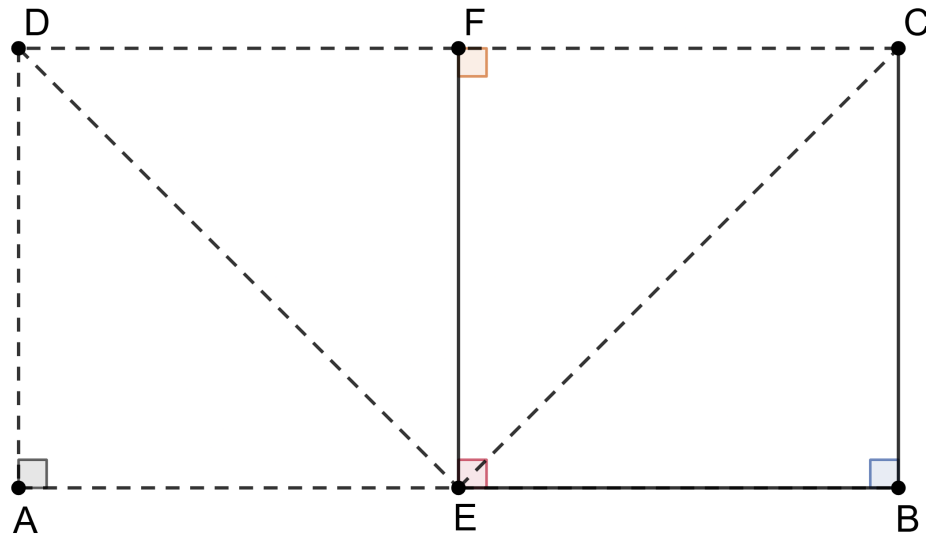
Dem.: Usaremos as mesmas letras da Figura 17. Seja Ω um dos pontos ideais da reta que passa por A e B . Sem perda de generalidade, podemos supor que $B \in A\Omega$. Considere, então, as semirretas $D\Omega$ e $C\Omega$. Seja E um ponto tal que $C \in \overline{DE}$.

Devido ao corolário (4.2.1), sabemos que $D\Omega$ está contida no ângulo $\widehat{ADE}$, e que $C\Omega$ está contida no ângulo $\widehat{BCE}$. Tem-se que $\widehat{AD\Omega} = \widehat{BC\Omega}$, por serem ângulos de paralelismo correspondentes a segmentos congruentes. Além disto, no triângulo generalizado $CD\Omega$, o ângulo externo $\widehat{EC\Omega}$ é maior do que o ângulo interno não adjacente $\widehat{CD\Omega}$. Portanto, $\widehat{BCE} > \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. Por conseguinte, $\widehat{BCD}$ é agudo.

■

Definição 4.2.5 (Quadrilátero de Lambert). *Um quadrilátero $ABCD$ com três ângulos retos é chamado de quadrilátero de Lambert.*

Proposição 4.2.12. *O ângulo de um quadrilátero de Lambert é sempre agudo.*

Figura 18 – Quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice C 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Seja $ABCD$ um quadrilátero de Lambert com $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Na semirreta S_{BA} , marque o ponto E tal que $\overline{EA} = \overline{AB}$. Em sua extremidade, trace o segmento $\overline{FE}$ perpendicular a $\overline{AB}$ e congruente a $\overline{BC}$. Trace $\overline{FA}$, $\overline{FD}$ e $\overline{AC}$. É imediato verificar que

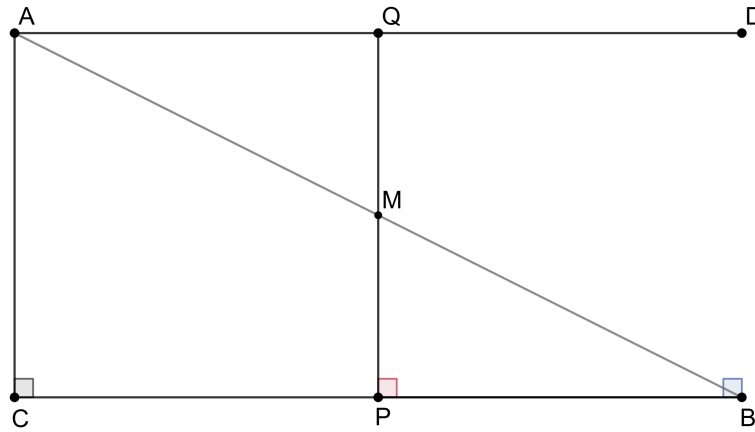
$$\triangle FEA \equiv \triangle CBA. \quad (4.4)$$

Como consequência, obtém-se a congruência dos triângulos FAD e CAD . Portanto, o ângulo $\widehat{ADF}$ é reto e, então, os pontos F , D e C são colineares. Por construção, $FEBC$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o ângulo $\widehat{BCD}$ é agudo.

■

Tendo em vista o que foi exposto quanto aos quadriláteros, é importante destacar que estes agora proporcionam a esta teoria a possibilidade de analisar a relação entre quatro retas hiperbólicas. Essa possibilidade permite o desenvolvimento de novos conceitos, assim como também constitui objeto fundamental para demonstrações que surgirão ao longo do presente TCC.

Figura 19 – Construção para provar que a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo hiperbólico é menor que 90° .



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.5 A soma dos ângulos de um triângulo

Note que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um dos tópicos clássicos da Geometria Euclidiana, mas que na geometria hiperbólica assume outra forma, como foi destacado na Introdução Histórica deste TCC. Essa forma estabelece que a soma desses ângulos é menor do que dois ângulos retos, como veremos a seguir com mais rigor.

Proposição 4.2.13. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Dem.: Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C (Figura 19). Sabemos, com base nos quatro primeiros postulados, que a soma de quaisquer dois ângulos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Assim, os outros dois ângulos do triângulo dado são agudos.

Trace o segmento $\overline{AD}$ de sorte que $\widehat{AB} \equiv \widehat{ABC}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Baixe perpendicular $\overline{MP}$ ao lado $\overline{BC}$. Na semirreta S_{AD} , marque um ponto Q tal que $\overline{AQ} \equiv \overline{PB}$. Temos, então,

$$\triangle AQM \equiv \triangle BPM. \quad (4.5)$$

Consequentemente, $\widehat{MQA}$ é um ângulo reto e P , M e Q são colineares. Portanto, $ACPQ$ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice A . Logo, a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo $\triangle ABC$, que é exatamente igual ao ângulo $\widehat{CAD}$, é menor do que um ângulo reto, daí o resultado.

■

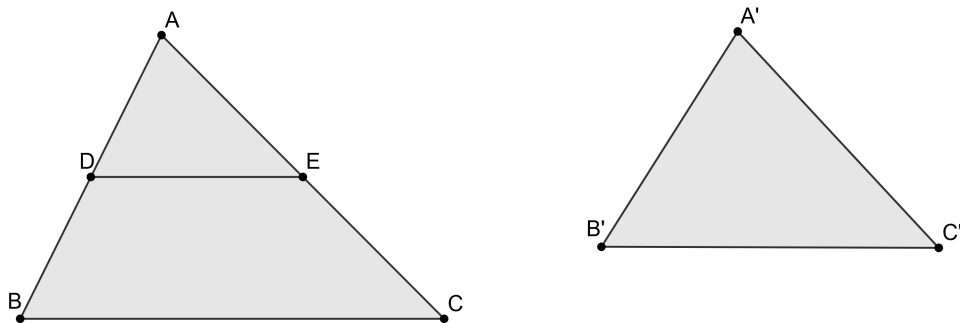
Corolário 4.2.2. *A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.*

Dem.: Até aqui, dois quadriláteros foram considerados: Saccheri e Lambert. Por definição, um quadrilátero de Saccheri tem dois ângulos retos e os outros dois menores que um ângulo reto; um quadrilátero de Lambert tem um ângulo agudo. Logo, a soma dos ângulos internos desses quadriláteros é menor que dois ângulos retos, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 4.2.14. *Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.*

Figura 20 – Quadrilátero $BDEC$ usado na demonstração da congruência de triângulos com ângulos respectivamente iguais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos (Figura 20) tais que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Suponha que os lados correspondentes não sejam iguais. Por exemplo, suponha que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Na semirreta S_{AC} , marque um ponto E tal que $\overline{AE} = \overline{A'C'}$. Então $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$. Admita por um instante que $\overline{AE} < \overline{AC}$. Então $BDEC$ é um

quadrilátero cuja soma dos ângulos internos é exatamente quatro ângulos retos, contradizendo o corolário 4.2.2

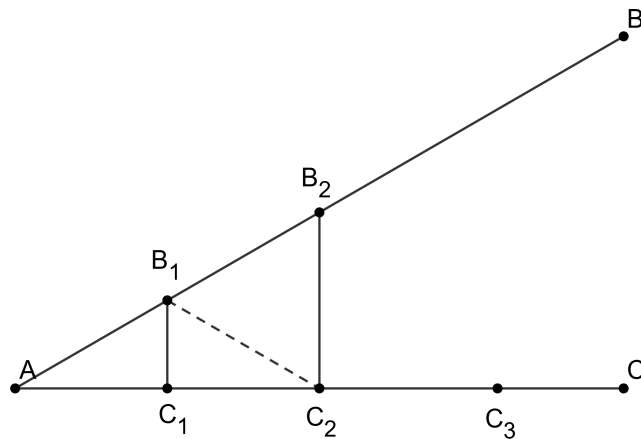
Para provar que $\overline{AE} < \overline{AC}$, consideremos os dois outros casos possíveis. Se $\overline{AE} = \overline{AC}$, então E coincide com C . Como $\widehat{BCA} = \widehat{DEA}$, D teria de coincidir com B , o que seria uma contradição. Se $\overline{AE} > \overline{AC}$, obtém-se um triângulo com um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente.

■

Proposição 4.2.15. *A função ângulo de paralelismo Θ está definida para qualquer número real não negativo sobre o intervalo $(0, 90]$.*

Dem.: Vamos mostrar que, dado qualquer ângulo agudo α , existe um número não negativo h tal que $\Theta(h) = \alpha$. Construa um ângulo $\widehat{BAC}$ cuja medida seja α . Afirmamos que existe uma reta l perpendicular a S_{AC} e que não intercepta S_{AB} . Vamos supor que isso não ocorra, ou seja, que todas as retas perpendiculares a S_{AC} também cortam S_{AB} , e mostrar que isto leva a um absurdo. Para isso, marque um ponto qualquer C_1 em S_{AC} (Figura 21).

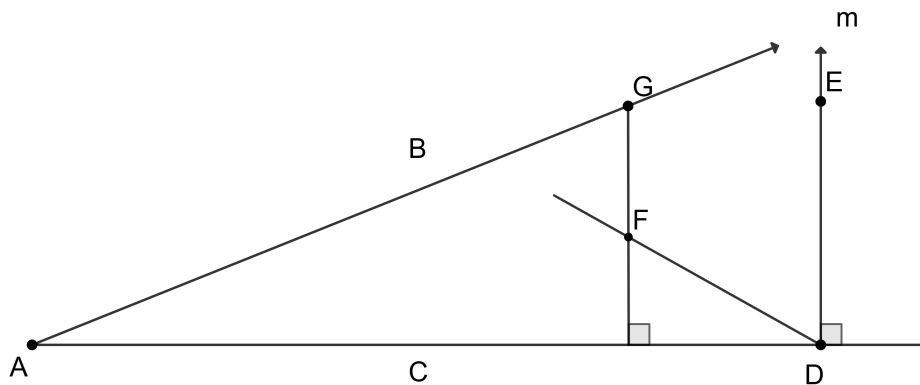
Figura 21 – Construção para demonstrar que a função ângulo de paralelismo θ é sobrejetora no intervalo $(0, 90^\circ]$ - primeira parte.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja B_1 o ponto em que a perpendicular a S_{AC} (passando por C_1) corta S_{AB} . Sabemos que a soma dos ângulos do triângulo AB_1C_1 é $180^\circ - \varepsilon$. Marque agora um ponto C_2 em S_{AC} , fora de $\overline{AC_1}$, tal que $\overline{AC_2} = \overline{AC_1}$, e considere o ponto B_2 onde a perpendicular a S_{AC} (passando por C_2)

Figura 22 – Construção para demonstrar a sobrejetividade da função ângulo de paralelismo - segunda parte: reta m paralela.



Fonte: Elaborado pelo autor.

corta S_{AB} . Observe que os triângulos AB_1C_1 e $C_2B_1C_1$ são congruentes. Segue-se que a soma dos ângulos do triângulo AB_2C_2 é menor do que $180^\circ - 2\varepsilon$. Repetindo-se indutivamente este argumento, chegamos a triângulos com soma dos ângulos $180^\circ - n\varepsilon$. Tomando n suficientemente grande, obtém-se um triângulo cuja soma dos ângulos é negativa, o que é um absurdo. Isto conclui a prova de nossa afirmação.

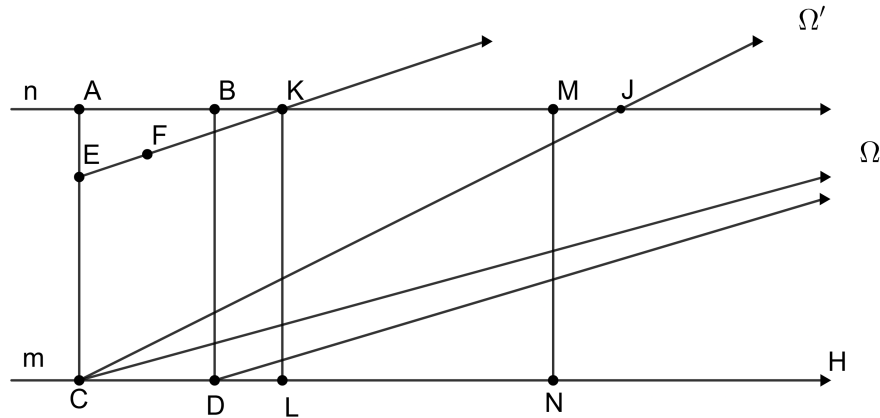
O conjunto de todas as retas perpendiculares a S_{AC} pode ser separado em dois subconjuntos: o das que interceptam S_{AB} e o das que não interceptam. Existe exatamente uma reta m que separa estes dois subconjuntos. É fácil ver que m não intercepta S_{AB} . Vamos mostrar que m é paralela a S_{AB} .

Seja D o ponto onde m corta S_{AC} e E um ponto de m como na Figura 22. Considere uma semirreta qualquer S_{DF} que divida o ângulo $\widehat{ADE}$. Afirmamos que S_{DF} corta S_{AB} . Se $\overrightarrow{DF}$ já não intercepta S_{AB} , então F pertence a uma das retas perpendiculares a S_{AC} que intercepta S_{AB} . A afirmação é agora consequência do Axioma de Pasch.

Mas, se qualquer semirreta que divide o ângulo $\widehat{ADE}$ intercepta S_{AB} , então $\overrightarrow{DE}$ é paralela a S_{AB} . Portanto, o comprimento h do segmento $\overline{AD}$ tem α como ângulo de paralelismo.



Figura 23 – Existência e unicidade da perpendicular comum a duas retas hiperbólicas que não se interceptam.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A função ângulo de paralelismo surge novamente no capítulo de trigonometria hiperbólica, sendo aplicada como um conceito-chave para o desenvolvimento da teoria, mais especificamente no desenvolvimento da distância entre horocírculos, bem como no desenvolvimento da tangente hiperbólica, conceitos fundamentais para o presente TCC.

4.2.6 Pontos ultra ideais

Se duas retas possuem uma perpendicular comum, então elas não se interceptam. A afirmação recíproca também é verdadeira e constitui um dos principais conceitos da Geometria Hiperbólica.

Proposição 4.2.16. *Duas retas que não se interceptam têm uma e somente uma perpendicular comum.*

Dem.: (Existência). Sejam m e n um par de retas que não se interceptem (Figura 23). Escolha dois pontos quaisquer A e B em n e trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ perpendiculares a m . Se $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, então $ACDB$ é um quadrilátero de Saccheri. Segue-se imediatamente que n e m possuem uma perpendicular comum.

Se $\overline{AC}$ não for congruente a $\overline{BD}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{AC} > \overline{BD}$. Seja Ω o ponto ideal da semirreta S_{AB} . Marque $E \in \overline{AC}$ tal que $\overline{EC} = \overline{BD}$, e marque um ponto qualquer H na semirreta S_{CD} fora do segmento $\overline{CD}$. Construa o ângulo $\widehat{CEF} = \widehat{DB\Omega}$ com o ponto F no quadrilátero $ACDB$.

Mostremos que a semirreta S_{EF} intercepta n . Para isso, considere as semirretas $C\Omega$ e $D\Omega$, que ficam respectivamente dentro dos ângulos $\widehat{ACH}$ e $\widehat{BDH}$. Como $\widehat{HD\Omega} > \widehat{HC\Omega}$ (teorema do ângulo externo), podemos traçar uma reta CJ , penetrando no ângulo $\widehat{AC\Omega}$, tal que $\widehat{HCJ} = \widehat{HD\Omega}$. Tal reta interceptará n em um ponto, que podemos, por simplicidade, supor ser J .

Usando congruência de triângulos, é fácil mostrar que os quadriláteros $EKLC$ e $BMND$ são congruentes. Consequentemente, $\overline{MN}$ é perpendicular a m e $\overline{MN} = \overline{KL}$. Portanto, $KLNM$ é um quadrilátero de Saccheri e o resultado segue.

(Unicidade) Se existissem duas retas perpendiculares às duas retas dadas, teríamos um quadrilátero com quatro ângulos retos, o que é impossível nesta geometria pelo postulado das paralelas. Isto conclui a demonstração. ■

O conceito de pontos ultra ideais consiste basicamente em associar a cada reta n um conjunto de pontos τ_m tal que m determina perpendiculares com n .

A definição precisa de ponto ultra ideal, segundo Batista (2019), é a seguinte:

Definição 4.2.6 (Pontos Ultraideais). *O ponto ultra ideal é o único ponto em comum de duas retas que não se intersectam.*

E então nesta teoria temos o seguinte conjunto de pontos:

- Pontos Ordinários
- Pontos Ideais (caso de retas paralelas)
- Pontos Ultra ideais (caso de retas que não se interceptam)

Proposição 4.2.17. *As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes (em um ponto ordinário, ideal ou ultra ideal).*

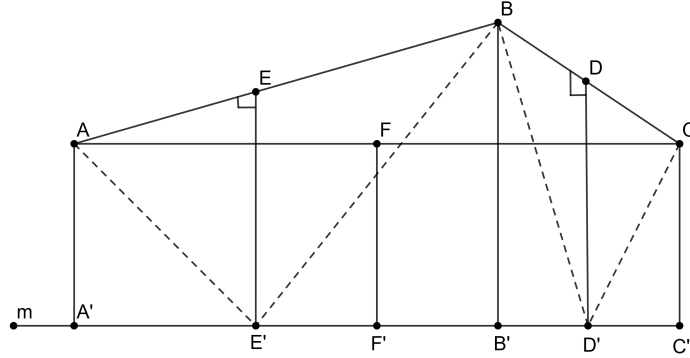
Dem.: Consideraremos os três casos possíveis.

CASO I. *Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ordinário do plano.*

Sejam m e n as mediatrizes dos lados AB e AC , respectivamente, e seja $O = m \cap n$. Como $O \in m$, temos $OA = OB$. Como $O \in n$, temos $OA = OC$. Logo, $OB = OC$, o que significa que O pertence à mediatriz de BC . Portanto, as três mediatrizes concorrem em O .

CASO II. *Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ultra-ideal Γ_m .* Neste caso, m é perpendicular comum às duas (Figura 24, e devemos mostrar que a terceira mediatriz também é perpendicular a m , o que é equivalente a mostrar que ela passa também pelo ponto Γ_m .

Figura 24 – Concorrência das mediatrizes em um ponto ordinário (circuncentro) em um triângulo hiperbólico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja ABC um triângulo e D , E e F os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Suponha que as mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ têm m como perpendicular comum. Na figura acima, estas mediatrizes são DD' e EE' , e m é a reta passando por D' e E' . Trace os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, todos perpendiculares a m . Trace também $\overline{AE'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{BD'}$ e $\overline{CD'}$. Tem-se, então

$$\widehat{AEE'} = \widehat{BEE'} \quad \text{e} \quad \widehat{BDD'} = \widehat{CDD'}.$$

Como consequência, tem-se também

$$\widehat{AA'E'} = \widehat{BB'E'} \quad \text{e} \quad \widehat{BB'D'} = \widehat{CC'D'}.$$

Segue-se que

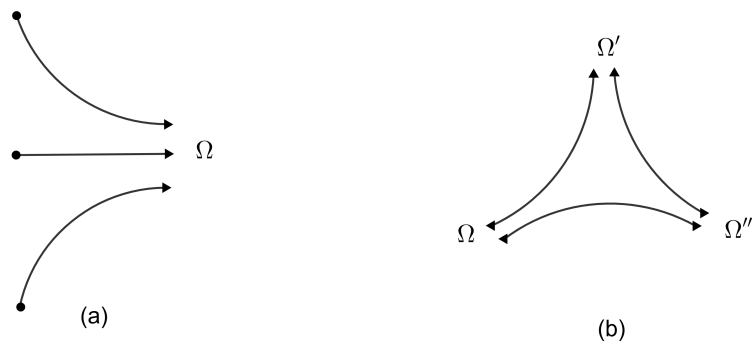
$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}.$$

Portanto, $AA'C'C$ é um quadrilátero de Saccheri. Logo, o segmento $\overline{F'F'}$ ligando os pontos médios de sua base e de seu topo é também perpendicular à base e ao topo, ou seja, é

perpendicular a $\overline{AC}$ e a m . O resultado fica assim demonstrado.

CASO III. *Duas mediatrizes se interceptam em um ponto ideal Ω .* (Figura 25) Vamos mostrar que a terceira mediatriz também passa por Ω , ou seja, que as três mediatrizes são paralelas em uma mesma direção.

Figura 25 – Concorrência das mediatrizes em um ponto ultra-ideal: perpendicular comum às mediatrizes.

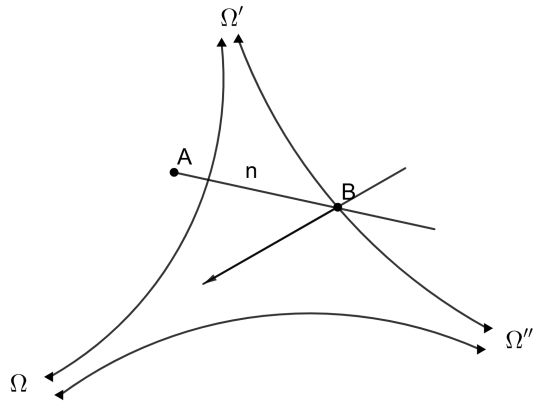


Fonte: Elaborado pelo autor.

Se a terceira mediatriz intercepta uma das duas outras, em um ponto ordinário do plano ou em um ponto ultra-ideal, então, pelos dois casos considerados, chegamos a uma contradição. Por isto, podemos concluir que a terceira mediatriz intercepta cada uma das outras duas em ponto ideal. Existem, então, duas situações possíveis, ilustradas na figura seguinte.

Vamos mostrar que a situação (b), em que as três mediatrizes formam um triângulo generalizado $\Omega'\Omega''$, não pode ocorrer. Observe que nenhuma reta pode cortar os três lados deste triângulo em pontos ordinários. De fato, se uma reta n corta Ω' em um ponto A e corta $\Omega' \cap \Omega''$ em um ponto B , traçando-se a reta $B\Omega$ vemos que n fica dentro da região limitada por dois ângulos opostos pelo vértice, enquanto a reta $\Omega\Omega''$ fica dentro do outro par. Portanto, n não pode cortar $\Omega\Omega''$ em um ponto ordinário (Figura 26).

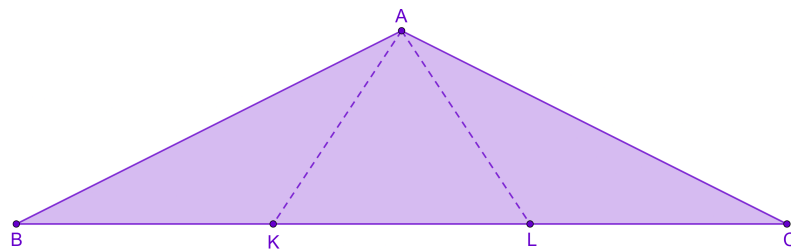
Figura 26 – Concorrência das mediatrizes em um ponto ideal (paralelas na mesma direção).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, sempre existe uma reta que corta as três mediatrizes de um triângulo em pontos ordinários! De fato, no triângulo ABC , seja $\hat{A}$ o seu maior ângulo. Sejam K' e L pontos sobre $\overline{BC}$ tais que $\overrightarrow{BK'} = \overrightarrow{ABK'}$ e $\overrightarrow{CAL} = \overrightarrow{ACL}$. Então, K' é ponto da mediatriz do lado $\overline{AB}$ e L é ponto da mediatriz do lado $\overline{AC}$. Assim, $\overline{BC}$ intercepta as três mediatrizes (Figura 27).

Figura 27 – Situação impossível: as três mediatrizes formando um triângulo generalizado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, a situação (b) é impossível. Isto demonstra o teorema.



4.2.7 Variação da distância entre duas retas

Apresenta-se ao longo desta subseção algumas formas de observar a distância entre retas na Geometria Hiperbólica. Existem três possibilidades de classificação para duas retas: as que se interceptam e as que não se interceptam (sendo estas paralelas ou ultraparalelas).

Proposição 4.2.18. *Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O . Seja P um ponto de m . A distância do ponto P à reta n cresce quando P se desloca ao longo da reta m se afastando do ponto O , tornando-se maior do que qualquer comprimento prefixado. Esta distância decresce quando P se move na direção de O tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado.*

Dem.: Sejam m e n retas concorrentes em um ponto O (Figura 28). Sejam P_1 e P_2 dois pontos de m tais que $P_1 \in \overline{OP_2}$. Sejam $\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{P_2Q_2}$ segmentos perpendiculares a n como indicados na figura seguinte.

Então, no quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, os ângulos dos vértices Q_1 e Q_2 são retos, o ângulo em P_1 é obtuso e o ângulo em P_2 é agudo. Segue-se que $\overline{P_1Q_1} < \overline{P_2Q_2}$. Isto mostra que a distância cresce quando o ponto variável sobre m se afasta do ponto O , e decresce quando ele se aproxima.

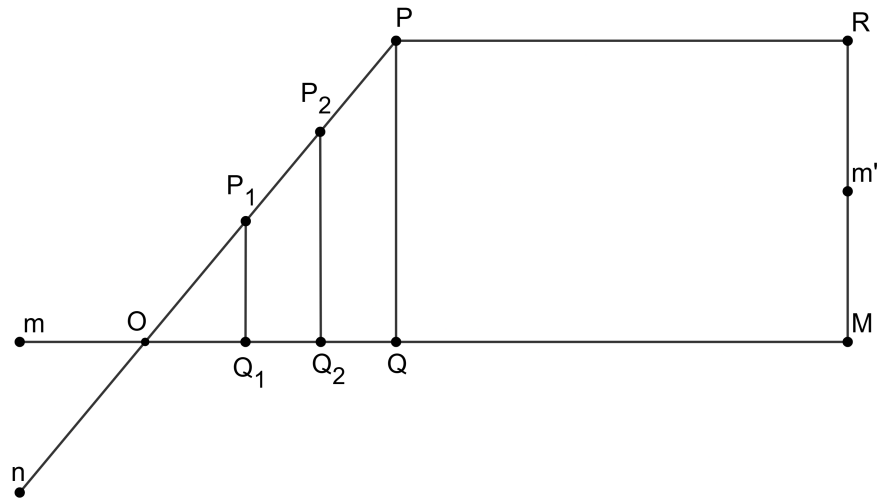
Considere o ângulo $\widehat{P_1OQ_1}$ como ângulo de paralelismo correspondente a uma distância h . Seja M um ponto de n tal que o comprimento de $\overline{OM}$ seja h . Trace por M a reta m' perpendicular a n . Então, m e m' são paralelas, ou seja, elas se interceptam em um ponto ideal Ω .

Se r é um número positivo qualquer, escolha um ponto R em $\overline{M\Omega}$ (segmento ideal) tal que o comprimento de $\overline{MR}$ seja r e trace a perpendicular a m' que passa por R . Esta reta intercepta m em um ponto P . Seja Q o pé da perpendicular baixada de P à reta n . Então, $PQMR$ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo em P . Logo, $\overline{PQ} > \overline{RM}$.

■

Proposição 4.2.19. *Sejam m e n duas retas paralelas e P um ponto de m . A distância de P à reta n decresce quando P se move na direção do paralelismo, tornando-se menor do que qualquer número positivo prefixado. A distância cresce na direção oposta ao paralelismo, tornando-se maior do que qualquer valor prefixado.*

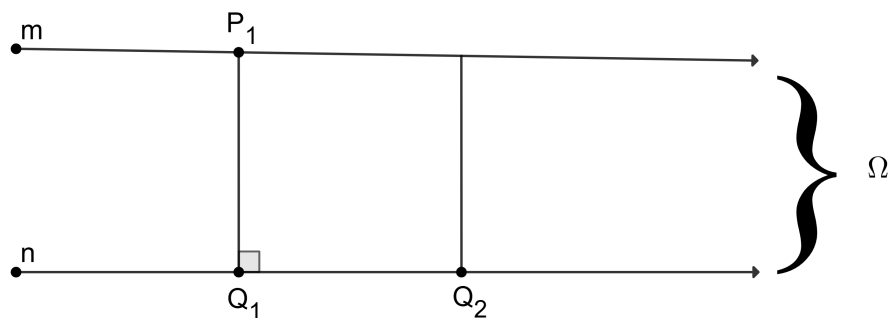
Figura 28 – Variação da distância de um ponto sobre uma reta a outra reta concorrente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Sejam m e n duas retas paralelas e seja Ω o ponto ideal onde as duas se interceptam. Sejam P_1 e P_2 dois pontos sobre m e Q_1 e Q_2 , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas destes pontos à reta n . Suponha que $P_2 \in \overline{P_1\Omega}$. Segue-se que $Q_2 \in \overline{Q_1\Omega}$ e que o quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$ (com ângulos retos nos vértices Q_1 e Q_2) tem ângulo agudo em P_1 e ângulo obtuso em P_2 . Logo, $\overline{P_1Q_1} > \overline{P_2Q_2}$.

Figura 29 – Decrescimento da distância entre retas paralelas na direção do paralelismo.

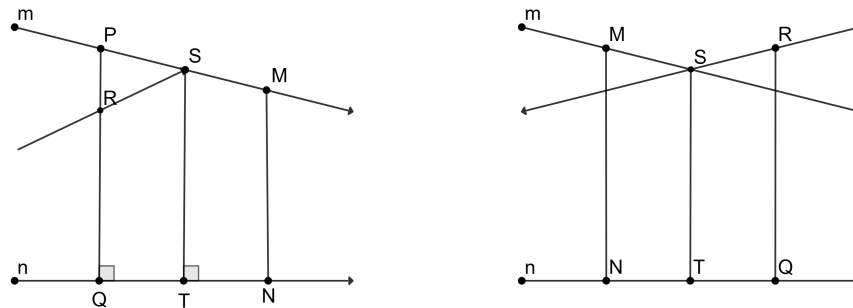


Fonte: Elaborado pelo autor.

Resta, portanto, apenas provar que a distância pode tornar-se tão grande ou tão pequena quanto se queira. Vamos de fato provar que qualquer que seja o número positivo r dado, existe um ponto R sobre m tal que a distância deste ponto à reta n é exatamente r .

Tome $P \in m$ e seja Q o pé da perpendicular baixada deste ponto à reta n . Se o comprimento de $\overline{PQ}$ é r então P é o ponto desejado. Se não for, então marque na semi-reta SQP um ponto R tal que o comprimento de $\overline{RQ}$ seja r e trace por R a reta m' paralela a n na direção oposta à do paralelismo de m e n .

Figura 30 – Construção para obter um ponto sobre uma reta paralela com distância pré-determinada à outra reta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

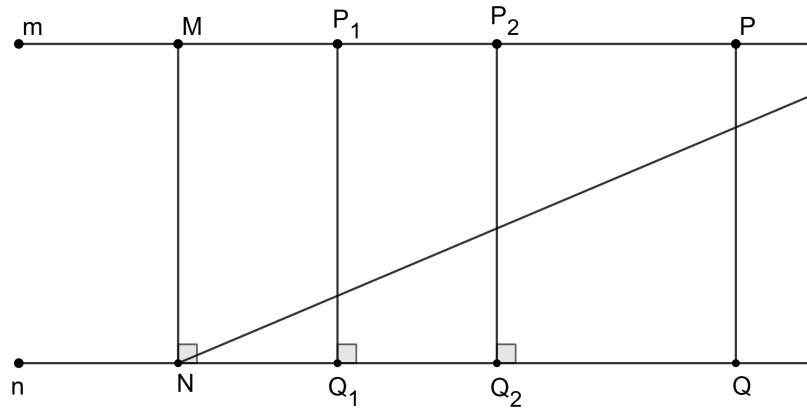
É claro que m' intercepta m em um ponto S . Seja T o pé da perpendicular baixada de S à reta n . Sobre as retas m e n , marque pontos M e N tais que $\overline{SM} = \overline{SR}$ e $\overline{TQ} = \overline{TN}$. Comparação entre os quadriláteros $STNM$ e $STQR$ permite concluir que eles são congruentes e, portanto, $\overline{MN} = \overline{RQ}$ e $\overline{MN}$ é perpendicular a n .

■

Proposição 4.2.20. *Sejam m e n duas retas que não se interceptam e P um ponto de m . Seja $\overline{MN}$ o segmento da perpendicular comum com $M \in m$ e $N \in n$. A distância de P à reta n cresce quando P se afasta do ponto M tornando-se maior do que qualquer valor prefixado, e decresce quando o ponto P se aproxima de M até tornar-se igual a $\overline{AB}$ quando $P = A$.*

Dem.: Sejam m e n retas que não se interceptam e seja $\overline{MN}$ um segmento da perpendicular comum, com $M \in m$ e $N \in n$. Sejam P_1 e P_2 dois pontos de m situados do mesmo lado relativamente ao ponto M e tais que $\overline{MP_1} < \overline{MP_2}$. Sejam Q_1 e Q_2 os pés das perpendiculares baixadas destes pontos à reta n .

Figura 31 – Variação da distância entre retas hiperparalelas (ultraparalelas) com afastamento do pé da perpendicular comum.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No quadrilátero de Lambert MNQ_1P_1 , tem-se $\overline{PQ_1} > \overline{MN}$. Exame do quadrilátero $P_1Q_1Q_2P_2$, que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo e um ângulo obtuso, permite concluir que $\overline{PQ_1} < \overline{P_2Q_2}$. Isto mostra que a distância de um ponto de m a n cresce quando o ponto se afasta do ponto M .

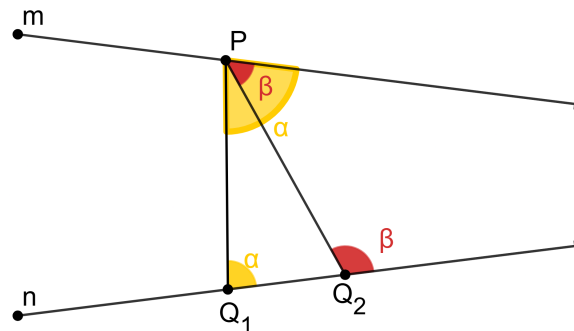
Seja Ω o ponto ideal da semi-reta S_{MP_1} . Considere a semi-reta $N\Omega$. É fácil ver que toda perpendicular baixada de um ponto de S_{MP_1} à reta n corta $N\Omega$. Segue-se daí e do Proposição 4.2.18 que o comprimento de tais perpendiculares cresce arbitrariamente.

■

4.2.8 Horocírculos e curvas equidistantes

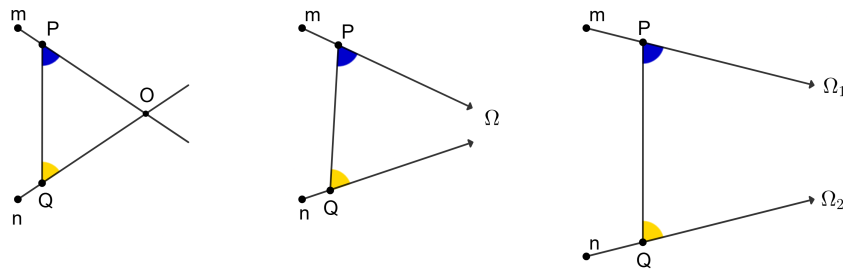
Consideremos dois pontos P e Q , pertencentes às retas m e n , respectivamente. Diremos que eles são pontos correspondentes se o segmento PQ forma com as duas retas ângulos congruentes no mesmo lado da reta que passa por P e Q . Dessa forma, dizemos que P corresponde a Q , ou que Q corresponde a P .

Figura 33 – Demonstração da unicidade do ponto correspondente a um ponto dado em uma reta paralela.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Definição de pontos correspondentes: P e Q em retas paralelas com ângulos congruentes no mesmo lado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 4.2.7 (Noções de Pontos Correspondentes). *Consideram-se dois pontos P e Q , pertencentes às retas m e n , respectivamente. Eles são chamados de pontos correspondentes se o segmento PQ forma com as duas retas ângulos congruentes no mesmo lado da reta que passa por P e Q . Assim, diz-se que P corresponde a Q , ou que Q corresponde a P .*

Proposição 4.2.21. *Dado um ponto em uma de duas retas paralelas, existe sobre a outra um e somente um ponto que lhe é correspondente.*

Dem.: (Unicidade) Sejam m e n duas retas paralelas (Figura 33). Seja P um ponto de m e suponha que existam sobre n dois pontos, Q_1 e Q_2 , que lhe sejam correspondentes. Sejam α e β os ângulos que $\overline{PQ_1}$ e $\overline{PQ_2}$, respectivamente, formam com a reta m . Estes ângulos são os mesmos que estes segmentos formam com a reta n . Se $\beta < \alpha$, então, no triângulo PQ_1Q_2 , o ângulo α será um ângulo interno e β será um externo não adjacente. Contradição! No outro caso, apenas as posições dos dois ângulos se invertem. Isto prova a unicidade.



Antes de iniciar a prova da existência, vamos dar uma definição e provar um resultado auxiliar que poderá ser útil em outras ocasiões.

Vimos que retas paralelas são de fato assintóticas e, portanto, podemos considerar que elas formam entre si um ângulo generalizado de medida zero. Vamos definir para este ângulo a noção de bissetriz. Dadas duas retas paralelas m e n , considere uma terceira reta b , paralela a estas duas na mesma direção. Seja C um ponto qualquer de b e sejam E e D os pés das perpendiculares baixadas de C às retas m e n . Se ocorrer que $\overline{CE} = \overline{CD}$ e que b seja a bissetriz do ângulo $\widehat{ECD}$, então diremos que b é a **bissetriz generalizada** do ângulo generalizado formado entre m e n .

Definição 4.2.8 (bissetriz generalizada). *Dadas duas retas m e n , considere uma terceira reta b , paralela a estas duas na mesma direção. Seja C um ponto qualquer de b e sejam E e D os pés das perpendiculares baixadas de C às retas m e n . Se ocorrer que $CE = CD$ e que b seja a bissetriz do ângulo $\widehat{ECD}$, então define-se que b é a bissetriz generalizada do ângulo generalizado formado entre m e n .*

É fácil ver que, se esta propriedade ocorre em um ponto C , então, ocorre em qualquer outro ponto da reta b . De fato, se P é outro ponto de b , é imediato verificar que $\widehat{PEC} = \widehat{PDC}$. Consequentemente, $\overline{PE} = \overline{PD}$ e $\widehat{PEC} = \widehat{PDC}$. Sejam Q e R os pés das perpendiculares baixadas de P às retas m e n , respectivamente. É consequência direta do que obtivemos que $\widehat{PEQ} = \widehat{PDR}$. Logo,

$$\overline{PQ} = \overline{PR}$$

e

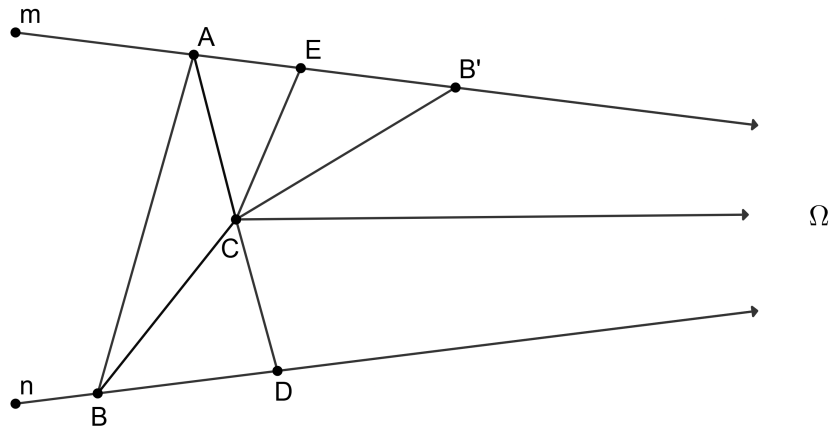
$$\widehat{QPC} = \widehat{RPC}$$

Assim, b tem a propriedade de ser o conjunto dos pontos que são equidistantes das retas m e n . Vamos, agora, provar que tais bissetrizes sempre existem. Tome um ponto A sobre m e um ponto B em n . Trace as bissetrizes dos ângulos que o segmento $\overline{AB}$ forma com estas duas retas do mesmo lado da reta que passa por A e B .

Estas duas bissetrizes se interceptam em um ponto C , o qual, afirmamos, pertence à

bissetriz generalizada b . Para construí-la é só baixar perpendiculares $\overline{CE}$ e $\overline{CD}$ às duas retas e traçar a reta bissetriz do ângulo $\widehat{ECD}$.

Figura 34 – Bissetriz generalizada b de duas retas paralelas: conjunto dos pontos equidistantes.



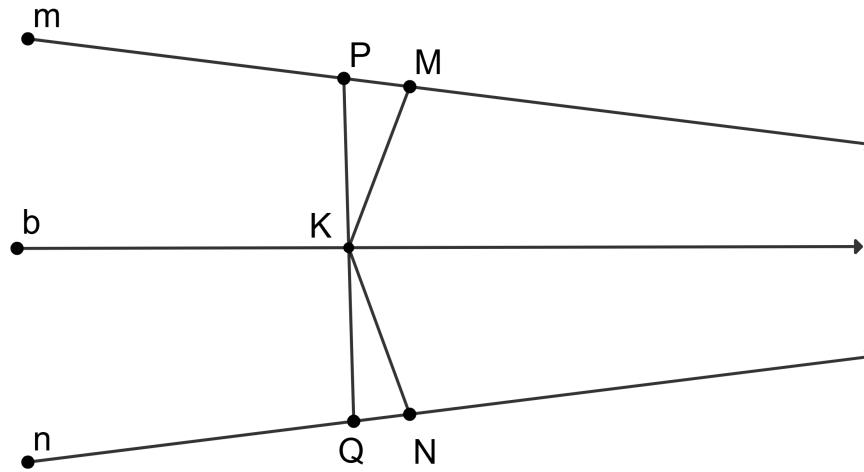
Fonte: Elaborado pelo autor.

Provaremos nossa afirmação. Seja $B' \in m$ um ponto tal que $\overline{AB'} = \overline{AB}$, escolhido como na figura acima. Os triângulos BCA e $B'CA$ são congruentes. Logo, $\overline{CB} = \overline{CB'}$ e $\widehat{CBA} = \widehat{CB'A}$. Sejam D e E os pés das perpendiculares baixadas de C às retas n e m , respectivamente. Segue-se que $\widehat{CDB} = \widehat{CEB'}$. Portanto, $\overline{CE} = \overline{CD}$. Assim, $C \in b$.

Dem.: Dando continuidade a demonstração da proposição 4.2.21 temos:

(Existência) Dadas m e n paralelas, considere a bissetriz generalizada b do ângulo que elas formam. Dado $P \in m$, seja $K' \in b$ o pé da perpendicular baixada de P àquela reta. Sejam agora M e N os pés das perpendiculares baixadas de K' às retas m e n , respectivamente.

Figura 35 – Construção da bissetriz generalizada a partir das bissetrizes dos ângulos formados por um segmento AB com as retas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em n , na direção oposta ao paralelismo, marque um ponto Q tal que $\overline{QN} = \overline{PM}$ e trace $\overline{QK'}$. É imediato que os triângulos PMK' e QNK' são congruentes. Daí decorre que os pontos P , K' e Q são colineares e que $\widehat{K'PM} = \widehat{K'QN}$. Logo P e Q são pontos correspondentes.

■

Proposição 4.2.22. *Se três pontos P , Q e R estão em três retas paralelas em um mesmo sentido, e se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, os três pontos não são colineares.*

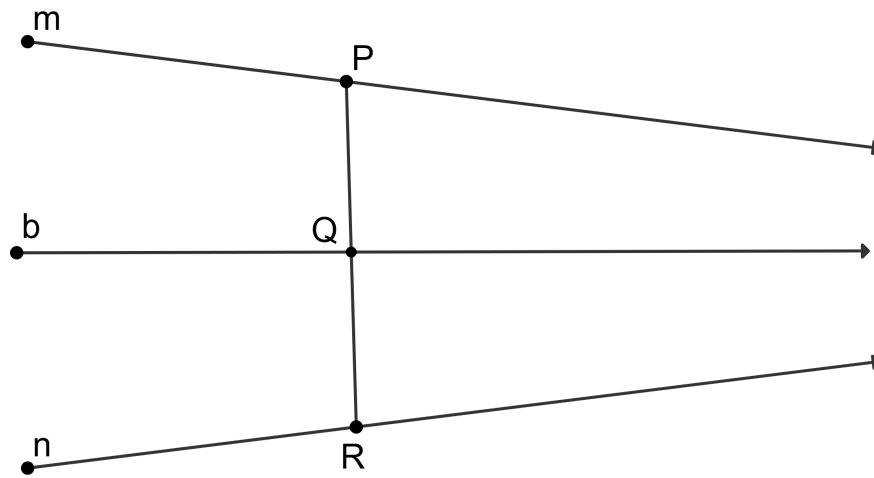
Dem.: Observe que o ângulo formado entre $\overline{PQ}$ e qualquer uma das retas é igual ao ângulo de paralelismo correspondente à metade do segmento $\overline{PQ}$ (Figura 36). Logo, é um ângulo agudo. Se os três pontos fossem colineares, teríamos a soma de dois ângulos agudos resultando em um ângulo raso. Este absurdo prova o teorema.

■

Proposição 4.2.23. *Se três pontos P , Q e R estão em três retas paralelas em um mesmo sentido, e se P corresponde a Q e Q corresponde a R , então, P corresponde a R .*

Dem.: Como os três pontos, pelo teorema anterior, são não colineares, forma-se um triângulo PQR . Vimos em capítulo anterior que as retas perpendiculares aos lados de um triângulo e

Figura 36 – Existência de ponto correspondente Q usando bissetriz generalizada b .



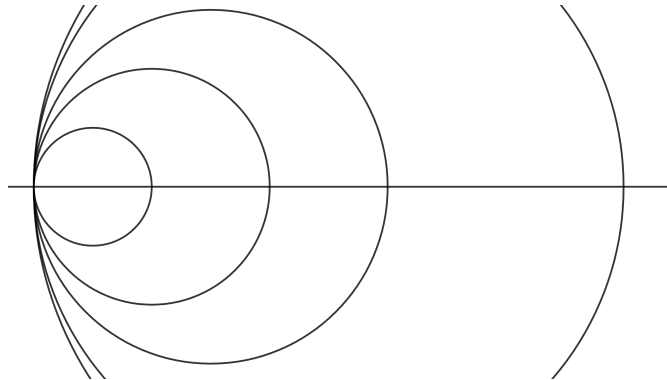
Fonte: Elaborado pelo autor.

passando pelos seus pontos médios são concorrentes em um ponto ordinário, ideal ou ultra-ideal. Duas de tais retas são exatamente as bissetrizes generalizadas dos ângulos generalizados entre $\overline{PQ}$ e $\overline{QN}$ e entre $\overline{QR}$ e $\overline{RN}$. Logo, a terceira, que é perpendicular ao lado $\overline{PR}$ passando pelo seu ponto médio, será também paralela às duas primeiras. Então, tal reta coincide com a bissetriz generalizada de PQR . Consequentemente, P e Q são correspondentes.

■

Ao se analisar a curva limite obtida de uma circunferência quando se fixa um de seus pontos e se faz o raio crescer arbitrariamente, obtém-se, na Geometria Hiperbólica, conceitos muito distintos do caso euclidiano (cujo limite é uma reta). Apresenta-se, então, o conceito de horocírculo (Figura 37).

Figura 37 – Horocírculo: curva limite de circunferências com centro tendendo ao ponto ideal.

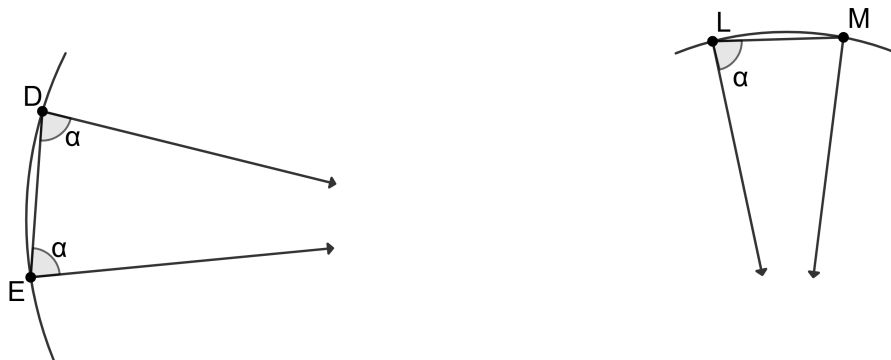


Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 4.2.9. *Seja $\mathcal{F}$ a família de todas as retas paralelas em um mesmo sentido, com um ponto ideal Ω em comum, e seja P um ponto ordinário pertencente a uma reta $r \in \mathcal{F}$. O lugar geométrico de todos os pontos Q correspondentes a P nas demais retas de $\mathcal{F}$ é denominado horocírculo de centro Ω e raio P .*

Proposição 4.2.24. *Dois horocírculos quaisquer são congruentes.*

Figura 38 – Horocírculo: curva limite de circunferências com centro tendendo ao ponto ideal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ dois horocírculos com centros nos pontos ideais Ω e Ω' , respectivamente. Sejam A e B pontos de $\mathcal{H}$ e A' um ponto de $\mathcal{H}'$. Seja α o ângulo $\widehat{BA\Omega}$. Construa um ângulo $\widehat{B'A'\Omega'} = \alpha$ com $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. O triângulo generalizado $A'B'\Omega'$ será, então, congruente ao triângulo $AB\Omega$. Portanto, $\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B'\Omega'}$ e, conseqüentemente, B' é correspondente a A' nas retas $A'\Omega'$ e $B'\Omega'$. Portanto, $B' \in \mathcal{H}'$. Isto prova a proposição.



Proposição 4.2.25. *Uma reta é tangente a um horocírculo se e só se é normal a um dos seus raios em sua extremidade.*

A demonstração da proposição a seguir segue a formulação de Arcari (2008):

Proposição 4.2.26. *Duas curvas equidistantes com a mesma distância são congruentes.*

Dem.: Considere o ponto P tal que ele seja a interseção entre o horocírculo H e a reta m tangente à H . Suponhamos que o ângulo entre $\overline{PQ}$ e m seja agudo. Seja o comprimento h , $h > 0$, tal que o ângulo de paralelismo $\Theta(h) = \alpha$ seja agudo. Considere também os pontos Q e R pertencentes à reta m tal que $\overline{PQ} = h$ e $\overline{PQ} \equiv \overline{QR}$. Logo, $\triangle PQ\Omega \equiv \triangle QR\Omega$ (pelo caso lado-ângulo de triângulos generalizados). Assim os ângulos $\widehat{PRQ}$ são congruentes, isto é, P e R são correspondentes. Logo, $R \in H$. Mas isso não é um absurdo pois contradiz a hipótese. Logo, o ângulo α é reto.

Suponha, por absurdo, que P e m são perpendiculares e m corta o horocírculo H em outro ponto Q . Deste modo, P e Q são correspondentes e $\triangle PQ\Omega$ será um triângulo generalizado com dois ângulos retos. Mas isto é uma contradição! Logo, a interseção entre H e m é apenas um ponto P e, portanto, m é tangente à H .



5 TRIGONOMETRIA

Este capítulo aborda conceitos fundamentais de horocírculos, assim como as principais funções trigonométricas hiperbólicas e sua conexão com eles. Os materiais presentes neste capítulo baseiam-se nos estudos que podem ser encontrados em (Agustini, 2022), (Barbosa, 1995b) e (Batista, 2019).

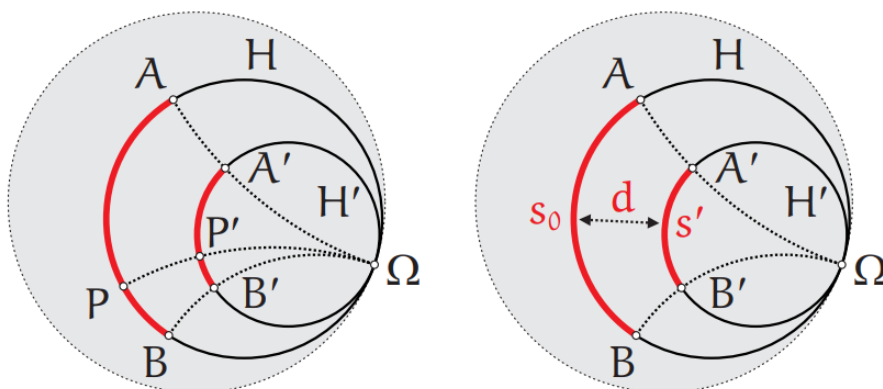
Primeiramente, cabe definir o escopo da trigonometria. Segundo (Barbosa, 1995a), a trigonometria é o estudo das relações entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo. Na Trigonometria Euclidiana, as razões trigonométricas são definidas a partir de uma circunferência de raio unitário. Já a Trigonometria Hiperbólica, como se apresenta a seguir, é construída a partir da relação de distância entre dois arcos de horocírculos correspondentes e concêntricos.

5.1 Arcos correspondentes e horocírculos Concêntricos

A partir da proposição a seguir, veremos alguns conceitos *importantes* arcos de horocírculos correspondentes e concêntricos.

Proposição 5.1.1. *Segmentos de raios de um horocírculo, delimitados entre horocírculos concêntricos, são congruentes.*

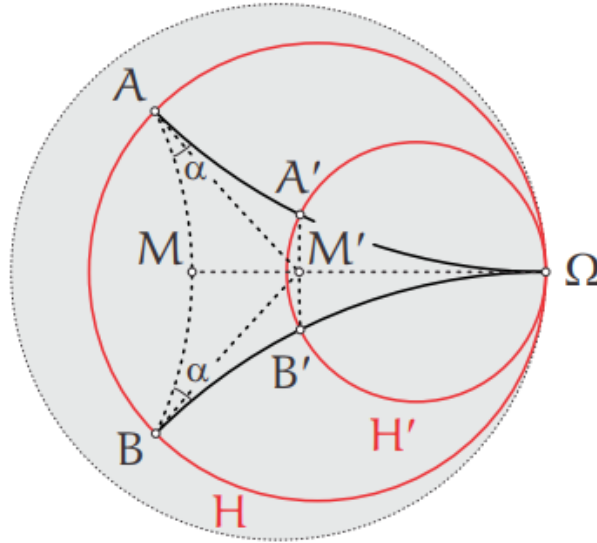
Figura 39 – Congruência de horocírculos H (centro um ponto ideal) e H' (centro outro ponto ideal): translação leva um ao outro.



Fonte: Agustini (2022, p.109).

Dem.: Sejam os horocírculos concêntricos H e H' , com centro em Ω , e os pontos $A, B \in H$. Identifiquemos os pontos A' e B' , respectivamente, como interseção dos raios $A\Omega$ e $B\Omega$ de H com H' , conforme a figura abaixo.

Figura 40 – Congruência dos segmentos AA' e BB' em horocírculos concêntricos H e H' .



Fonte: Agustini (2022, p.109).

Seja M ponto médio de $\overline{AB}$ e, sendo $\widehat{A} = \widehat{B} = \alpha$ no triângulo generalizado ABQ , pelo caso de congruência LA para triângulos generalizados (aplicado aos triângulos AMQ e BMQ) temos $\overline{MQ} \perp \overline{AB}$. Temos também $\triangle AMM' \equiv \triangle BMM'$ (caso LAL) e, portanto, $\triangle AA'M' \equiv \triangle BB'M'$ (caso LAA_0) Conclusão: $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, como queríamos.

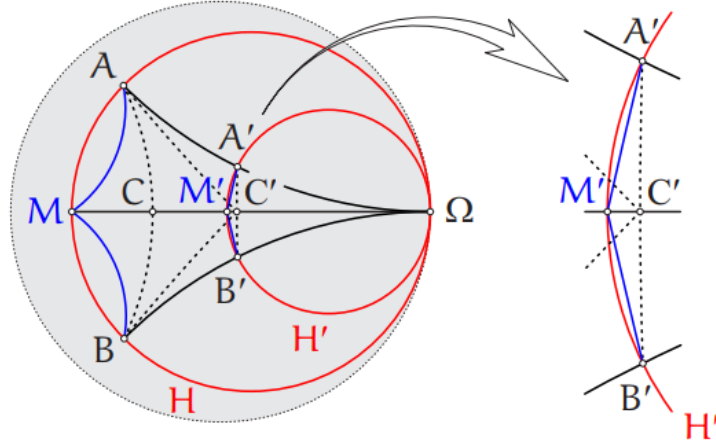
■

Proposição 5.1.2. Se M divide ao meio um arco $\widehat{AB}$ do horocírculo H , então o raio $M\Omega$ divide ao meio quaisquer arcos correspondentes a $\widehat{AB}$ em horocírculos concêntricos a H .

Dem.:

Sejam H e H' horocírculos concêntricos de centro Ω , com $A, B \in H$ distintos. Tome $A' = A\Omega \cap H'$ e $B' = B\Omega \cap H'$. Seja M o ponto médio do arco $\widehat{AB}$ em H , e M' a interseção de $M\Omega$ com o arco correspondente $\widehat{A'B'}$ em H' . Defina $C = \overline{AB} \cap M\Omega$ e $C' = \overline{A'B'} \cap M\Omega$.

Figura 41 – Raio M divide arcos correspondentes AB em H e $A'B'$ em H' se M é ponto médio do arco AB .



Fonte: Agustini (2022, p.110).

Como $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$ temos $\triangle AM\Omega \equiv \triangle BM\Omega$ (definição de arcos congruentes em horocírculos). Como $\triangle AMC \equiv \triangle BMC$ (caso LAL) temos $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AB} \perp M\Omega$. Logo, $\triangle ACC' \equiv \triangle BCC'$ (caso LAL). Assim, $\triangle AA'C' \equiv \triangle BB'C'$ (caso LAL), o que implica $\triangle A'C'\Omega \equiv \triangle B'C'\Omega$.

Conclusão:

$$\triangle A'M'C' \equiv \triangle B'M'C' \text{ (caso LAL)} \implies \triangle A'M'\Omega \equiv \triangle B'M'\Omega \implies \overline{A'M'} \equiv \overline{B'M'},$$

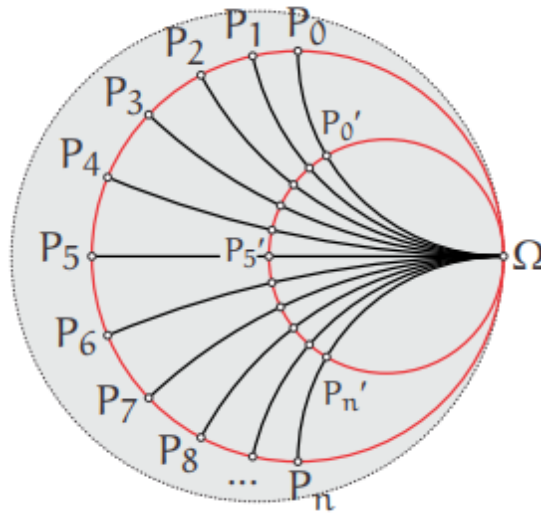
o que conclui a demonstração. ■

Corolário 5.1.1. Consideremos $\widehat{AB}$ arco do horocírculo H . Então, os pontos médios de todos os demais arcos $\widehat{A'B'}$ correspondentes a $\widehat{AB}$ em horocírculos H' concêntricos a H constituem um raio de H .

O corolário acima é consequência óbvia da proposição, pois todo ponto do raio em questão pode ser visto como interseção do raio com um arco correspondente de horocírculo.

Corolário 5.1.2. Sejam $P_0, \dots, P_n$ pontos de H que dividem $\overline{P_0P_n} \subset H$ em n partes iguais. Sejam H' horocírculo concêntrico com H e $P'_0, \dots, P'_n \in H'$ tais que $\overline{P_iP_j}$ e $\overline{P'_iP'_j}$ são correspondentes. Então, $P'_0, \dots, P'_n$ dividem $\overline{P'_0P'_n} \subset H'$ em n partes iguais.

Figura 42 – Divisão do arco P_0P_n em n partes iguais induz divisão correspondente em horocírculo concêntrico.



Fonte: Agustini (2022, p.110).

Dem.: Basta aplicar a proposição acima a P_0P_2 ; P_1P_3 ; P_2P_4 ; P_3P_5 ; $\dots$; $P_{n-2}P_n$.

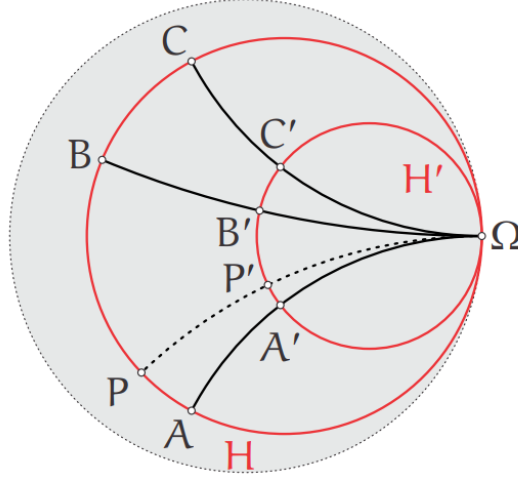
■

As proposições sobre horocírculos apresentadas até aqui demonstram propriedades de congruência entre os raios de horocírculos concêntricos. A seguir, veremos proposições que tratam de propriedades especificamente dos arcos de horocírculos concêntricos.

Proposição 5.1.3. *Sejam H e H' horocírculos concêntricos e $A, B, C \in H$. Então, os pontos $A', B', C' \in H'$ determinados pelos raios que passam por A, B e C são tais que*

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \quad (5.1)$$

Figura 43 – Proporcionalidade: a razão entre os arcos AB e AC é igual à razão entre os arcos correspondentes $A'B'$ e $A'C'$ para horocírculos concêntricos H e H' .



Fonte: Agustini (2022, p.110).

Dem.: Suponha que $B \in \widehat{AC}$ e teremos dois casos a se considerar.

1º caso: Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ são **comensuráveis**, ou seja,

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} \in \mathbb{Q}.$$

Logo, existe uma unidade de medida comum aos dois arcos. Suponhamos que $\widehat{AP}$, com $P \in \widehat{AB}$, possua o comprimento dessa unidade. Logo, $\widehat{AB} = m\widehat{AP}$ e $\widehat{AC} = n\widehat{AP}$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Consideremos o raio $P\Omega$. Ele determina $P' \in H'$. Pelo corolário acima temos $\widehat{A'B'} = m\widehat{A'P'}$ e $\widehat{A'C'} = n\widehat{A'P'}$. Logo,

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} = \frac{m}{n}.$$

2º caso: Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ não são **comensuráveis**.

Neste caso, dividamos $\widehat{AB}$ em $m \in \mathbb{N}$ partes congruentes e seja $P \in \widehat{AB}$ tal que $\widehat{AB} = m\widehat{AP}$. Desta forma, também temos a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\widehat{AP} \leq \widehat{AC} < (n+1)\widehat{AP} \quad (5.2)$$

e, como $B \in \widehat{AC}$, temos

$$\widehat{AB} \leq \widehat{AC} \implies m\widehat{AP} \leq \widehat{AC} \quad (5.3)$$

$$\implies m\widehat{AP} < (n+1)\widehat{AP} \quad (5.4)$$

$$\implies m < n+1 \quad (5.5)$$

$$\implies \frac{m}{n+1} < 1. \quad (5.6)$$

Além disso, de $m, n \in \mathbb{N}$ e $m < n+1$ temos $m \leq n$ e, portanto, $\frac{m}{n} \leq 1$.

Pelo corolário acima, $\widehat{A'B'} = m\widehat{A'P'}$ e

$$n\widehat{A'P'} \leq \widehat{A'C'} < (n+1)\widehat{A'P'} \quad (5.7)$$

Logo, de (5.2) e (5.7) temos

$$\begin{aligned} \frac{n}{m}\widehat{AB} &\leq \widehat{AC} < \frac{n+1}{m}\widehat{AB} \quad \text{e} \quad \frac{n}{m}\widehat{A'B'} \leq \widehat{A'C'} < \frac{n+1}{m}\widehat{A'B'} \\ \implies \frac{m}{n+1} &< \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} \leq \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n+1} < \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \leq \frac{m}{n} \\ \implies \frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} &< \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} \\ \implies 0 &\leq \left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \right| < \frac{m}{n(n+1)} < \frac{1}{n+1} \quad \left(\text{pois } \frac{m}{n} \leq 1 \right). \end{aligned}$$

Fazendo $\widehat{AP} \rightarrow 0$, temos $n \rightarrow +\infty$. Logo, $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, ou seja,

$$\left| \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} - \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}} \right| = 0 \implies \frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{A'C'}}$$

o que conclui a demonstração. ■

5.2 Comprimentos de arcos correspondentes e distâncias

A seguir veremos como é denotado a distância entre dois horocírculos vejamos:

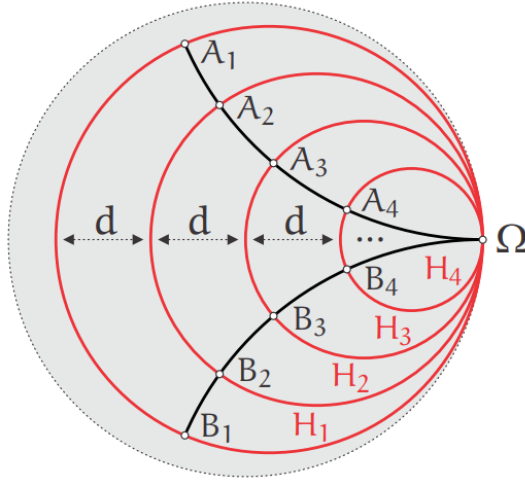
Proposição 5.2.1. *A razão entre as medidas dos arcos correspondentes $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ de horocírculos concêntricos depende somente da distância d entre eles, ou seja,*

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = f(d).$$

Como consequência, se temos uma sequência de arcos correspondentes $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de horocírculos concêntricos, como na Figura 44, então

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{A_2 B_2}{A_3 B_3} = \frac{A_3 B_3}{A_4 B_4} = \dots = f(d) > 1.$$

Figura 44 – Razão constante entre arcos $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$ para horocírculos com distância fixa d .

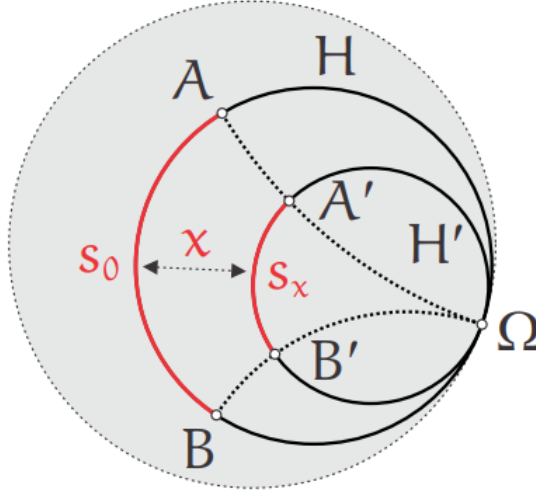


Fonte: Agustini (2022, p.112).

Proposição 5.2.2. *Se s_0 e s_x representam os comprimentos de dois arcos correspondentes em horocírculos concêntricos, sendo $s_x < s_0$ e sendo x a distância entre eles ao longo de um raio comum, então*

$$s_x = s_0 e^{-x}.$$

Figura 45 – Decaimento exponencial: comprimento s_x é igual a s_0 vezes e elevado a menos x para arcos correspondentes.



Fonte: (Agustini, 2022, p.113).

Dem.: Sobre uma semi-reta $P_0\Omega$ considere pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ tais que a distância entre dois subsequentes seja uma unidade de comprimento. Considere a família de horocírculos $h_0, h_1, h_2, h_3, \dots$ centrados em Ω e passando, respectivamente, nos pontos $P_0, P_1, P_2, \dots$. Sejam $s_0, s_1, s_2, \dots$ arcos correspondentes desta família. Veja a figura a seguir:

Utilizando a definição de unidade de comprimento e o teorema anterior, concluímos que

$$\frac{s_0}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s_n} = e.$$

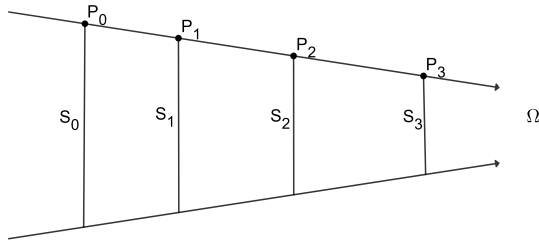
Portanto,

$$s_n = s_0 e^{-n} \quad (5.8)$$

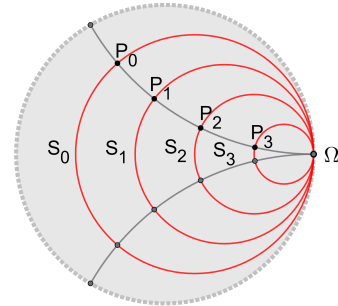
Como n é a distância do arco s_n ao arco s_0 , concluímos que o resultado é válido quando x é um inteiro. Represente agora por h_x o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto P_x de $P_0\Omega$, o qual fica a distância x do ponto P_0 . Sobre este horocírculo represente por s_x o arco correspondente a todos os outros considerados. Vamos supor, primeiramente, que x seja um número racional da forma $1/n$. Então, pelo teorema anterior, teremos

$$a = \frac{s_0}{s_{1/n}} = \frac{s_{1/n}}{s_{2/n}} = \frac{s_{2/n}}{s_{3/n}} = \dots = \frac{s_{(n-1)/n}}{s_1} = \dots,$$

Figura 46 – Discretização: pontos $P_0, P_1, P_2, \dots$ com distância unitária para provar que S_n é igual a S_0 vezes e elevado a menos n



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Agustini (2022, p.112).

onde a é um número maior do que um. Segue-se que:

- Utilizando a equação 5.8, concluímos que $s_1 = s_0 a^{-n}$.
- $a = e^{1/n}$.

É, então, imediato, desta sequência de equações, que

$$s_{m/n} = s_0 a^{-m} = s_0 e^{-m/n}.$$

Assim, o resultado vale no caso em que x é qualquer número racional. Para provar o resultado no caso em que x é irracional, é suficiente observar que a função s_x é decrescente e que, como mostramos, coincide com a função $s_0 e^{-x}$ qualquer que seja o valor racional positivo de x . Como consequência, se α é um número positivo irracional, teremos sempre que:

$$|s_\alpha - s_0 e^{-\alpha}| < s_0 (e^{-r} - e^{-t})$$

para quaisquer dois números racionais positivos r e t que satisfaçam

$$r < \alpha < t.$$

A continuidade da função e^{-x} garante agora que a diferença $s_\alpha - s_0 e^{-\alpha}$ só pode ser zero. Isto conclui a demonstração da proposição.

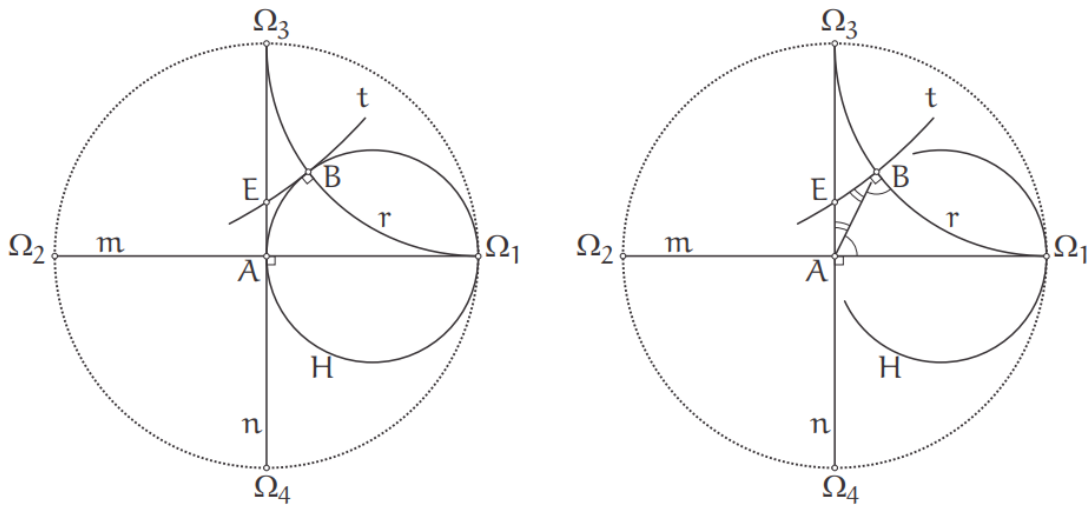


Proposição 5.2.3. *Sejam $m = \Omega_1\Omega_2$ e $n = \Omega_3\Omega_4$ retas perpendiculares em A e H horocírculo com centro em Ω_1 passando por A . Seja $r = \Omega_1\Omega_3$. Então, r intersecta H em ponto B e a reta t perpendicular a r por B é paralela a m .*

Dem.: Sejam m, n, A, H e r conforme enunciado.

Sendo r uma das retas com ponto ideal Ω_1 , pela definição de horocírculo, deve haver um ponto B de H correspondente a A em r . Tomemos t reta perpendicular a r em B (veja a Figura 47 à esquerda).

Figura 47 – Construção: reta t perpendicular a r em B é paralela a m

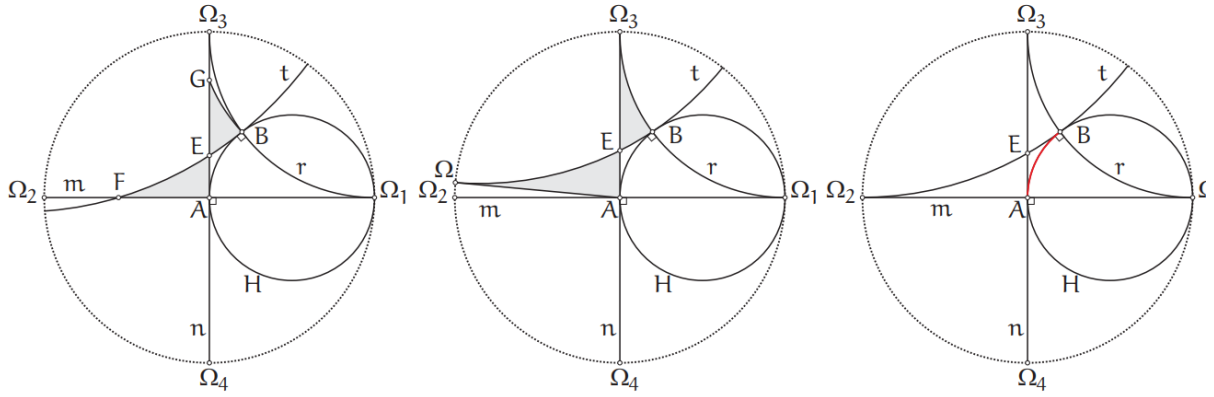


Fonte: Agustini (2022, p.114).

A reta t possui apenas o ponto B em comum com H , pois, caso contrário, se existisse $B' \in H \cap t$ com $B' \neq B$, devido à definição de horocírculo, teríamos o triângulo generalizado $BB'\Omega_1$ com dois ângulos retos, o que é impossível. Com isto, concluímos que H está totalmente contido em um dos semiplanos determinados por t .

Pelo fato da reta r ser perpendicular a t , ela possui pontos em ambos os semiplanos determinados por t . Neste caso, diremos que Ω_1 está em um desses semiplanos e Ω_3 está no outro. Sendo Ω_3 ponto ideal de n e t , e sendo $A \in n$ no mesmo semiplano no qual está Ω_1 , temos que n deve intersectar t (Axiomas de Continuidade). Chamemos essa interseção de E .

Figura 48 – Triângulo isósceles EAB e casos: t intersecta m ou é hiperparalela



Fonte: Agustini (2022, p.114).

Observemos que $\overline{EB} \equiv \overline{EA}$. De fato, devido à definição de horocírculo, o triângulo generalizado $AB\Omega_1$ é isósceles (Figura 48 à direita). Logo, os ângulos $\widehat{EBA}$ e $\widehat{EAB}$ são congruentes, ou seja, o triângulo EAB é isósceles com base $\overline{AB}$.

A reta t é paralela à reta m . De fato, se não fosse, haveria duas possibilidades:

- (1) a reta t intersecta m em um ponto F (Figura 48 à esquerda). Logo, podemos tomar $G \in n$ de tal modo que E esteja entre A e G e $\overline{EG} \equiv \overline{EF}$. Logo, pelo caso de congruência LAL, $\triangle EAF \equiv \triangle EBG$, implicando que $\widehat{GBE}$ é reto. Devido à unicidade da perpendicular à reta t por B , deveríamos ter que $G \in r$, uma contradição, pois r e n são paralelas.
- (2) a reta t é hiper-paralela a m (Figura 48 ao centro). Seja Ω ponto ideal de t de tal modo que E esteja na semirreta $B\Omega$. Logo, pelo caso de congruência LA de triângulos generalizados, $\triangle EB\Omega_3 \equiv \triangle EA\Omega$, implicando que $\widehat{EA\Omega}$ é reto. Mais uma vez, devido à unicidade da perpendicular à reta n por A , deveríamos ter que Ω seja ponto ideal de m , fazendo com que m e t sejam paralelas, contradizendo a hipótese assumida.

Logo, a reta t e a reta m devem ser paralelas, conforme figura acima à direita.

■

Proposição 5.2.4. *Sejam $m = \Omega_1\Omega_2$ e $n = \Omega_3\Omega_4$ retas perpendiculares em A , $r = \Omega_1\Omega_3$ e t reta perpendicular a r em B com ponto ideal Ω_2 . Então, existe um horocírculo com centro em Ω_1 passando por A e por B .*

Dem.: Primeiramente, devido ao fato de n dividir o plano em dois semiplanos de tal modo que

t possui pontos em ambos, os Axiomas de Continuidade garantem a existência da interseção de t com n , que chamaremos de E .

O triângulo EAB é isósceles com base $\overline{AB}$, o que garante que o triângulo generalizado $AB\Omega_1$ é isósceles, ou seja, A e B são pontos correspondentes, logo, pertencem a um mesmo horocírculo de centro Ω_1 .

■

Proposição 5.2.5. *Nas condições das proposições acima, o comprimento do arco de horocírculo $\widehat{AB}$ é unitário.*

Mais uma vez, temos a unidade de comprimento na Geometria Hiperbólica sendo concretizada com o auxílio do conceito de horocírculo. Estamos em condições de estabelecer algumas relações bastante importantes.

Proposição 5.2.6. *Na Figura 49 valem as seguintes relações:*

$$S - s = Se^{-(t+u)} \quad (5.9)$$

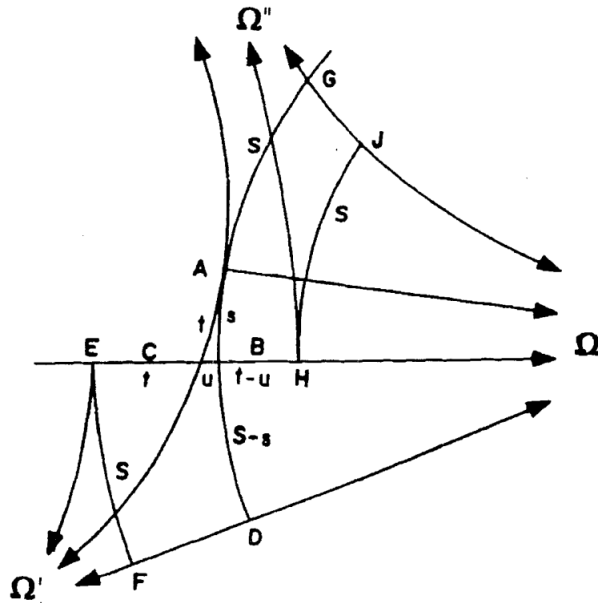
$$S + s = Se^{t-u} \quad (5.10)$$

Dem.: Na figura importante descrita, considere um ponto D do horocírculo h tal que B pertença ao arco $\widehat{AD}$, cujo comprimento seja S . Seja $\Omega' \cap \Omega$ o raio que passa pelo ponto D . Então, pela definição de S , a reta $A\Omega'$ é a reta tangente ao horocírculo passando pelo ponto A , logo, é reta que contém o segmento $\overline{AC}$. Considere, além disto, um ponto E sobre a reta que passa por C e B , escolhido de tal sorte que C pertença ao segmento $\overline{EB}$ e que o segmento $\overline{EC}$ tenha comprimento t . Trace $E\Omega'$. Comparação dos triângulos generalizados $CA\Omega$ e $CE\Omega'$ revela que eles são congruentes e, portanto, $E\Omega'$ é perpendicular a $\overline{EC}$. Consequentemente, o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto F tem $E\Omega'$ como reta tangente. Logo, o seu arco $\widehat{EF}$ entre as retas $E\Omega$ e $\Omega\Omega'$ mede S .

Segue-se do teorema anterior que os arcos correspondentes $\widehat{EF}$ e $\widehat{BD}$ têm seus comprimentos relacionados como se segue:

$$S - s = Se^{-(t+u)}.$$

Figura 49 – Relações: S menos s igual a S vezes e elevado a menos $(t$ mais $u)$ e S mais s igual a S vezes e elevado a $(t$ menos $u)$



Fonte: Barbosa (1995b, p.119).

Isto prova a primeira parte do teorema. Para demonstrar a segunda parte, inicie por considerar um ponto G sobre o horocírculo h , de sorte que A pertença ao arco $\widehat{BG}$ e o arco $\widehat{AG}$ tenha comprimento S . O raio $G\Omega$, se continuado, torna-se a reta $\Omega\Omega'$, e a reta $A\Omega'$ é tangente ao horocírculo h no ponto A . Na semi-reta $C\Omega$, marque um ponto H tal que o comprimento de $\overline{CH}$ seja t . Comparação dos triângulos generalizados $HC\Omega'$ e $AC\Omega$ revela que eles são congruentes. Logo, $H\Omega'$ é perpendicular a $\overline{CH}$. Consequentemente, o horocírculo de centro Ω passando pelo ponto H tem a reta $H\Omega'$ como reta tangente e seu arco, entre o ponto H e o ponto J situado no raio $\Omega\Omega'$, terá comprimento S . Comparação entre os arcos concêntricos $\widehat{BG}$ (de comprimento $S + s$) e $\widehat{HJ}$ (de comprimento S) que distam $t - u$ um do outro, fornece:

$$S + s = S e^{t-u}.$$

■

5.3 Relações trigonométricas

Nesta seção abordamos as principais relações trigonométricas hiperbólicas, como também apresentamos as principais diferenças com as relações trigonométricas clássicas. Além disto, fim de simplificar as expressões que virão a seguir, tomaremos como definição as seguintes relações

$$\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad (5.11)$$

$$\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad (5.12)$$

$$\tanh(y) = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}, \quad (5.13)$$

$$\operatorname{sech}(y) = \frac{1}{\cosh(y)}, \quad (5.14)$$

$$\operatorname{cosech}(y) = \frac{1}{\sinh(y)}. \quad (5.15)$$

Proposição 5.3.1. *Nas condições da proposição 5.2.6 valem as seguintes fórmulas:*

$$e^u = \cosh(y) \quad (5.16)$$

$$s = \tanh(y). \quad (5.17)$$

Dem.: Somando as duas equações da Proposição 5.2.6 temos

$$2 = e^{-y} e^{-u} + e^y e^{-u} \Rightarrow 2e^u = e^y + e^{-y} \Rightarrow e^u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow e^u = \cosh(y).$$

Subtraindo a segunda equação da primeira na Proposição 5.2.6 temos

$$2s = (e^y e^{-u} - e^{-y} e^{-u}) \Rightarrow s = \frac{1}{2} \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^u} \right) \Rightarrow s = \frac{1}{e^u} \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$$

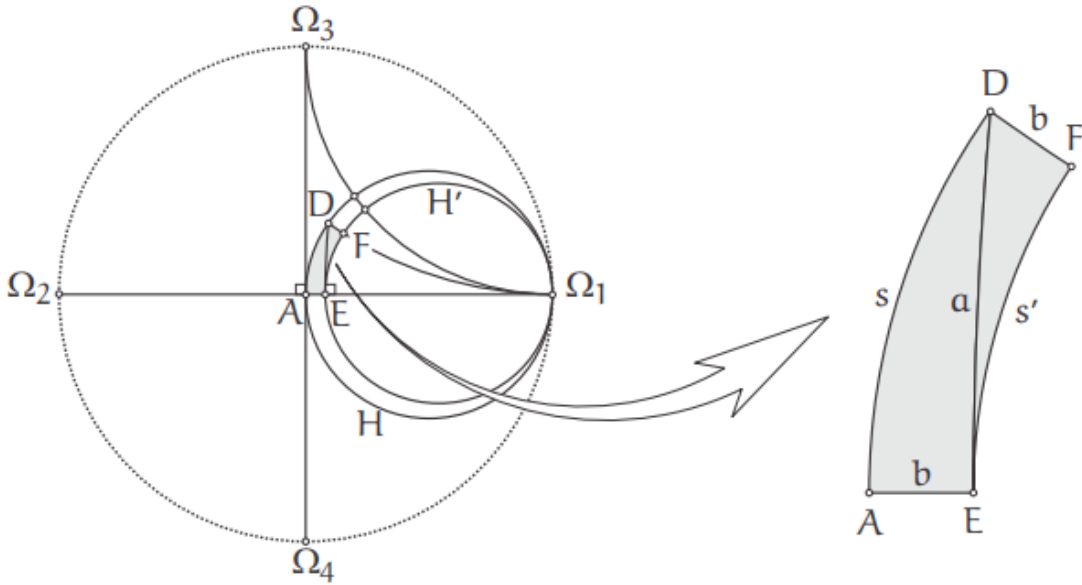
$$\Rightarrow s = \frac{1}{e^u} \sinh(y) \Rightarrow s = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} \Rightarrow s = \tanh(y),$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição 5.3.2. *Seja $D \in \widehat{AB}$, $\overline{DE}$ perpendicular a $m = \Omega_1\Omega_2$, s o comprimento do arco $\widehat{AD}$ e $\overline{DE} = a$ temos.*

$$s = \sinh(a). \quad (5.18)$$

Figura 50 – Relação $s = \sinh(a)$: arco de horocírculo igual ao seno hiperbólico da distância perpendicular.



Fonte: Agustini (2022, p.116).

Dem.: Tomemos por E um horocírculo H' de centro em Ω_1 . Seja $\{F\} = D\Omega_1 \cap H'$, conforme a Figura 50. Seja s' o comprimento do arco de horocírculo $\widehat{EF}$. Temos que $\widehat{AD}$ e $\widehat{EF}$ são arcos correspondentes em horocírculos concêntricos. Logo, $\frac{s}{s'} = e^b$. Também temos $s' = \tanh(a)$. Logo,

$$s = e^b \tanh(a).$$

Como $e^b = \cosh(a)$, temos

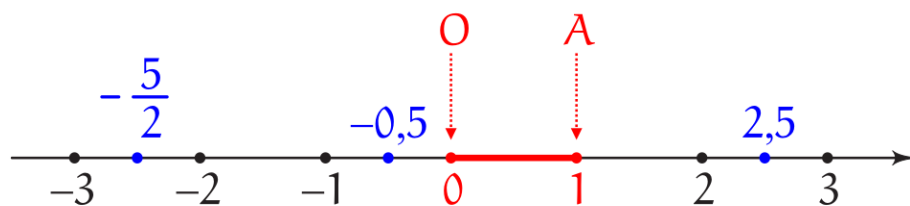
$$s = \cosh(a) \tanh(a) \implies s = \sinh(a),$$

o que conclui a demonstração. ■

5.4 Um sistema de coordenadas hiperbólicas

Assim como na reta euclidiana, podemos associar os números reais a pontos de uma reta hiperbólica. Fixamos na reta dois pontos O e A com distância hiperbólica 1, associando-lhes 0 e 1. Isso define a unidade de medida, que localiza os racionais por múltiplos e submúltiplos. Racionais positivos estão na semirreta OA ; negativos, na oposta (Figura 51).

Figura 51 – Associação dos números reais a pontos na reta hiperbólica com origem O e unidade $OA = 1$



Fonte: Agustini (2022, p.117).

Existem pontos da reta que não estão associados a números racionais. Tais pontos estão associados aos números irracionais e essa associação é feita respeitando-se a ordem dos números reais e levando-se em conta os pontos já associados aos números racionais.

Definição 5.4.1. *A reta hiperbólica associada ao conjunto dos números reais, conforme descrevemos acima, chamamos de **reta hiperbólica orientada de origem O** , ou então **reta hiperbólica real**, ou ainda, simplificada, de **eixo hiperbólico**.*

Observação 5.4.1. *Não podemos definir b como sendo a distância da projeção ortogonal P_y de P em O_y até O (isto é, definir coordenadas como na Geometria Euclidiana). Caso contrário, não haveria uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais.*

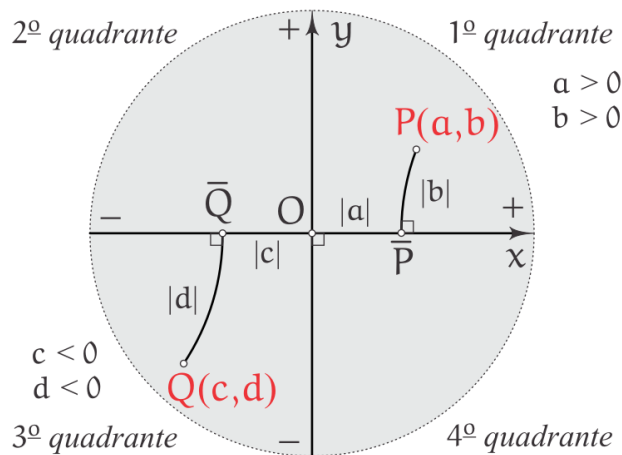
Exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\theta(a) = \frac{\pi}{4}$ (θ : função ângulo de paralelismo). Não existiria o ponto de coordenadas (a, a) .

(2) Nas condições como definimos o sistema de coordenadas na Geometria Hiperbólica, um ponto $P = (a, b)$ é tal que $d(O, P_y) < b$.

De fato, OP_xPP_y é um quadrilátero de Lambert e, portanto, $d(O, P_y) < d(P, P_x) = b$.

Chamamos x e y de **coordenadas hiperbólicas** de P , sendo x a **abscissa** e y a **ordenada** de P e escrevemos $P(x, y)$. A Figura 52 ilustra esse procedimento.

Figura 52 – Coordenadas hiperbólicas (x, y) no disco de Poincaré: abscissa e ordenada.



Fonte: Agustini (2022, p.117).

Observação 5.4.2. Observemos que, deste modo, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano hiperbólico e os pares ordenados de números reais.

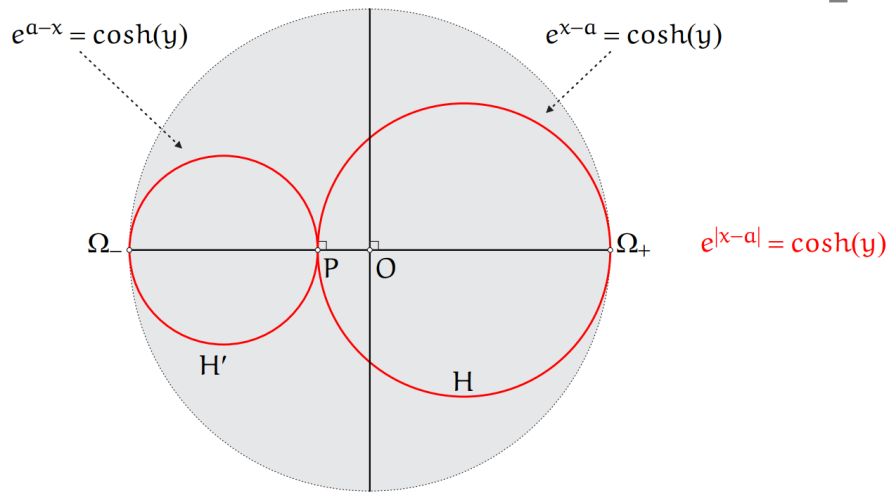
Nas condições estabelecidas acima, dizemos que os eixos coordenados hiperbólicos estabelecem um **sistema de coordenadas hiperbólicas** no plano hiperbólico.

Definição 5.4.2. Dois números positivos z e z' são chamados complementares quando os ângulos de paralelismo a eles associados são complementares, ou seja,

$$\theta(z) + \theta(z') = \frac{\pi}{2}, \quad (5.19)$$

sendo θ a função ângulo de paralelismo.

Figura 53 – Horocírculo passando por P para dedução da equação



Fonte: Agustini (2022, p.117).

Proposição 5.4.1. *Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas. A equação do **par de horocírculos tangentes** que passam por $P(a, 0)$ e possuem centros nos pontos ideais do eixo O_x é dada por*

$$e^{|x-a|} = \cosh(y). \quad (5.20)$$

Proposição 5.4.2. *Fixemos o sistema de coordenadas hiperbólicas. A equação da **astroide hiperbólica generalizada** de diagonais perpendiculares em $P(a, 0)$ e quatro vértices ideais, sendo dois deles pontos ideais do eixo O_x , é dada por*

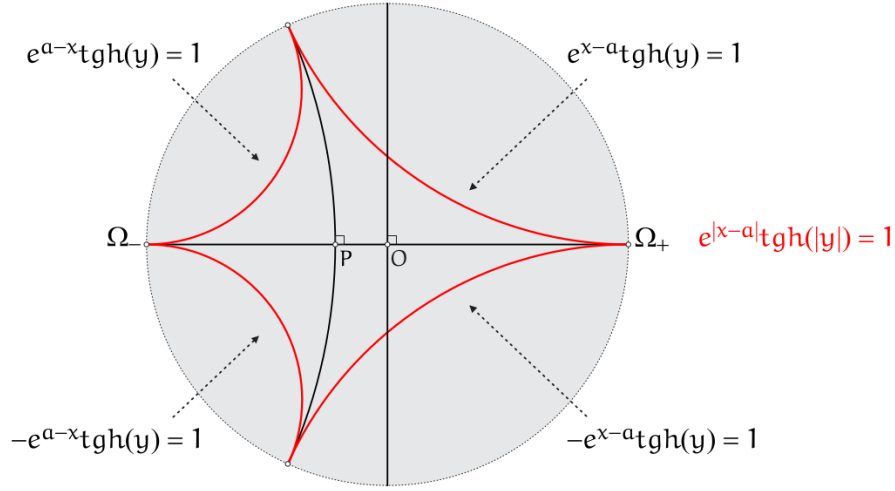
$$e^{|x-a|} \tanh(|y|) = 1. \quad (5.21)$$

Dem.: (i) Para a Proposição 5.4.1 faremos apenas a dedução da equação do horocírculos com centro em Ω_+ no caso $P(0, 0)$. Os demais casos são deixados para o leitor.

Seja H o horocírculos com centro em Ω_+ passando por $P(0, 0)$ e seja $P(x, y) \in H$. Consideremos a figura abaixo à esquerda.

Temos $OP = PA = x$. Logo, $e^x = \cosh(y)$ é a equação de H no sistema de coordenadas hiperbólicas.

(ii) Para a Proposição 5.4.2 faremos apenas a dedução da equação da reta com ponto ideal Ω_+ acima do eixo O_x no caso $P(0, 0)$, ou seja, a reta paralela aos eixos coordenados no

Figura 54 – Retas paralelas ao eixo O_x .

Fonte: Agustini (2022, p.117).

primeiro quadrante. Os demais casos são deixados para o leitor.

Seja r a reta paralela aos eixos coordenados no primeiro quadrante e seja $P(x, y) \in r$. Consideremos a figura acima à direita.

Seja H o horocírculo de centro Ω_+ passando pela origem O . Vimos que $\widehat{AO} = 1$.

Seja $A' \in H'$ tal que $A'P = 1$ (onde H' é o horocírculo com centro em Ω_+ passando por P).

Seja s o comprimento do arco $B'P$. Temos $s = \tanh(y)$.

Os arcos $\widehat{AO}$ e $\widehat{B'P}$ são correspondentes. Logo, $1 = se^x$, o que implica $e^x \tanh(y) = 1$ como equação de r no sistema de coordenadas hiperbólicas.

■

Proposição 5.4.3. Se $z \in \mathbb{R}$ são números complementares, então valem as seguintes relações:

i) $e^z \tanh\left(\frac{z'}{2}\right) = 1;$

ii) $\sinh(z) = \operatorname{cosech}(z');$

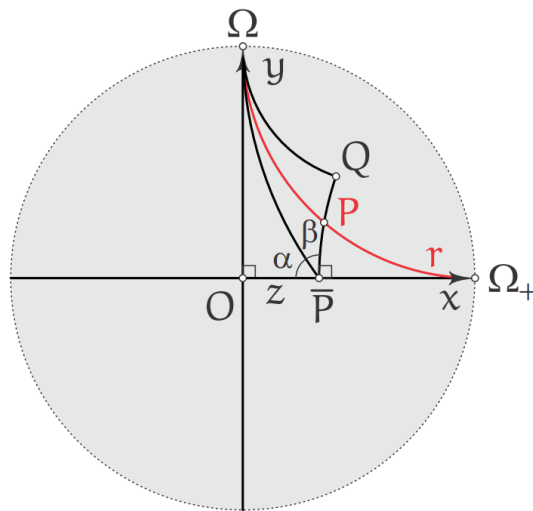
iii) $\cosh(z) = \coth(z').$

Dem.: i) Consideremos a figura abaixo, na qual $OP = z$; PP é perpendicular ao eixo coordenado O_x e $PP \equiv QP$.

Temos $PPQ_+ \equiv PQQ$ (caso LA de triângulos generalizados). Logo, Q é reto. Temos $\theta(z) = \alpha$ e $\theta(QP) = \beta$. Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, segue que $z' = QP$ é complementar de z . Mas, pela Proposição 5.4.2, a equação da reta r é $e^x \tanh(y) = 1$.

No ponto $P \in r$ temos $x = z$ e $y = PP = \frac{z'}{2}$. Logo, $e^z \tanh\left(\frac{z'}{2}\right) = 1$.

Figura 55 – Números complementares z e z' e a relação (iii).



Fonte: Agustini (2022, p.119).

Nota: para as demonstrações dos itens (ii) e (iii) necessitamos das relações

$$\begin{cases} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \\ \sinh(x) = 2 \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cosh(x) = \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

que são facilmente deduzidas a partir das definições das respectivas funções envolvidas.

ii) Temos

$$\begin{aligned}
2 \sinh(z) &= e^z - e^{-z} \\
&= \coth\left(\frac{z'}{2}\right) - \tanh\left(\frac{z'}{2}\right) \\
&= \frac{\cosh^2\left(\frac{z'}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{z'}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z'}{2}\right) \cosh\left(\frac{z'}{2}\right)} \\
\Rightarrow \sinh(z) &= \frac{1}{\sinh(z')} = \coth(z').
\end{aligned} \tag{5.22}$$

iii) Temos

$$\begin{aligned}
2 \cosh(z) &= e^z + e^{-z} \\
&= \coth\left(\frac{z}{2}\right) + \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \\
&= \frac{\cosh^2\left(\frac{z}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{z}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z}{2}\right) \cosh\left(\frac{z}{2}\right)} \\
\Rightarrow \cosh(z) &= \frac{\cosh(z')}{\sinh(z')} = \coth(z'),
\end{aligned} \tag{5.23}$$

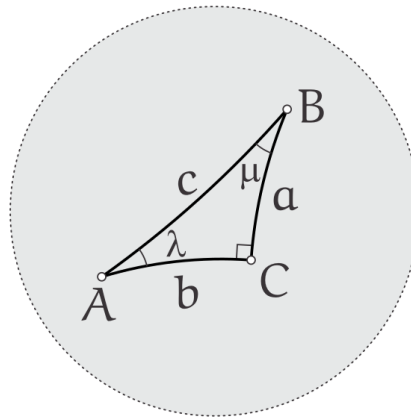
o que conclui a demonstração.

■

5.5 Lei dos senos e lei dos cossenos

Seja um triângulo retângulo ABC como na figura abaixo.

Figura 56 – Triângulo retângulo hiperbólico ABC com partes a, b, c, λ, μ .



Fonte: Agustini (2022, p.120).

Chamaremos tal triângulo de **triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ** .

Corolário 5.5.1. *Sejam r uma reta e $P \notin r$. Tracemos o segmento $\overline{PE}$ perpendicular a r com $E \in r$. Tracemos um segmento $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{PE}$ de modo que seja possível traçar a reta CD perpendicular a $\overline{PC}$ com $D \in r$. Tracemos o círculo de centro P e raio $a = ED$. Esse círculo determina dois pontos $A, A' \in CD$. Então, as retas $s = AP$ e $s' = A'P$ são paralelas a r passando por P .*

Dado um triângulo retângulo, é possível construir, ou associar, outros quatro triângulos retângulos bastante especiais utilizando o conceito de números complementares. Vamos utilizar dois desses triângulos no desenvolvimento de uma fórmula análoga ao Teorema de Pitágoras para a Geometria Hiperbólica. Esses triângulos aparecem de modo natural na demonstração da proposição que nos permite construir geometricamente uma reta paralela a uma reta dada, como no Corolário 5.5.1.

Proposição 5.5.1. *Dado um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ , existem os triângulos retângulos:*

- i) com partes $m', b, l, \gamma, \alpha'$, sendo m' o número complementar de m ;
- ii) com partes l', c', b', α', μ , sendo l', c' e b' os números complementares de l, c e b , respectivamente.

α'		a	$\alpha = \theta(a)$	$\alpha' = \pi/2 - \alpha$	$\alpha' = \theta^{-1}(\alpha')$
β'		b	$\beta = \theta(b)$	$\beta' = \pi/2 - \beta$	$\beta' = \theta^{-1}(\beta')$
c'		c	$\gamma = \theta(c)$	$\gamma' = \pi/2 - \gamma$	$c' = \theta^{-1}(\gamma')$
l'	$l = \theta^{-1}(\lambda)$	λ	$\lambda' = \pi/2 - \lambda$	$l' = \theta^{-1}(\lambda')$	
μ'	$m = \theta^{-1}(\mu)$	μ	$\mu' = \pi/2 - \mu$	$m' = \theta^{-1}(\mu')$	

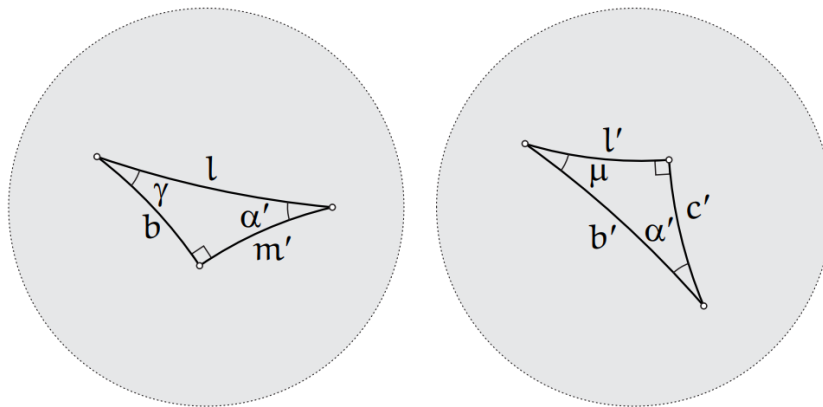
Quadro 5.1 – Tabela com os numeros complementares

θ é a função ângulo de paralelismo e, como constatado nas condições acima, m' , l' , c' e b' são números complementares de m , l , c e b , respectivamente.

A partir dos cinco números a , b , c , λ , μ das partes de um triângulo retângulo, podemos construir outros quinze números por meio da função ângulo de paralelismo e dos números complementares, que estão apresentados na tabela abaixo. Desses vinte números, extraímos quatro quádruplas, duas das quais estão citadas nos itens (i) e (ii) da Proposição 5.5.1, que formam partes de triângulos retângulos.

A figura abaixo apresenta os triângulos retângulos de partes m' , b , l , γ , α' e partes l' , c' , b' , α' , μ da Proposição 5.5.1.

Figura 57 – Triângulo retângulo hiperbólico e seus elementos.



Fonte: Agustini (2022, p.121).

Proposição 5.5.2. *Em um triângulo retângulo com partes a , b , c , λ , μ valem as relações:*

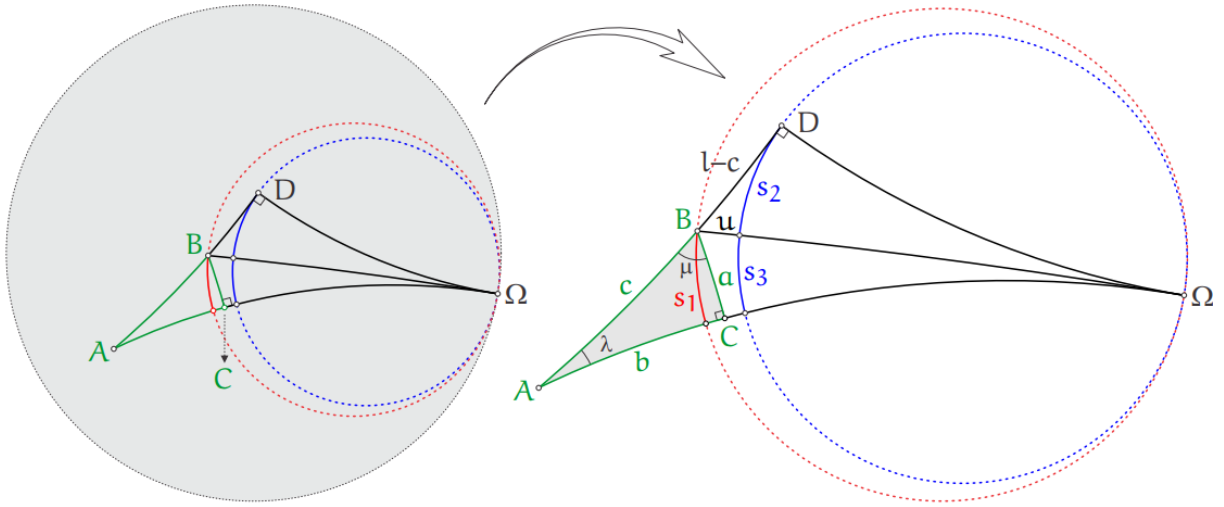
1. $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$;
2. $\cosh(l) = \sinh(c) \sinh(a')$;
3. $\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m)$;

$$4. \cosh(a') = \sinh(l) \sinh(b');$$

nas quais a' e b' são números complementares de a e b , respectivamente; l e m são tais que $\theta(l) = \lambda$ e $\theta(m) = \mu$, sendo θ a função ângulo de paralelismo.

Dem.: (1) Consideremos a figura abaixo.

Figura 58 – Construção auxiliar para deduzir $\sinh(c) = \sinh(a) * \cosh(l)$



$$\text{Temos } s_1 = \sinh(a); \frac{s_1}{s_3} = e^u = \cosh(l - c); s_2 + s_3 = \tanh(l) \text{ e } s_2 = \tanh(l - c).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sinh(a) &= s_1 = \cosh(l - c) s_3 \\ &= \cosh(l - c) ((s_2 + s_3) - s_2) \\ &= \cosh(l - c) (\tanh(l) - \tanh(l - c)) \\ &= \cosh(l - c) \tanh(l) - \sinh(l - c) \\ &= \frac{\sinh(l) \cosh(l - c) - \sinh(l - c) \cosh(l)}{\cosh(l)} \\ &= \frac{\sinh(l - (l - c))}{\cosh(l)} \\ &= \frac{\sinh(c)}{\cosh(l)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l).$$

(i) Temos $\sinh(c) = \sinh(a) \cosh(l)$ e, do Item (2) da Proposição 6.14, $\sinh(a) = \operatorname{csch}(a')$. Logo,

$$\sinh(c) = \frac{1}{\sinh(a')} \cosh(l) \implies \cosh(l) = \sinh(c) \sinh(a').$$

(ii) Ao triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ está associado o triângulo retângulo com partes $m', b, l, \gamma, \alpha'$ (Proposição 5.5.1, Item (i)). A fórmula análoga ao Item (2) para este novo triângulo retângulo é

$$\cosh(c) = \sinh(l) \sinh(m).$$

(iii) Ao triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ está associado (também) o triângulo retângulo com partes l', c', b', α', μ (Proposição 5.5.1, Item (ii)). A fórmula análoga ao Item (2) para este novo triângulo retângulo é

$$\cosh(a') = \sinh(b') \sinh(l),$$

como queríamos. ■

Proposição 5.5.3 (Teorema de Pitágoras Hiperbólico). *Em um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b vale*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b). \quad (5.24)$$

Dem.: Considere um triângulo retângulo com partes a, b, c, λ, μ e os números l, m tais que $\theta(l) = \lambda$ e $\theta(m) = \mu$, sendo θ a função ângulo de paralelismo.

Pelo Item (3) da Proposição 5.5.2 temos

$$\cosh(c) = \frac{\cosh(l) \sinh(m)}{\sinh(a')}$$

e, pelo Item (4) da mesma proposição, temos

$$\cosh(l) = \frac{\cosh(a')}{\sinh(b')} \quad \text{e} \quad \cosh(m) = \frac{\cosh(b')}{\sinh(a')}.$$

Logo,

$$\cosh(c) = \frac{\cosh(a') \cosh(b')}{\sinh(b') \sinh(a')} = \coth(a') \coth(b').$$

Mas, pelo Item (3) da Proposição 5.4.3, temos

$$\cosh(a') = \cosh(a) \quad \text{e} \quad \cosh(b') = \cosh(b).$$

Logo,

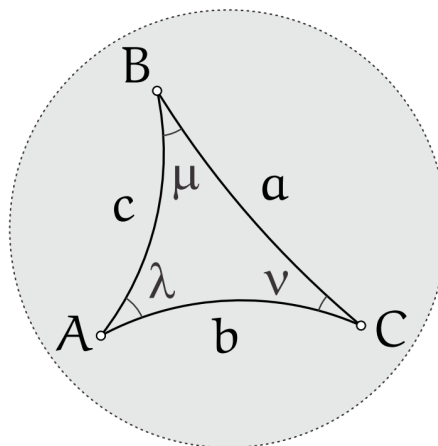
$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b),$$

o que conclui a demonstração.

■

Consideremos o triângulo ABC da figura abaixo.

Figura 59 – Triângulo ABC com função ângulo de paralelismo



A função θ é o ângulo de paralelismo.

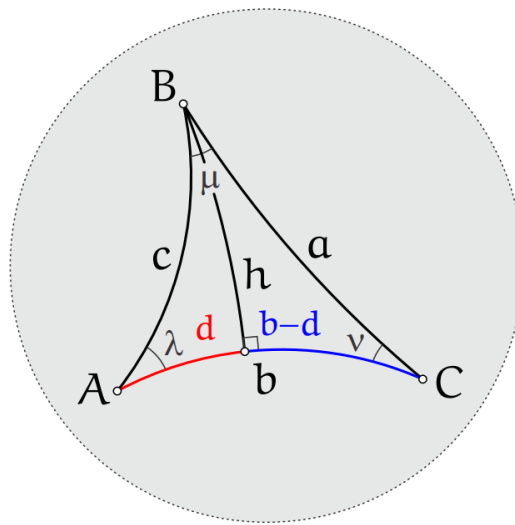
Proposição 5.5.4. Baseados na figura acima, tem-se

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)},$$

sendo $\theta(l) = \lambda$, $\theta(m) = \mu$ e $\theta(n) = \nu$.

Dem.: Supondo, sem perda de generalidade, que $b \geq a$ e $b \geq c$, seja h a altura relativa ao vértice B , como na Figura 60.

Figura 60 – Altura h relativa ao vértice B usada na dedução da Lei dos Senos Hiperbólica.



Fonte: Agustini (2022, p.123).

Pelo Item (1) da Proposição 5.5.2 temos

$$\begin{cases} \sinh(c) = \sinh(h) \cosh(l) \\ \sinh(a) = \sinh(h) \cosh(n) \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(c)} = \frac{\cosh(n)}{\cosh(l)} = \frac{\operatorname{sech}(l)}{\operatorname{sech}(n)} \Rightarrow \frac{\sinh(a)}{\operatorname{sech}(l)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)}.$$

De modo análogo,

$$\frac{\sinh(b)}{\operatorname{sech}(m)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sech}(n)},$$

o que conclui a demonstração.



Proposição 5.5.5. *Seja ABC um triângulo com lados medindo a , b e c e ângulos internos opostos medindo λ , μ e ν , respectivamente (veja Figura 60). Então:*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l),$$

sendo $\theta(l) = \lambda$.

Dem.: Consideremos a figura acima, supondo que μ seja o maior ângulo do triângulo.

Pelo **Teorema de Pitágoras Hiperbólico**:

$$\begin{cases} \cosh(a) = \cosh(h) \cosh(b-d) \\ \cosh(c) = \cosh(h) \cosh(d) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} \cosh(b-d) \\ &= \frac{\cosh(c)}{\cosh(d)} (\cosh(b) \cosh(d) - \sinh(b) \sinh(d)) \\ &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(b) \tanh(d). \end{aligned}$$

Mas,

$$\tanh(d) = \tanh(c) \tanh(l). \quad (5.25)$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\tanh(l) &\stackrel{(i)}{=} \frac{\sinh(l)}{\cosh(l)} \\
&\quad \frac{\cosh(h')}{\cosh(h)} \\
&\stackrel{(ii)}{=} \frac{\cosh(d')}{\cosh(h)} \\
&\quad \frac{\cosh(h)}{\cosh(h)} \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{\cosh(d)}{\cosh(h)} \\
&\quad \frac{\cosh(h)}{\cosh(h)}
\end{aligned}$$

- i) Item (4) (numerador) e Item (1) (denominador) da Proposição 5.5.2;
- ii) Itens (2) e (3) da Proposição 5.4.3;
- iii) *Teorema de Pitágoras Hiperbólico*.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(b) \frac{\sinh(c)}{\cosh(c)} \tanh(l) \\
&= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(l),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Com os resultados acima, estamos em condições de estabelecer uma expressão analítica para a já apresentada função ângulo de paralelismo.

Proposição 5.5.6. *Seja*

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi) \quad a \longmapsto \theta(a) = \alpha$$

a função ângulo de paralelismo. Então,

$$\theta(a) = \arccos(\tanh(a)),$$

ou seja,

$$\cos(\alpha) = \tanh(a).$$

Dem.: Sendo θ a função ângulo de paralelismo, vimos que se trata de uma bijeção contínua.

Levando-se em conta que

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\longrightarrow (-1, 1) & \text{e} & \quad \cos : (0, \pi) \longrightarrow (-1, 1) \\ x &\longmapsto \tanh(x) & & \quad x \longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$

são bijeções contínuas, podemos definir a função contínua

$$f : (0, \pi) \longrightarrow (0, \pi), \quad \alpha \longmapsto \arccos(\tanh(\theta^{-1}(\alpha))),$$

ou seja,

$$\tanh(a) = \cos(f(\alpha)).$$

Nosso objetivo é, portanto, mostrar que f é a função identidade.

Primeiramente, vamos restringir α ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o que equivale a considerar, devido à definição da função ângulo de paralelismo, $a \geq 0$.

Consideremos $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com α_1 e α_2 no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sejam a_1, a_2 tais que $\theta(a_1) = \alpha_1$ e $\theta(a_2) = \alpha_2$, e $h < \min\{a_1, a_2\}$. Logo, é possível construir dois triângulos retângulos ADB e ADC (veja a Figura ??).

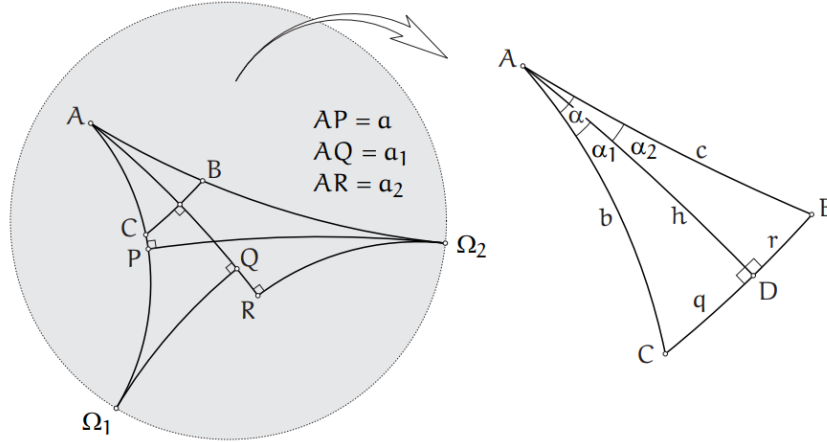
Pela Proposição 5.5.5 temos

$$\cosh(q + r) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \tanh(a).$$

Isolando $\tanh(a)$ e substituindo em $\cos(f(\alpha)) = \tanh(a)$ temos

$$\begin{aligned} \cos(f(\alpha)) &= \frac{\cosh(b) \cosh(c) - \cosh(q + r)}{\sinh(b) \sinh(c)} \implies \\ \cos(f(\alpha)) &= \coth(b) \coth(c) - \frac{\cosh(q) \cosh(r)}{\sinh(b) \sinh(c)} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Figura 61 – Triângulos retângulos ADB e ADC para demonstrar que a função ângulo de paralelismo.



Fonte: Agustini (2022, p.124).

(i) Manipulando o termo $\coth(b) \coth(c)$.

Utilizando a fórmula 5.25 nos dois triângulos retângulos ADB e ADC (Figura 61) temos

$$\tanh(h) = \tanh(b) \cdot \tanh(a_1) = \tanh(b) \cdot \cos(f(\alpha_1))$$

$$\tanh(h) = \tanh(c) \cdot \tanh(a_2) = \tanh(c) \cdot \cos(f(\alpha_2))$$

o que nos fornece

$$\coth(b) \coth(c) = \coth^2(h) \cdot \cos(f(\alpha_1)) \cdot \cos(f(\alpha_2)) \quad (5.27)$$

(ii) Manipulando o termo $\frac{\cosh(q) \cosh(r)}{\sinh(b) \sinh(c)}$:

Temos, utilizando o Teorema de Pitágoras Hiperbólico e a fórmula 5.25,

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(q)}{\sinh(b)} \cdot \frac{\cosh(r)}{\sinh(c)} &= \frac{\cosh(q) \cosh(h)}{\sinh(b) \sinh(h)} \cdot \frac{\cosh(r) \cosh(h)}{\sinh(c) \sinh(h)} \\ &= \frac{\coth(h)}{\coth(b) \sinh(h)} \cdot \frac{\coth(h)}{\coth(c) \sinh(h)} = \frac{\tanh(a_1)}{\sinh(b)} \cdot \frac{\tanh(a_2)}{\sinh(c)} \\ &= \frac{\cos(f(\alpha_1))}{\sinh(b) \sinh(c)}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\frac{\cosh(r)}{\sinh(c)} = \frac{\cos(f(\alpha_2))}{\sinh(h)}.$$

Logo,

$$\frac{\cosh(q) \cosh(r)}{\sinh(b) \sinh(c)} = \cosh^2(h) \cos(f(\alpha_1)) \cos(f(\alpha_2)) \quad (5.28)$$

(iii) Manipulando o termo $\frac{\sinh(q) \sinh(r)}{\sinh(b) \sinh(c)}.$

Tomando o quadrado dos dois membros de $\tanh(a) = \cos(f(\alpha))$ temos $\frac{\cosh^2(a) - 1}{\cosh^2(a)} = 1 - \sinh^2(f(\alpha))$, o que significa $\operatorname{sech}(a) = \sinh(f(\alpha))$. Do Item (1) da Proposição 5.5.2 temos

$$\frac{\sinh(q)}{\sinh(b)} = \frac{\sinh(q)}{\sinh(q) \cosh(a_1)} = \operatorname{sech}(a_1) = \sinh(f(\alpha_1)).$$

Analogamente

$$\frac{\sinh(r)}{\sinh(c)} = \sinh(f(\alpha_2)).$$

Logo,

$$\frac{\sinh(q) \sinh(r)}{\sinh(b) \sinh(c)} = \sinh(f(\alpha_1)) \sinh(f(\alpha_2)) \quad (5.29)$$

Substituindo 5.27, 5.28 e 5.29 em 5.26 temos

$$\cos(f(\alpha)) = (\cosh^2(h) - \sinh^2(h)) \cos(f(\alpha_1)) \cos(f(\alpha_2)) - \sinh(f(\alpha_1)) \sinh(f(\alpha_2))$$

ou seja

$$\cos(f(\alpha_1 + \alpha_2)) = \cos(f(\alpha_1) + f(\alpha_2)) \implies f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2).$$

(1) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right]$. Logo,

$$f(nx) = nf(x).$$

(2) Sejam $r = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, com n e m inteiros positivos, e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right]$. Logo,

$$mf\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = nf(x) \implies f(rx) = rf(x).$$

(3) Sejam s e x reais positivos tais que x e sx pertencem ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Seja $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números racionais convergindo para s de tal modo que $r_j x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Como f é contínua, temos

$$sf(x) = \left(\lim_{j \rightarrow +\infty} r_j\right)f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} r_j f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(r_j x) = f(sx) \implies f(sx) = sf(x).$$

Observemos que

$$\tanh(0) = \cos(f(\theta(0))) \implies 0 = \cos\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \implies f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, fazendo $\alpha = s\frac{\pi}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ temos

$$f(\alpha) = f\left(s\frac{\pi}{2}\right) = sf\left(\frac{\pi}{2}\right) = s\frac{\pi}{2} = \alpha,$$

ou seja, $f(\alpha) = \alpha$ vale no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Para $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ temos, devido à definição da Função Ângulo de Paralelismo, $a < 0$.

Logo,

$$\cos(f(\alpha)) = \cos(f(\theta(\alpha))) = \tanh(\alpha) = -\tanh(-\alpha) = -\cos(f(\theta(-\alpha)))$$

$$= -\cos(\theta(-\alpha)) = \cos(\pi - \theta(-\alpha)) = \cos(\theta(\alpha)) = \cos(\alpha),$$

ou seja, $f(\alpha) = \alpha$ vale também no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o que conclui a demonstração.

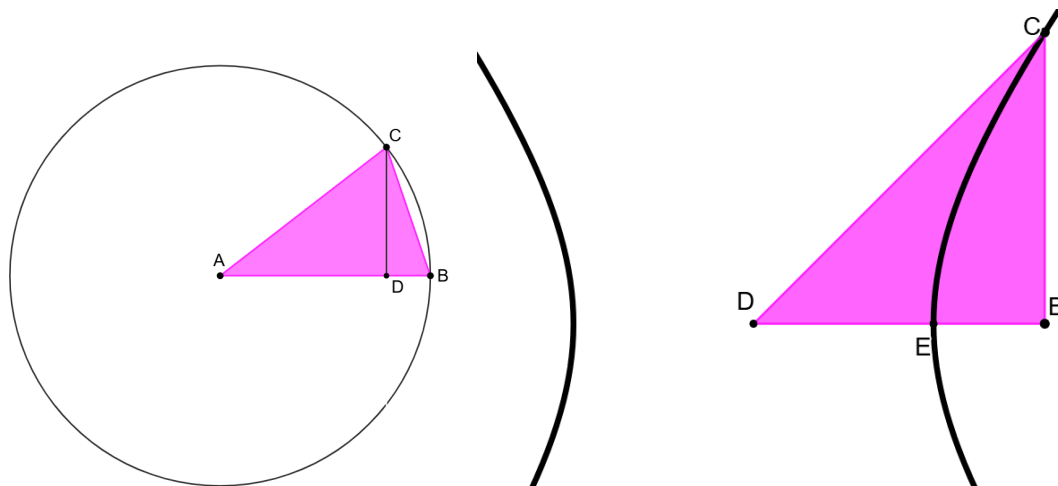
■

5.6 Comparação entre as Trigonometria Hiperbólica e Euclidiana

Nesta seção, apresentamos uma comparação entre a Trigonometria Euclidiana e a Trigonometria Hiperbólica. Como materiais de referência, tomaram-se como base as obras de Agustini (2022) e Barbosa (1995a).

Segundo Barbosa (1995a), a trigonometria surgiu nos estudos das aplicações a problemas práticos e das relações entre os lados de um triângulo. Em dado momento, iniciou-se o estudo desses triângulos a partir do círculo trigonométrico, forma de trabalhar a trigonometria que nasceu com os gregos. Neste contexto, torna-se interessante apontar que a principal diferença entre as trigonometrias hiperbólica e euclidiana está na sua própria definição. Enquanto a Trigonometria Euclidiana é construída sobre uma circunferência unitária centrada na origem $x^2 + y^2 = 1$, a Trigonometria Hiperbólica é construída sobre uma hipérbole unitária da forma $x^2 - y^2 = 1$.

Figura 62 – Triângulos retângulos ADB e ADC para demonstrar que a função ângulo de paralelismo.



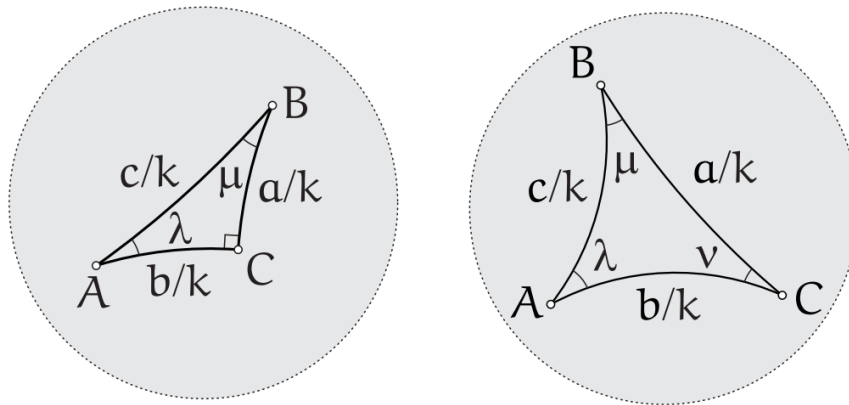
Fonte: Elaborado pelo autor .

Neste contexto, as funções seno, cosseno e tangente são definidas sobre uma das regiões mencionadas. A Trigonometria Hiperbólica é definida pelas equações da seção 5.3 5.11, 5.12 e 5.13. Assim, ao tomar e como unidade de medida, as funções trigonométricas surgem naturalmente da geometria hiperbólica.

Nos capítulos anteriores foram apresentados alguns resultados acerca do estudo de triângulos hiperbólicos. A fim de destacar com mais precisão estes resultados, tomaremos x definido

na Proposição 5.2.1 de tal modo que $x = \frac{1}{k}$, assim como também a Figura 63 como representação gráfica.

Figura 63 – Triângulo de referência para comparação das fórmulas trigonométricas.



Fonte: Agustini (2022, p.132).

Uma das construções matemáticas que mais fundamentam a construção da Trigonometria Hiperbólica são os horocírculos. Sua forma para construção de distância definida no Capítulo 5, assim como as propriedades entre os comprimentos de arcos de horocírculos, são base para a construção da Trigonometria Hiperbólica. De um modo geral, é possível dizer que os horocírculos são tão importantes para a geometria hiperbólica quanto o círculo trigonométrico é para a Geometria Euclidiana.

Desenvolveremos agora essas fórmulas a fim de compará-las com as fórmulas usuais da Trigonometria Euclidiana. De acordo com a fórmula de Taylor para $\sinh(x/k)$ e $\sin(x/k)$ em torno de zero, para n variando de zero até infinito, temos:

$$\sinh\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(n)}(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = \frac{x}{k} + \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} + \dots \quad (5.30)$$

E

$$\sin\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = \frac{x}{k} - \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} - \frac{x^7}{7!k^7} + \dots \quad (5.31)$$

Note que, pelas expansões da fórmula de Taylor, as funções seno e seno hiperbólico são semelhantes, sendo que a diferença entre elas está nos sinais: no seno, os termos alternam entre

positivo e negativo, enquanto no seno hiperbólico os termos são sempre positivos. Analogamente, temos:

$$\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} + \dots \quad (5.32)$$

E

$$\cos\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{(n)}(0) \left(\frac{x}{k}\right)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} - \frac{x^6}{6!k^6} + \dots \quad (5.33)$$

Assim, para valores muito grandes de k , podemos considerar as aproximações para seno e cosseno hiperbólicos a seguir:

$$\sinh\left(\frac{x}{k}\right) \simeq \frac{x}{k} \quad (5.34)$$

$$\cosh\left(\frac{x}{k}\right) \simeq 1 + \frac{x^2}{2k^2} \quad (5.35)$$

Note que estas aproximações 5.34 e 5.35 também podem ser comparadas com as aproximações decorrentes das funções seno e cosseno clássicas. Dessa comparação, obteríamos como principal diferença o cosseno, que assume a seguinte forma:

$$\cos\left(\frac{x}{k}\right) \simeq 1 - \frac{x^2}{2k^2} \quad (5.36)$$

5.6.1 Teorema de Pitágoras Hiperbólico

Deste modo, substituindo os valores encontrados nas equações (5.34) e (5.35) na equação a seguir e obteremos o seguinte desenvolvimento:

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \quad (5.37)$$

$$1 + \frac{c^2}{2k^2} \simeq \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) \quad (5.38)$$

$$\simeq 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2b^2}{4k^4} \quad (5.39)$$

$$c^2 \simeq a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{2k^2} \quad (5.40)$$

Donde, para valores de k muito grandes, teremos:

$$c^2 \simeq a^2 + b^2 \quad (5.41)$$

que é, aproximadamente, o teorema de Pitágoras euclidiano.

5.6.2 Lei dos Senos Hiperbólica

Podemos aplicar o mesmo desenvolvimento anterior para a lei dos senos hiperbólicos do seguinte modo:

$$\frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\sin \alpha} = \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\sin \beta} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\sin \nu} \quad (5.42)$$

$$\frac{\frac{a}{k}}{\sin \alpha} \approx \frac{\frac{b}{k}}{\sin \beta} \approx \frac{\frac{c}{k}}{\sin \nu} \quad (5.43)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} \approx \frac{b}{\sin \beta} \approx \frac{c}{\sin \nu} \quad (5.44)$$

que é, aproximadamente, a lei dos senos euclidiana.

5.6.3 Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 1

Podemos aplicar o mesmo desenvolvimento para a lei dos cossenos hiperbólicos - versão 1 do seguinte modo:

$$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos \nu \quad (5.45)$$

$$1 + \frac{c^2}{2k^2} \simeq \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right) - \frac{a}{k} \cdot \frac{b}{k} \cos \nu \quad (5.46)$$

$$= 1 + \frac{a^2}{2k^2} + \frac{b^2}{2k^2} + \frac{a^2 b^2}{4k^4} - \frac{ab}{k^2} \cos \nu \quad (5.47)$$

$$c^2 \simeq a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu + \frac{a^2 b^2}{2k^2} \quad (5.48)$$

$$c^2 \simeq a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu \quad (5.49)$$

para k grande, que é, aproximadamente, a lei dos cossenos euclidiana.

5.6.4 Lei dos Cossenos Hiperbólica - versão 2

Podemos aplicar o mesmo desenvolvimento para a lei dos cossenos hiperbólicos - versão 2 do seguinte modo:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{\cos \beta \cos \nu + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \nu} \quad (5.50)$$

$$1 + \frac{a^2}{2k^2} \approx \frac{\cos \beta \cos \nu + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \nu} \quad (5.51)$$

$$1 \approx \frac{\cos \beta \cos \nu + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \nu} \quad (5.52)$$

$$\sin \beta \sin \nu \approx \cos \beta \cos \nu + \cos \alpha \quad (5.53)$$

$$-\cos \alpha \approx \cos \beta \cos \nu + \sin \beta \sin \nu \quad (5.54)$$

$$\cos(\pi - \alpha) \approx \cos(\beta + \nu) \quad (5.55)$$

$$\pi - \alpha \approx \beta + \nu \quad (5.56)$$

$$\pi \approx \alpha + \beta + \nu \quad (5.57)$$

Com isto, note que para um valor x suficientemente pequeno (ou equivalentemente k grande), as fórmulas hiperbólicas se aproximam das euclidianas como caso limite. Equivalentemente, triângulos suficientemente pequenos em uma superfície hiperbólica comportam-se como triângulos euclidianos.

Ainda temos o seguinte quadro 5.2 que apresenta um resumo das principais características e diferenças entre as trigonometrias hiperbólica e euclidiana.

Quadro 5.2 – Comparação entre as trigonometrias euclidiana (azul), hiperbólica (vermelho) e (preto) Expansão por Série de Maclaurin

Comparação das Trigonometrias	
■ Hiperbólica	■ Euclidiana ■ Expansão por Série de Maclaurin
Teorema de Pitágoras	$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{a}{k}\right)$
	$c^2 = a^2 + b^2$
	Para $k \rightarrow \infty$: $c^2 \approx a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{2k^2}$
Lei dos Senos	$\frac{\sinh\left(\frac{a}{k}\right)}{\text{sen } \lambda} = \frac{\sinh\left(\frac{b}{k}\right)}{\text{sen } \mu} = \frac{\sinh\left(\frac{c}{k}\right)}{\text{sen } \nu}$
	$\frac{a}{\text{sen } \lambda} = \frac{b}{\text{sen } \mu} = \frac{c}{\text{sen } \nu}$
Lei dos Cossenos (1)	$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{a}{k}\right) \cosh\left(\frac{b}{k}\right) - \sinh\left(\frac{a}{k}\right) \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \cos \nu$
	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu$
	Para $k \rightarrow \infty$: $c^2 \approx a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu + \frac{a^2 b^2}{2k^2}$
Lei dos Cossenos (2)	$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \frac{\cos \lambda \cos \mu + \cos \nu}{\text{sen } \lambda \text{ sen } \mu}$
	$\pi = \alpha + \beta + \gamma$ (soma dos ângulos internos)
	Para $k \rightarrow \infty$: $\pi \approx \alpha + \beta + \gamma$ (triângulo euclidiano)
Expansão de $\sinh(x/k)$ e $\sin(x/k)$	$\frac{x}{k} + \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} + \dots$
	$\frac{x}{k} - \frac{x^3}{3!k^3} + \frac{x^5}{5!k^5} - \dots$
	Os sinais alternam a cada duas potências
Expansão de $\cosh(x/k)$ e $\cos(x/k)$	$1 + \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} + \dots$
	$1 - \frac{x^2}{2!k^2} + \frac{x^4}{4!k^4} - \dots$
	Os sinais alternam a cada duas potências

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.6.5 Teorema de Pitágoras

Ao observar os dois Teoremas de Pitágoras, surge a seguinte dúvida: por que o teorema de Pitágoras clássico é uma soma de quadrados, enquanto o teorema de Pitágoras hiperbólico é um produto entre cossenos hiperbólicos? A resposta para essa pergunta está na forma como a distância é medida na geometria euclidiana e na geometria hiperbólica. Note que a distância entre dois pontos na geometria euclidiana se dá pelos quadrados dos comprimentos. Já na geometria hiperbólica, como vimos na Proposição 5.2.2, a distância entre pontos de horocírculos tem crescimento exponencial, o que se reflete na forma do teorema de Pitágoras hiperbólico que

foi apresentado, ou seja, o produto entre dois cossenos hiperbólicos.

5.6.6 Axioma de Lobachevsky e Trigonometria Hiperbólica

Cabe destacar que a modificação no axioma das paralelas gera estruturas geométricas novas, como os triângulos ideais, os quadriláteros de Saccheri e de Lambert, horocírculos, entre outros. Nos triângulos, por exemplo, as relações de congruência clássicas da Geometria Euclidiana ainda são válidas (pertencem à geometria neutra). Com a adição dos triângulos formados por pontos ideais, novas relações de congruência são formadas.

Quadro 5.3 – Casos de congruência de triângulos ordinários e generalizados

Casos de Congruência		
■ Euclidiana (ordinários)		■ Hiperbólica (generalizados)
Caso	Sigla	Triângulo
lado, ângulo, lado	LAL	ordinário ABC qualquer
lado, lado, lado	LLL	ordinário ABC qualquer
ângulo, lado, ângulo	ALA	ordinário ABC qualquer
lado, ângulo, ângulo oposto (ao lado)	LAA ₀	ordinário ABC qualquer
lado, ângulo	LA	generalizado ABQ qualquer
ângulo, ângulo	AA	generalizado ABQ qualquer
isósceles generalizado	—	generalizado ABQ isósceles

Fonte: Elaborado pelo autor.

No capítulo de trigonometria, vários triângulos ideais aparecem nas demonstrações como representações gráficas. Isso ilustra como a troca do postulado das paralelas (base da Geometria Euclidiana) pelo postulado de Lobachevsky gera uma nova teoria, com novas proposições e objetos matemáticos.

6 CONCLUSÃO

A comparação direta entre as duas trigonometrias revelou que, quando os triângulos são suficientemente pequenos, as fórmulas hiperbólicas aproximam-se das euclidianas. Esse comportamento é consistente com a ideia de que a Geometria Euclidiana é o caso limite local da geometria hiperbólica.

Além disso, ao longo do presente TCC foram discutidos diversos tópicos matemáticos. As proposições de geometria neutra são conhecimentos comuns dos licenciandos, visto que são componentes de Geometria I dos cursos de licenciatura. No entanto, seu estudo pela perspectiva histórica e no contexto da axiomática de Hilbert proporciona ao licenciando novas percepções da matemática, além de estabelecer bases sólidas para a construção da Geometria Hiperbólica.

Contudo, ao estudar a geometria hiperbólica isoladamente, percebeu-se que as figuras são construídas a partir de noções planas não são intuitivas (ainda que sejam válidas as conclusões) e dificultam o processo de aprendizado. Desse modo, fez-se necessário utilizar de um modelo de Geometria Hiperbólica. Assim, o modelo do disco de Poincaré foi escolhido a fim de proporcionar uma melhor visualização geométrica.

Com esse modelo estabelecido, é imprescindível para a comparação entre trigonometrias que se tenha domínio dos conceitos básicos da geometria hiperbólica, pois eles são utilizados ao longo de todo o desenvolvimento da teoria. Apesar de essa configuração de escrita ser historicamente comum, perpetuando-se desde Euclides, esse estudo proporciona um aprendizado gradual e com sentido formal, necessário para compreender os principais resultados e construções da Trigonometria Hiperbólica.

Entre esses conceitos fundamentais, a substituição do postulado das paralelas de Euclides pelo axioma de Lobachevsky introduz uma classificação mais rica de pontos no plano hiperbólico. Além dos pontos ordinários, surgem os pontos ideais no infinito, associados às direções de paralelismo, e os pontos ultraideais (comuns a retas que não se intersectam, mas que possuem uma perpendicular comum). Essa ampliação permite generalizar conceitos como triângulos, congruências e bissetrizes, culminando nos triângulos generalizados (com vértices ideais), ferramentas essenciais para a construção da trigonometria hiperbólica e para a compreensão da geometria como um sistema axiomático aberto.

Os horocírculos que são curvas limite obtidas quando o centro de uma circunferência tende a um ponto ideal desempenham papel fundamental na teoria. Eles substituem as retas paralelas como referência para a definição de distâncias e arcos correspondentes, e são a base para a dedução das funções hiperbólicas. Demonstra-se que arcos correspondentes em horocírculos concêntricos decaem exponencialmente com a distância, o que estabelece a conexão direta entre a geometria hiperbólica e as funções $\sinh$, $\cosh$ e $\tanh$.

A partir dessas funções, as relações fundamentais como Teorema de Pitágoras, Lei dos Senos e Lei dos Cossenos são preservadas em sua estrutura formal, mas passam a ser expressas por funções hiperbólicas:

- **Teorema de Pitágoras Hiperbólico:**

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b);$$

- **Lei dos Senos Hiperbólica:**

$$\frac{\sinh(a)}{\sin \alpha} = \frac{\sinh(b)}{\sin \beta} = \frac{\sinh(c)}{\sin \nu};$$

- **Lei dos Cossenos (versão 1):**

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos \nu;$$

- **Lei dos Cossenos (versão 2):**

$$\cosh(a) = \frac{\cos \beta \cos \nu + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \nu}.$$

Em relação à questão inicial “de que modo a substituição do Axioma das Paralelas altera as relações trigonométricas?” concluímos que todas as relações se transformam pelo uso das funções hiperbólicas ($\sinh$, $\cosh$, $\tanh$) em lugar das funções trigonométricas circulares. Essa troca preserva a estrutura formal das leis (Pitágoras, senos, cossenos), mas modifica profundamente o comportamento métrico, especialmente para grandes comprimentos, onde o caráter exponencial da geometria hiperbólica se manifesta.

Para além dos resultados aqui apresentados, pretende-se seguir com o estudo dentro da geometria hiperbólica, mais especificamente continuar os estudos a partir da geometria diferencial, a fim de estabelecer bases para o estudo de grupos de isometria. Por fim, este trabalho de conclusão de curso cumpre seu papel de oferecer ao leitor uma comparação entre as duas trigonometrias, contribuindo tanto para o aprofundamento matemático do licenciando quanto para sua formação pedagógica. Ao final deste trabalho de conclusão de curso, obteve-se uma monografia que atende aos três objetivos principais: contextualizar o leitor no tema, aprofundar os conhecimentos sobre trigonometria e contribuir para a formação matemática do licenciando.

REFERÊNCIAS

Agustini, E. **Introdução à geometria hiperbólica plana**. 1. ed. Uberlândia: FAMAT UFU; CEaD UFU, 2022. 144 p. E-book. ISBN 978-65-86084-61-0. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207>>.

Andrade, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica: O Modelo de Poincaré**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção Textos Universitários, 15). ISBN 978-85-8337-012-3.

Arcari, I. Um texto de geometria hiperbólica. **Biblioteca Digital da Unicamp. Campinas. São Paulo**, 2008.

Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 1995.

Barbosa, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 1995. 167 p. (20º Colóquio Brasileiro de Matemática). Evento realizado em 24-28 julho de 1995.

Batista, P. D. d. S. **Geometria Hiperbólica e Aplicações**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, fevereiro 2019. Orientador: Justino Muniz Júnior.

Castanheira, N. P. **Geometria Não Euclidiana**. 2. ed. Curitiba: Editora Intersaberes, 2020. ISBN 978-65-5871-907-0.

Gil, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 7. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2022. 44 p. E-book. ISBN 9786559771653. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9786559771653/>>.

Instituto Federal de Brasília. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Brasília, DF: [s.n.], 2025. Campus Estrutural. Acesso em: 15 nov. 2025. Disponível em: <<https://www.ifb.edu.br/attachments/article/10493/PPC%20Matem%C3%A1tica%20202072018%20revisado%20pelo%20NDE.pdf>>.

Meneses, R. D. B. d. Da geometria à topologia: filosofia do espaço métrico. **Endoxa**, n. 25, 2010.

Mol, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p. Inclui bibliografia. Ilustrações (algumas color.). ISBN 978-85-64724-26-6.

Piovesan, A. Pesquisa exploratória: procedimento metodológico para o estudo de fatores humanos no campo da saúde pública. **Revista de Saúde Pública**, v. 29, n. 2, p. 105–112, 1995.

Ryan, P. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytical Approach**. Cambridge [Cambridgeshire] ; New York: Cambridge University Press, 1986. xvii, 215 p. Bibliography: p. 210-211. Includes index.

Silva, A. R. d. **Aspectos da Geometria Neutra**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2015. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Apêndice A

Este apêndice apresenta uma série de axiomas e proposições de geometria neutra. Estas conclusões formam a base axiomática de ambas as geometrias presentes neste trabalho. Em resumo neste apêndice encontram-se os axiomas de Hilbert, algumas conclusões de congruência entre triângulos, teorema dos ângulos alternos internos, existência de retas perpendiculares e teorema do ângulo externo.

A.1 Conceitos Básicos de Geometria Neutra

Este apêndice apresenta as demonstrações das principais proposições utilizadas ao longo deste trabalho.

A.1.1 Axiomas de Hilbert

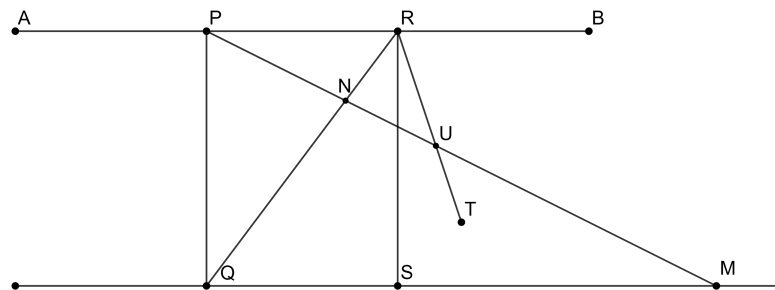
A seguir temos uma breve apresentação dos axiomas de Hilbert, estes são organizados em cinco categorias, Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência e Axiomas de Continuidade.

A.1.2 Propriedades das paralelas

Proposição A.1.1. *Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é, em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada.*

Dem.:

Figura 64 – Paralela à direita



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura acima, suponha que a reta m que passa por A e B seja uma das paralelas a n passando por P . Digamos, a paralela à direita. Seja R um ponto qualquer de m . Devemos mostrar que m é também uma das retas paralela à reta n passando no ponto R e que é paralela à direita. Existem dois casos a considerar.

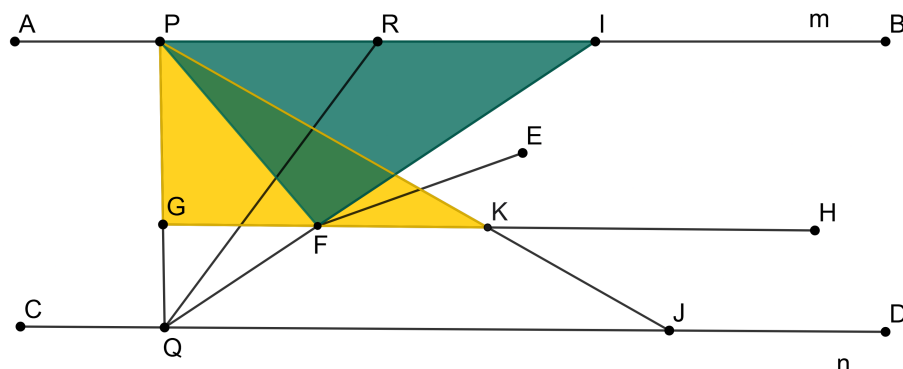
Caso 1. O ponto R está no lado do ponto P que fica na direção do paralelismo. Trace $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ perpendiculares a n . Vamos mostrar que toda reta passando por R e entrando no ângulo $\widehat{SBR}$ corta a reta n . Seja $\overline{RT}$ um segmento de uma de tais retas. Escolha nele um ponto qualquer U . Trace PU e RQ . Pelo paralelismo no ponto P , temos que a reta PU deve cortar n em um ponto M e, pelo axioma de Pasch, deve cortar o segmento $\overline{RQ}$ em um ponto N . Novamente usando o axioma de Pasch, concluímos que RU , se prolongado, deve cortar o lado $\overline{QM}$ do triângulo QNM . Daí o resultado.

Caso 2. O ponto R está no lado do ponto P oposto ao paralelismo. Neste caso, a prova é essencialmente a mesma.

■

Proposição A.1.2. *Se uma reta é paralela a uma segunda, então, a segunda é paralela à primeira.*

Dem.:



Considere as retas m e n que passam pelos pontos A e B , e C e D , respectivamente, como na figura acima. Seja P um ponto do segmento $\overline{AB}$. Suponha que m seja a paralela à reta n passando por P em uma direção, digamos a da direita. Trace $\overline{PQ}$ perpendicular a n e $\overline{QR}$ perpendicular a m . O ponto R ficará à direita do ponto P (do lado do paralelismo), do contrário o triângulo PQR teria dois ângulos não agudos, o que é proibido pelo teorema do ângulo externo. Devemos provar que a reta n é paralela à reta m passando pelo ponto Q .

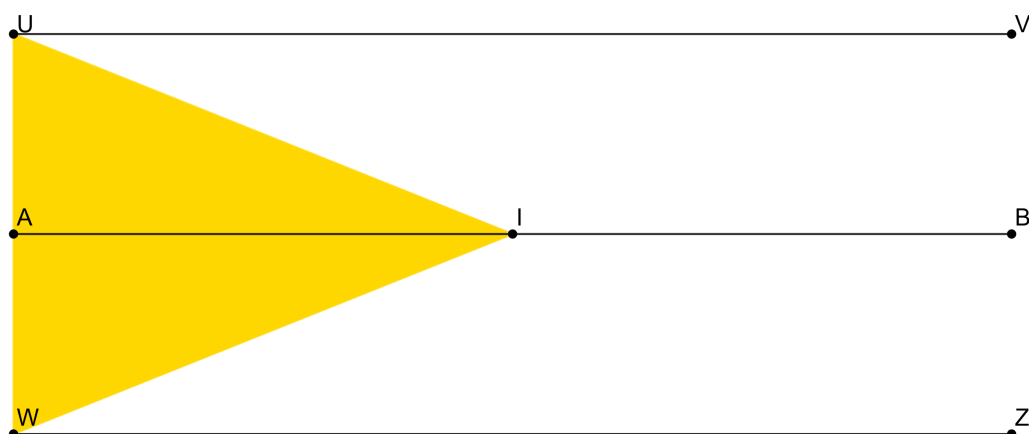
Para isto, temos de provar que toda reta que passa pelo ponto Q e divide o ângulo $\widehat{RQD}$, intercepta a reta m . Considere uma de tais retas e seja E um de seus pontos dentro daquele ângulo. Trace $\overline{PF}$ perpendicular a esta reta. O ponto F pertence à semi-reta de origem Q passando por E . O leitor deve verificar este fato como exercício. Na semi-reta SPQ (semi-reta de origem P e passando por Q), marque um ponto G , de modo que $PG = PF$. O ponto $G \in PQ$, já que $PF < PQ$, como cateto e hipotenusa de um triângulo retângulo. Trace a perpendicular $\overline{GH}$ ao segmento $\overline{PQ}$ e construa um ângulo $\widehat{GPI}$ igual ao ângulo $\widehat{FPB}$. Seja J o ponto onde a semi-reta SP_I corta a reta n . Como a semi-reta SGH corta o lado $\overline{PQ}$ do triângulo PQI , mas não corta o lado $\overline{QJ}$, então, deve cortar $\overline{PJ}$ em algum ponto K' . Em SP_B marque um ponto L tal que $PL = PK'$ e trace $\overline{FL}$. Observe que os triângulos PGK' e PFL são congruentes. Consequentemente, $\angle PFL = \angle PGK' = 90^\circ$. Logo, os pontos Q, F, E e I são colineares. Portanto, a semi-reta SQ_E corta a reta m , como queríamos demonstrar.



Proposição A.1.3. *Se duas retas são paralelas a uma terceira, na mesma direção, então, são paralelas entre si.*

Dem.:

Figura 66 – Figura de apoio à demonstração de paralelismo entre três retas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiro, vamos considerar o caso em que a terceira reta está entre as outras duas. Considere as retas como na figura acima, sendo, a reta m , que passa por A e B , e a reta m' , que passa por C e D , paralelas à reta n , que passa por E e F , ambas na mesma direção. Podemos supor que o segmento $\overline{AC}$ é perpendicular a CD . Considere uma reta que passe nos pontos A e H , este último situado dentro do ângulo $\widehat{CAB}$. Como m é paralela a n , esta corta a reta que passa pelos pontos E e F em algum ponto, digamos I . Trace $\overline{CI}$. Usando o Teorema anterior, sabemos que a reta que passa por E e F é paralela à reta que passa por C e D . Logo, a reta que entra no ângulo $\widehat{CIF}$ deve interceptar a que passa por C e D . Isto prova o resultado neste caso. Agora, vamos considerar o caso em que as duas retas, m e m' , estão do mesmo lado da terceira, n . Considere as retas como na figura abaixo. Suponha que m' seja a reta que está entre as outras duas. Tome um ponto $P \in m$. Considere a reta m'' , passando por P , paralela a m' , na mesma direção do paralelismo (de m com relação a n). De acordo com a primeira parte provada, m'' é paralela a n . Como m também é paralela a n e o paralelismo de m e m'' é na mesma direção, concluímos que $m = m''$, já que a paralela, em uma

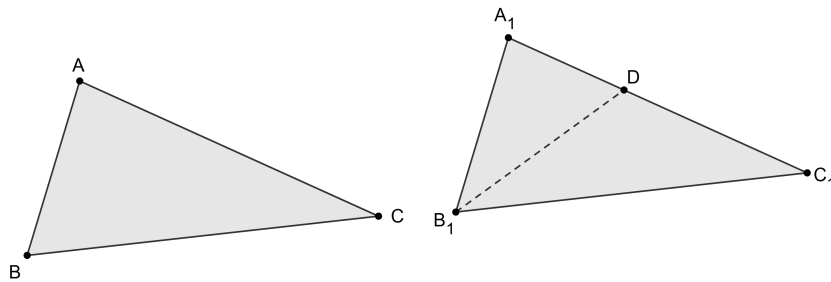
determinada direção e passando pelo mesmo ponto, é única. Consequentemente, m é paralela a m' .

■

A.1.3 Proposições Importantes

Proposição A.1.4. *Se para dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ as congruências $\overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1}$ valem, então os triângulos são congruentes.*

Figura 67 – Triângulos Congruentes LAL



Fonte: Elaborado pelo autor.

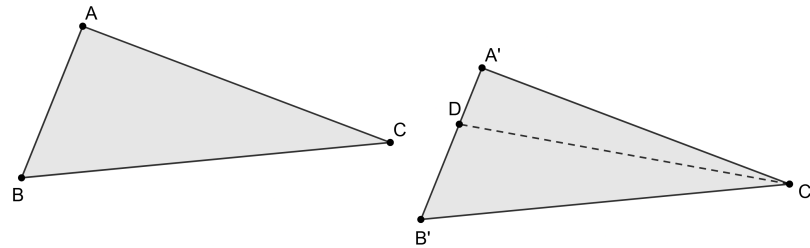
Dem.:

Pelo axioma 4.1.12 de congruência, valem a congruência $\hat{C} \equiv \hat{C}_1$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$. Resta mostrar a congruência $\overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1}$. Suponha, por absurdo, que os segmentos não sejam congruentes. Seja d um ponto do raio $\overline{A_1C_1}$ tal que $\overline{CA} \equiv \overline{C_1D}$. Como veremos, não importa que D esteja entre A_1 e C_1 , ou não. O importante é que D esteja do lado de $\overline{B_1C_1}$ que contém A_1 . Comparando os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ obtemos as congruências: $\overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1}$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}_1$. Pelo axioma 4.1.12 de congruência temos $\hat{B} \equiv \widehat{C_1B_1D}$ e, por hipótese, $\hat{B} = \widehat{C_1B_1A_1}$. Isso contraria o axioma 4.1.11 de congruência, pois existem dois raios emanando de B_1 para um mesmo lado da reta $\overline{B_1C_1}$ formando ângulos com $\overline{B_1C_1}$ congruentes a $\hat{B}$.

■

Proposição A.1.5. *Se para dois triângulos ABC e $A'B'C'$ as congruências $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\overline{B,C} \equiv \overline{B',C'}$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ valem, então os triângulos são congruentes.*

Figura 68 – Triângulos Congruentes ALA

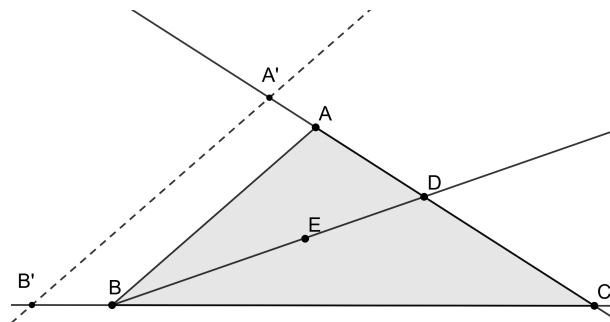


Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: É suficiente mostrar a congruência $\overline{B, A} \equiv \overline{B', A'}$, pois, feito isso, a congruência segue pelo critério LAL. Suponha, por absurdo, que $\overline{B, A}$ e $\overline{B', A'}$ não sejam congruentes. Seja D um ponto de $B'C'$ tal que $\overline{B, A} \equiv \overline{B', D}$. Examinemos os triângulos $\Delta(B, C, A)$ e $\Delta(B', C', D)$. Como $\overline{B, A} \equiv \overline{B', D}$, $\widehat{BCA} \equiv \widehat{A'B'C'}$ e $\overline{B, C} \equiv \overline{B', C'}$, pelo critério LAL, os triângulos são congruentes. Isso contradiz o axioma 4.1.12 de congruência, pois existem dois raios emanando de C' para o mesmo lado da reta $B'C'$ determinando ângulos com $C'B'$ congruentes a $\hat{C}$.

■

Lema A.1.1. Se E é um ponto no interior do ângulo $\widehat{CBA}$, então o raio BE intersecta o segmento $\overline{CA}$ num ponto D com $C * D * A$.

Figura 69 – Lema do ponto no interior do ângulo: raio BE intersecta o segmento AC .

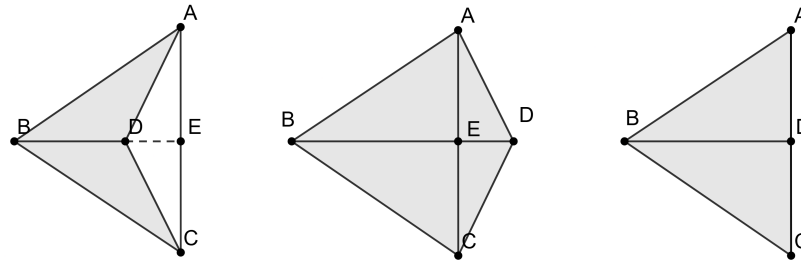
Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Escolha um ponto $A' \in CA$, tal que $A' * A * C$ e um ponto $B' \in BC$ tal que $B' * B * C$. Essa construção é possível pelo axioma 4.1.9 de congruência. Esses pontos estão no semiplano da reta BA que não contém C . Como semiplanos são conexos por segmentos, $\overline{B'A'}$ está no semiplano citado. Observemos que dois raios que emanam do mesmo ponto somente se intersectam nesse ponto. Considere o triângulo $B'CA'$. Como a reta BE intersecta o interior de $\overline{B'A'}$, pelo axioma de Pasch, ela intersecta ou o lado $\overline{B'A'}$ ou o lado $\overline{C'A'}$. Caso o raio $\overrightarrow{BE}$ intersectasse um dos segmentos $\overline{B'A'}$, $\overline{C'A'}$ ou incidisse no ponto C , ele intersectaria os raios do ângulo num ponto diferente de B , o que seria uma contradição. Logo, a interseção ocorre num ponto D do segmento $\overline{C'A'}$ com $C * D * A'$.

■

Proposição A.1.6. *Se para dois triângulos $\Delta(B, D, A)$ e $\Delta(B, D, C)$ as congruências $[B, D] \equiv [B, D]$, $[B, A] \equiv [B, C]$ e $[D, A] \equiv [D, C]$ valem, então os triângulos são congruentes.*

Figura 70 – Triângulos Congruentes LLL



Fonte: Elaborado pelo autor.

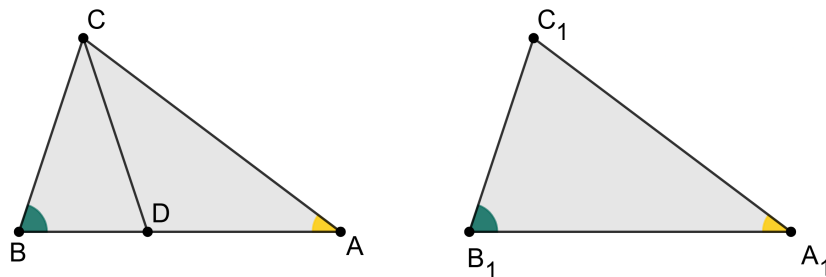
Dem.: A menos de uma congruência de triângulos, podemos supor que os ambos os triângulos são $\Delta(B, D, A)$ e $\Delta(B, D, C)$, onde A e C estão em lados opostos da reta BD . Seja E a interseção do segmento $[A, C]$ com essa reta. A prova, a priori, divide-se em cinco casos, dependendo da relação entre E e os pontos B e D . Sem esforço algum, vemos que os casos $E * B * D$ e $B * D * E$ têm demonstrações similares. Os casos $E = B$ e $E = D$, idem. Portanto, faremos as demonstrações para três casos, apenas.

- **1º caso.** Se $B * D * E$, então $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ porque ambos são congruentes a uma "subtração" de ângulos das bases de dois triângulos isósceles. Do critério LAL, segue a congruência procurada.
- **2º caso.** Se $B * E * D$, então $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ porque ambos são congruentes a uma "adição" de ângulos das bases de dois triângulos isósceles. Do critério LAL, segue a congruência procurada.
- **3º caso.** Se $E = D$, os triângulos são retângulos. Pelo mesmo critério segue a congruência procurada.

■

Proposição A.1.7. *Se para dois triângulos BA, C e $B_1A_1C_1$ valem as congruências $\overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1}$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B_1A_1C_1}$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B_1A_1C_1}$, então os triângulos são congruentes.*

Figura 71 – Demonstração do critério de congruência AAL (ou LAA).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Precisamos apenas mostrar a congruência dos lados $\overline{BA} \equiv \overline{B_1A_1}$ e aplicar o critério LAL. Suponha, por absurdo, que $\overline{BC}$ não seja congruente a $\overline{B_1A_1}$. Sem perder a generalidade, assumiremos que $\overline{B_1A_1} < \overline{BC}$. Sendo assim, seja $D \in \overline{BC}$ tal que $\overline{BD} \equiv \overline{B_1A_1}$. Pelo critério LAL, temos a congruência $BDC \equiv B_1A_1C_1$. Por hipótese e por essa congruência de triângulos seguem as congruências:

$$\widehat{BDC} \equiv \widehat{B_1A_1C_1} \equiv \widehat{BAC}$$

. Portanto, o triângulo DAC tem um ângulo externo $\widehat{BDC}$ congruente a um ângulo interno não adjacente, qual seja, $\widehat{BAC}$. Isso contradiz o Teorema do ângulo externo. Logo, $\overline{B, C} \equiv \overline{B_1A_1}$.

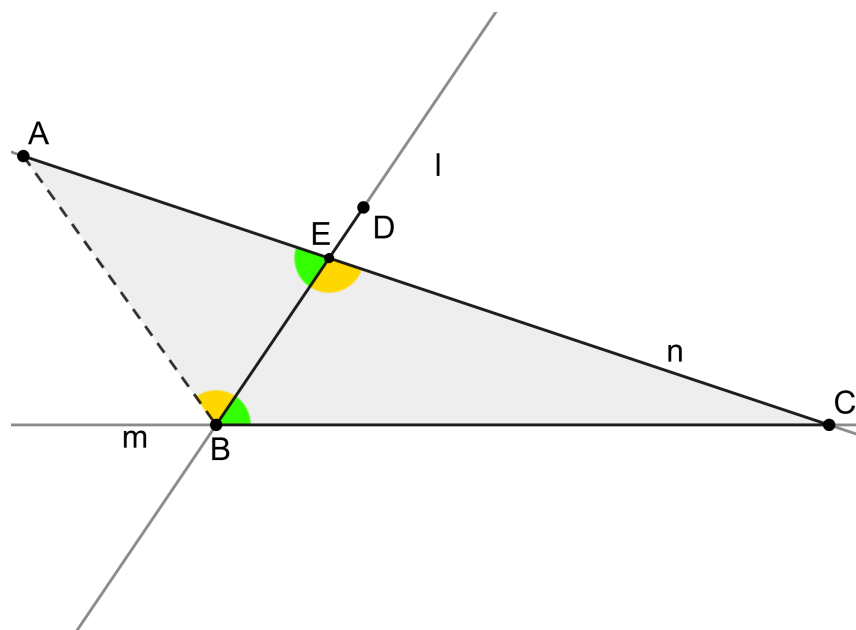


A.1.4 Paralelismo na geometria neutra

Vejamos o teorema dos ângulos alternos internos

Teorema A.1.1. *Se duas retas são intersectadas por uma terceira reta de modo que os ângulos alternos internos sejam congruentes, então as duas retas não se intersectam.*

Figura 72 – Teorema dos ângulos alternos internos para retas que não se intersectam.



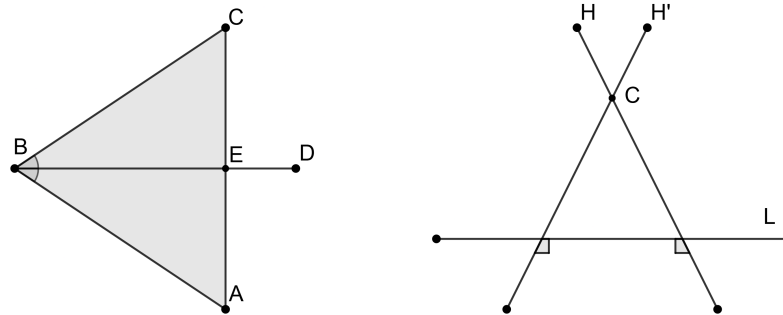
Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Sejam m e n duas retas intersectadas por uma reta l de modo que os ângulos alternos internos sejam congruentes. Suponha, por absurdo, que m e n se intersectam, digamos, num ponto C . Sejam B e E os pontos de intersecção da reta l com as retas m e n , respectivamente. Escolha um ponto $A \in n$ tal que $\overline{EA} \equiv \overline{BC}$ e que A esteja no lado oposto da reta l que contém C . Vamos assumir que $\widehat{CBE} \equiv \widehat{AEB}$. Feito essa construção, obtemos pelo critério LAL a congruência dos triângulos (C, B, E) e (A, E, B) . Portanto, vale a congruência dos ângulos $\widehat{CEB} \equiv \widehat{ABE}$. Como os ângulos $\widehat{CEB}$ e $\widehat{AEB}$ são suplementares, o mesmo ocorre com os ângulos $\widehat{CBE}$ e $\widehat{ABE}$. Isso implica que A pertence ao raio oposto de $\overrightarrow{BC}$, ou seja, pertence à reta m . Como a intersecção de m e n contém dois pontos distintos, quais sejam, C e A , pelo axioma 4.1.1 de incidência elas são iguais. Uma contradição.



Proposição A.1.8. *Para toda reta L e todo ponto C existe uma reta, e somente uma, que incide em C e é perpendicular a L .*

Figura 73 – Existência e unicidade da reta perpendicular a uma reta dada por um ponto externo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Inicialmente assumamos que $L = BL$ não incide em C .

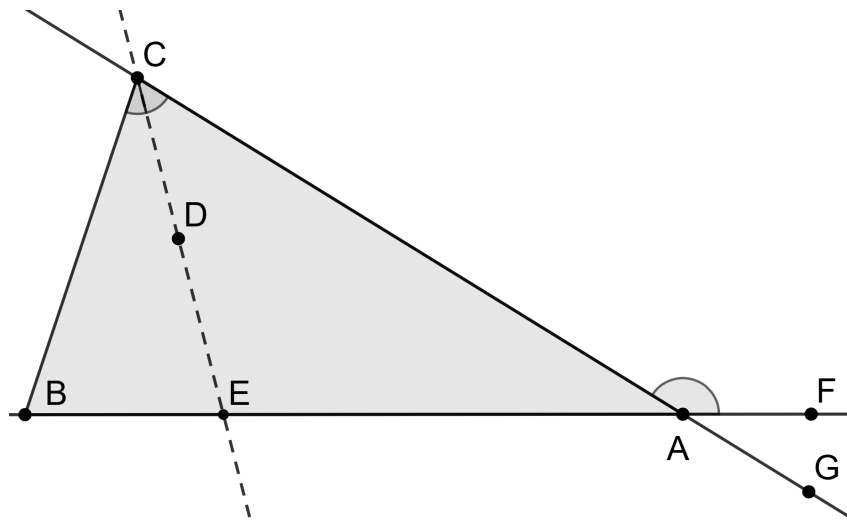
(Existência) Caso a reta CB seja perpendicular à reta L , nada temos a fazer. Se não, pelos axiomas de congruência, podemos construir um raio BA tal que os ângulos $\widehat{CBD}$ e $\widehat{ABD}$ são congruentes, C e A estão em lados opostos de L e $\overline{B, C} \equiv \overline{B, A}$. Seja E a interseção de $\overline{C, A}$ com L . O critério LAL garante que os ângulos $\widehat{CEB}$ e $\widehat{AEB}$ são congruentes. Como são suplementares, eles são retos. Logo, as retas $H = CA$ e L são perpendiculares.

(Unicidade) Suponha, por absurdo, que exista uma outra reta H' distinta de H que incida em C e é perpendicular à reta L . Desse modo, temos uma reta transversal às retas H e H' formando ângulos alternos internos retos, logo congruentes. Pelo teorema anterior, H e H' não se intersectam. Uma contradição.



Teorema A.1.2. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente a ele.*

Figura 74 – Teorema do ângulo externo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dem.: Seja BAC um triângulo. Escolha um ponto F tal que $B * A * F$. Mostraremos que o ângulo externo $\widehat{CAF}$ é maior que o ângulo interno não adjacente $\widehat{BCA}$. Suponha, por absurdo, que $\widehat{CAF} \equiv \widehat{BCA}$. Pelo Teorema dos ângulos alternos internos, a reta BA não intersesta a reta BC . Uma contradição. Agora suponha, por absurdo, que $\widehat{CAF} < \widehat{BCA}$. Sendo assim, existe E no interior do ângulo $\widehat{BCA}$ tal que $\widehat{ECA} \equiv \widehat{CAF}$. Novamente, pelo mesmo teorema, a reta CE não intersesta a reta BA contrariando a proposição A.1.1. ■

Proposição A.1.9. *Todo segmento tem um único ponto médio.*

Dem.: Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. Pela Proposição 3.3, existe um ponto C que não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura 4.7). Pelo Axioma C2, existe uma única semirreta $\overrightarrow{BF}$ no lado oposto de $\overleftrightarrow{AB}$ em relação a C tal que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ABF}$. Existe um único ponto D em $\overrightarrow{BF}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ (Axioma C1).

Os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ABF}$ são ângulos alternos internos cortados por uma transversal $\overleftrightarrow{AB}$ nas retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$. Uma vez que esses ângulos são congruentes, podemos concluir que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas (Teorema dos Ângulos Alternos Internos). Como C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, sabemos que o segmento $\overline{CD}$ intersesta a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em um ponto que chamaremos E . Como E está no segmento $\overline{CD}$, temos $C * E * D$.

Sabemos também que E está na reta $\overleftrightarrow{AB}$, assim temos uma das seguintes situações: $E = A$, ou $E = B$, ou, se eles são três pontos distintos, $E * A * B$, ou $A * B * E$ ou $A * E * B$ (Axioma B2).

Se $E = A$, temos $C * A * D$, e D está em ambas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, o que contradiz a afirmação de que essas duas retas são paralelas. Se $E = B$, de maneira similar, chegamos a uma contradição.

Se $E * A * B$, como E e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, a reta $\overleftrightarrow{BD}$ é paralela à $\overleftrightarrow{AC}$, a reta $\overleftrightarrow{BD}$ não intersecta $\overleftrightarrow{AC}$, então B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ (Definição 2.4); então, E e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$ (Corolário 3.1). Como a intersecção das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$ é o ponto C , temos $E * C * D$, que é uma contradição ao Axioma B1 pois já temos $C * E * D$.

Se $A * B * E$, os mesmos argumentos podem ser utilizados.

Se $A * E * B$, é o caso restante. Os ângulos $\widehat{CEA}$ e $\widehat{DEB}$ são opostos pelo vértice, portanto, congruentes (Proposição 3.13). Como $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ e $\widehat{AEC} \equiv \widehat{BED}$, pelo caso ALA, $\triangle AEC \equiv \triangle BED$. Por definição de triângulos congruentes, temos $\overline{AE} = \overline{EB}$. Isto, juntamente com $A * E * B$, implica que E é um ponto médio de $\overline{AB}$.

(Unicidade) Suponha que existam dois pontos médios M e N de $\overline{AB}$, com $A * M * B$ e $A * N * B$. Então $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $\overline{AN} = \overline{NB}$. Se $M \neq N$, sem perda de generalidade, suponha $A * M * N * B$. Então $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 2\overline{AM}$ e $\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB} = 2\overline{AN}$. Logo $2\overline{AM} = 2\overline{AN}$, donde $\overline{AM} = \overline{AN}$, o que implica $M = N$, contradição.

■

Proposição A.1.10. *Todo ângulo tem uma única bissetriz.*

Dem.: Dado $\widehat{BAC}$, seja D um ponto no interior do ângulo tal que $\overrightarrow{AD}$ seja uma semirreta. Pelo Axioma C1, podemos marcar pontos E e F sobre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $\overline{AE} \equiv \overline{AF}$. Trace o segmento $\overline{EF}$ e seja G o ponto médio de $\overline{EF}$ (cuja existência é garantida pela proposição anterior).

Trace a semirreta $\overrightarrow{AG}$. Vamos mostrar que $\overrightarrow{AG}$ é a bissetriz de $\widehat{BAC}$.

Os triângulos $\triangle AEG$ e $\triangle AFG$ têm $\overline{AE} \equiv \overline{AF}$ (por construção), $\overline{AG}$ é lado comum, e $\overline{EG} \equiv \overline{FG}$ (pois G é ponto médio de $\overline{EF}$). Pelo critério LLL, $\triangle AEG \equiv \triangle AFG$. Portanto, $\widehat{EAG} \equiv \widehat{FAG}$, o que significa que $\overrightarrow{AG}$ é bissetriz de $\widehat{BAC}$.

(Unicidade) Se existissem duas bissetrizes distintas $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{AG'}$, então G e G' estariam em semirretas distintas. Pela definição de bissetriz, teríamos $\widehat{BAG} \equiv \widehat{CAG}$ e $\widehat{BAG'} \equiv \widehat{CAG'}$.

Pela propriedade de tricotomia para ângulos, isso levaria a uma contradição, pois ambas não poderiam dividir o ângulo ao meio de maneira diferente.

