

Instituto Federal de Brasília
Campus Estrutural
Especialização em Matemática Educação e Tecnologias

DANILO MOTA

FORMALISMO DE JOGOS: UMA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

Brasília
2025

DANILO MOTA

FORMALISMO DE JOGOS: UMA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Especialização em Matemática, Educação e Tecnologias do Instituto Federal de Brasília, *Campus* Estrutural como parte da exigência para obtenção do título de Especialista em Matemática, Educação e Tecnologias.

Orientador: Prof. Dr. Edgar Luis Bezerra de Almeida

Brasília
2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

DANILO MOTA

FORMALISMO DE JOGOS: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília Campus Estrutural como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Especialista em Matemática, Educação e Tecnologias.

Aprovado em 15 de dezembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Assinaturas digitais

_____

Professor Doutor Edgar Luis Bezerra de Almeida – orientador

_____

Profa. Doutora Ana Maria Libório de Oliveira – membro

_____

Professor Doutor Alexandre Fernandes Batista Costa Leite - membro

Brasília

2025

Documento assinado eletronicamente por:

- **Edgar Luis Bezerra de Almeida**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 19/12/2025 00:07:00.
- **Ana Maria Liborio de Oliveira**, **Coordenadora do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Matemática, Educação e Tecnologias**, em 19/12/2025 08:15:27.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 19/12/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifb.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 666664
Código de Autenticação: 34f6da292d

INSTITUTO FEDERAL
Brasília

Campus Brasília
Via L2 Norte, SGAN 610, Módulo D, E, F e G., None, Asa Norte, BRASÍLIA / DF, CEP 70.830-450
(61) 2193-8055

FORMALISMO DE JOGOS: UMA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

Danilo Mota[1]

Edgar Luis Bezerra de Almeida[2]

RESUMO

Esse trabalho investiga as possibilidades pedagógicas decorrentes da adoção de uma filosofia da matemática como base para o ensino de matemática. Parte-se da hipótese: se a matemática é aquilo prescrito por uma filosofia da matemática, então ensinar matemática deve estar em acordo com o que é prescrito por tal filosofia. Tomando o formalismo de jogos, o trabalho apresenta as principais ideias dessa tradição e discute a matemática prescrita como um sistema de manipulação de símbolos regido por regras arbitrárias. A metodologia consiste na análise conceitual de diferentes escolas filosóficas, com destaque para platonismo, empirismo, dedutivismo e formalismo, e na articulação dessas perspectivas com as práticas de ensino. A partir dessa análise, é elaborado um plano de aula para estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental, no qual a aritmética é apresentada em analogia aos elementos estruturais de um jogo esportivo, em especial o futebol. Isso permite explorar a aritmética como conjunto de regras que orientam ações possíveis dentro do *jogo aritmético*. O desenvolvimento do trabalho indica que a adoção do formalismo de jogos é uma abordagem pedagógica coerente com sua visão filosófica: o foco recai sobre a estrutura das regras de um jogo e não sobre interpretações externas, o que permite ao estudante desenvolver estratégias operatórias independentes de contextos concretos. Conclui-se que a aproximação entre filosofia da matemática e ensino oferece novas perspectivas à prática docente, ampliando a compreensão sobre o papel das concepções filosóficas no processo de ensino-aprendizagem e evidenciando o potencial da filosofia da matemática como ferramenta pedagógica.

Palavras-chave: formalismo de jogos; filosofia da matemática; ensino de aritmética; propostas pedagógicas; matemática elementar.

[1] Pós-Graduando em Matemática, Educação e Tecnologias pelo Instituto Federal de Brasília - Campus Estrutural. Licenciado em Matemática (UnB). E-mail: danilomotah@gmail.com.

[2] Professor no Instituto Federal de Brasília - Campus Brasília. Doutor em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). E-mail: edgar.almeida@ifb.edu.br.

GAME FORMALISM: A PEDAGOGICAL PERSPECTIVE

ABSTRACT

This paper investigates the pedagogical possibilities arising from adopting a philosophy of mathematics as the foundation for mathematics teaching, especially in elementary arithmetic. It is based on the hypothesis that, if mathematics is what a philosophy of mathematics prescribes, then teaching mathematics should align with that prescription. Drawing on formalism, particularly in its game formalism variant, the work presents the main ideas of this tradition and argues that mathematics can be understood as a system of symbol manipulation governed by arbitrary rules. The methodology involves a conceptual analysis of various philosophical schools: Platonism, empiricism, constructivism, deductivism, and formalism, and the articulation of these perspectives with teaching practices. Based on this analysis, a lesson plan is developed for 3th grade elementary students, in which arithmetic is introduced via an analogy with the structural elements of a sports game, especially soccer. This analogy allows arithmetic to be explored as a set of rules guiding possible actions within the *arithmetic game*. The results indicate that adopting game formalism enables a pedagogical approach consistent with its philosophical foundation: the focus rests on the structure of a game's rules rather than on external interpretations, allowing students to develop operational strategies independent of concrete contexts. It is concluded that the integration of philosophy of mathematics and teaching offers new perspectives for educational practice, broadening the understanding of the role of philosophical conceptions in the teaching–learning process and highlighting the potential of philosophy of mathematics as a pedagogical tool.

Keywords: game formalism; philosophy of mathematics; arithmetic teaching; pedagogical approaches; mathematics education.

Data de aprovação: 15 de dezembro de 2025.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

2 FORMALISMO 13

3 APRESENTAÇÃO DE UM JOGO 20

4 APRESENTAÇÃO DO *JOGO ARITMÉTICO* 22

5 CONCLUSÃO 28

REFERÊNCIAS 29

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho investiga algumas das consequências para a prática do processo de ensino-aprendizagem de se conceber a matemática, em particular a aritmética elementar, como disciplina prescrita por uma escola tradicional da filosofia da matemática.

Esta investigação culminará em uma breve proposta de plano de aula para o ensino de aritmética elementar para estudantes familiarizados com a prática esportiva. A proposta é apresentar os constituintes da aritmética elementar em analogia aos componentes essenciais de uma prática esportiva. O público alvo para essa aula são estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental que não estejam familiarizados com os números naturais e a operação de soma. Embora a estratégia se aplique também à multiplicação, iremos nos concentrar na adição.

Para isso, precisamos apresentar a cosmovisão da matemática por uma de suas escolas filosóficas. Partindo da seguinte hipótese "se a matemática é aquilo prescrito por uma filosofia da matemática, então ensinar matemática deve estar em acordo com o que é prescrito por tal filosofia" podemos apontar as conexões entre filosofia, matemática e pedagogia direcionadas a apresentação da aritmética elementar.

A realização desse objetivo é viabilizada a partir de um referencial teórico consolidado na filosofia da matemática. Encontramos em *Filosofia da matemática,* de Stewart Shapiro, os principais objetos de estudo e análise da filosofia da matemática (SHAPIRO, 2015). Com título semelhante, *Filosofias da matemática*, de Jairo José da Silva, esclarece as conexões entre o desenvolvimento da matemática e o da filosofia (SILVA, 2007).

De modo geral, a filosofia da matemática busca a explicação sobre a natureza do conhecimento matemático – epistemologia; e a origem do conhecimento matemático – ontologia. Essas duas abordagens são clássicas e podemos entendê-las similarmente àquelas questões da metafísica como “Quem eu sou?” e “De onde eu venho?”. Na filosofia da matemática, essas perguntas podem ser, por exemplo, “Qual a natureza da matemática?” e “Qual a origem do conhecimento matemático?”.

A resposta para essas perguntas, através da metafísica, possibilita a origem de diferentes culturas, artes e ciências formando uma cosmovisão sobre a vida. Na filosofia da matemática diferentes respostas às questões acima, de uma perspectiva ontológica e epistemológica, dão origem as chamadas escolas filosóficas que respondem de modo único o que são pontos, retas e planos (objetos) e seus resultados (teoremas) matemáticos.

Traremos breves esclarecimentos acerca da ontologia e epistemologia das principais escolas da filosofia da matemática, mas o objetivo principal deste trabalho está nas aplicações pedagógicas de adotarmos uma delas. Para investigar as consequências no processo de ensino-aprendizagem uma das correntes filosóficas, o formalismo, foi a escolha mais adequada a proposta do trabalho.

Antes de apresentá-lo, um questionamento pode surgir sobre a efetiva conexão entre essas áreas e a proposta do trabalho, que relaciona o ensino com base em uma filosofia. Esse tipo de reflexão é também um objeto de estudo da filosofia, como mostra Shapiro (2015, p.30): “Em que medida podemos esperar que a filosofia determine ou simplesmente sugira a correta prática matemática? Inversamente, em que medida podemos esperar que a prática autónoma da matemática determine a filosofia correta da matemática?”. Neste caso, existe uma dicotomia entre as práticas da filosofia e da

matemática, uma pode preceder a outra, ou o inverso. É comum em filosofia este tipo de dicotomia e a existência delas revela que a conexão entre as áreas é algo interessante de se investigar, mais do que tratá-las como incompatíveis.

Equivalentemente, o ensino de matemática não pode se dizer precedente ou desarticulado a uma tradição filosófica, ao contrário, as práticas pedagógicas possuem uma intenção que é derivada da cosmovisão sobre o objeto ensinado. Ou seja, a investigação dessa conexão é mais interessante do que ignorá-las como áreas incompatíveis.

Para um exemplo disso, partimos do platonismo em filosofia da matemática que afirma que "os objetos matemáticos existem em um mundo ideal" (SILVA, 2007, p.16), ou seja, são objetos acessíveis ao pensamento humano, mas sua existência independente da existência humana, é um mundo ideal semelhante aqueles criados por divindades. Seguindo essa abordagem, professores podem ensinar seus alunos que os objetos matemáticos podem ser acessados nesse "mundo paralelo", e exemplos materiais desses objetos serão ditos imperfeitos, consequentemente, passíveis de serem menosprezados pois descaracterizam a obra perfeita.

Para o platonismo a matemática e seus objetos são considerados reais, mas existentes apenas em uma espécie de "universo paralelo" ou em outra realidade diferente do mundo material. Esse argumento é oriundo do racionalismo grego e pode ter ligação com a matemática de sua época, como o desenvolvimento do método axiomático de Euclides em sua obra *Os Elementos*. O platonismo pode ser associado a noção de conhecimentos obtidos *a priori*, ou seja, sem a necessidade de experiências que comprovem aquele conhecimento. Vemos que:

> As versões comuns do realismo em ontologia explicam bem a necessidade da matemática: se o conteúdo da matemática é como estes realistas dizem que é, então as verdades da matemática são independentes de qualquer coisa contingente sobre o universo físico e de qualquer coisa contingente sobre a mente humana, a comunidade de matemáticos. (SHAPIRO, 2015, p.154)

Essa visão é bem consolidada e difundida no ensino da matemática, isso pode ser observado no ensino de Geometria, em exemplos como o Teorema de Pitágoras. Ele é geralmente apresentado em livros didáticos acompanhado de demonstrações que utilizam a dedução lógica com o auxílio da Álgebra e Geometria. As situações práticas ou de aplicação do teorema na materialidade também são apresentadas pelo professor como a construção de pirâmides, o ângulo reto entre paredes e chão, dentre outros. Entretanto, elas servem de apoio ou motivação para o teorema em sua forma abstrata, que é a preferida. Eventuais construções práticas que validem o teorema através da experiência, como o uso de blocos de madeira representando as áreas, são possíveis, mas, incomuns no ensino desse teorema.

Isso significa que obter o teorema a partir de formas ideais é uma metodologia recorrente, e o oposto não é considerado importante para o ensino dele, evidenciando então o papel da filosofia da matemática. Para cada corrente filosófica existe também uma maneira de se ensinar matemática.

Podemos citar, por exemplo, o construtivismo em filosofia da matemática. Ele não estabelece um mundo ideal e independente da existência humana, mas afirma que os objetos são criados a partir da experiência humana. Ensinar o teorema de Pitágoras segundo essa perspectiva, demandaria ao professor a materialidade do teorema, uma observação física ou objeto construído para posteriormente a formulação abstrata do teorema.

Oposições e críticas ao platonismo ou ao construtivismo não necessariamente indicam perda de validade ou de influência das correntes filosóficas. É possível ainda que o contrário ocorra, pois, ao buscar soluções para impasses e questionamentos, criam-se novas versões que partem daquela, mas se distinguem e preservam a mesma premissa. Desse modo, são desenvolvidas características próprias que configuram uma não escola filosófica, como é o caso do estruturalismo: “assim chamado por propor não a existência de objetos matemáticos (números, conjuntos e outros), mas de *estruturas* matemáticas, esquemas relacionais vazios que podem ser “preenchidos” por quaisquer objetos em princípio.” (SILVA, 2007, p.200). Agora, apesar de não conceber a existência de objetos em um mundo ideal, há a necessidade de reconhecer uma estrutura abstrata que possa conter quaisquer objetos que sejam pretendidos. Esse ponto de vista é defendido por autores como Shapiro, que enxergam a matemática como uma estrutura que antecede a existência de objetos.

Diante disso, embora o platonismo possua ramificações e influência na filosofia da matemática, sendo considerado uma das correntes principais, ele não pode ser considerado o único e verdadeiro orientador das praticas pedagógicas. A evolução das ideias em filosofia não ocorre como na matemática. Por exemplo, o processo de soma atualmente utiliza algoritmos e o sistema de numeração, isso pode ser considerado um avanço em relação a contagem nos dedos das mãos, ainda que essa contagem seja possível ela é desaconselhada por professores, especialmente se trabalharmos com números grandes.

Na filosofia da matemática uma ideia não é desconsiderada da mesma forma que na matemática. As contradições, aglutinações e os impasses entre as perspectivas filosóficas é que impulsionam o desenvolvimento filosófico. Nesse sentido, discordando dos platonistas ainda na Grécia Antiga, surgem pensadores que divergem da visão de conhecimento e objetos existentes no mundo das ideias, Aristóteles discorda de Platão e afirma que o conhecimento matemático é fruto da racionalização da experiência. Essa abordagem dá ao mundo material e a *empiria* o poder de originar um conhecimento que poderá ser sistematizado posteriormente, isto é, *a posteriori*. Segundo Silva (2007, p. 56) “O que Platão tomava por objetos matemáticos ideais, Aristóteles via apenas como aspectos (formais), ou idealizações de aspectos de objetos reais”. Para ambos os filósofos, os objetos matemáticos existem, mas eles discordam quanto ao modo de apreensão desses objetos pelos seres humanos.

De modo semelhante ao platonismo, as perspectivas de Aristóteles influenciaram o desenvolvimento humano e continuam como base para o empirismo, metodologia científica amplamente utilizada e aceita na Física, por exemplo. Uma corrente filosófica que corrobora o empirismo é o intuicionismo “Os intuicionistas tradicionais eram o exato oposto de Platão, defendendo que os objetos matemáticos são *construções* mentais, e as proposições matemáticas devem de alguma maneira referir-se a construções mentais” (SHAPIRO, 2015, p.34). Isso significa que o empirismo possibilitou correntes filosóficas assim como o platonismo.

Em resumo, é possível identificar de maneira ingênua dois grandes pólos de pensamento filosófico-matemático: um em consonância com o platonista que concebe a existência de objetos num plano Ideal e teoremas obtidos *a priori*; e outro que sistematiza objetos materiais através da idealização, em que os resultados matemáticos surgem *a posteriori*. É evidente que essa divisão é simplificada e desconsidera as nuances e singularidades nas filosofias da matemática que, por vezes, divergem até na denominação da matemática, mas este tipo de discussão não é o objetivo desse trabalho.

Diante disso, e da diversidade de escolas filosóficas, a escolha de uma abordagem filosófica se deu pela sua adequação à hipótese *"se a matemática é aquilo prescrito por uma filosofia da matemática, então ensinar matemática deve estar em acordo com o que é postulado por tal filosofia".* O formalismo é que orientará esse ensino.

O formalismo pode ser comparado a um guarda-chuvas amplo que cobre diferentes vertentes ou escolas do pensamento. Embora escolas apresentem variações, elas são baseadas numa mesma essência, a tese central de que a matemática não possui significado. O formalismo de termos, o formalismo de jogos, dedutivismo e finitsmo em suas várias vertentes são alguns dos tipos de formalismo que conservam em comum a indiferença sobre questões ontológicas e epistemológicas da matemática. De modo geral, o formalismo nega a existência de objetos matemáticos e afirma que a matemática é o conhecimento sobre a manipulação de símbolos. Mesmo que se atribua significados a esses símbolos, o formalismo não os considera fundamentais para a compreensão e desenvolvimento da matemática.

Considera-se então a matemática "neutra" a objetos e significados, sua origem tampouco importa já que não são resultados nem de interpretações do mundo "real" como no construtivismo, nem de idealizações de formas em um mundo platônico. O dedutivismo, por exemplo, preconiza uma matemática com regras lógicas e, portanto, resultados que são deduzidos de seus axiomas, este passa a ser um dos significados do que chamamos de matemática, um sistema lógico formal.

Por ora, deixaremos os pormenores sobre o formalismo para os capítulos seguintes, já que o objetivo principal deste trabalho é propor o ensino de matemática de acordo com o que é postulado por alguma escola filosófica. Contudo, destacamos que o uso comum da expressão "a matemática é formal" é distinto da concepção de formalismo em matemática.

Quando se diz que a matemática é formal, isso significa que ela pode ser expressa utilizando uma linguagem formal, abstrata e bem definida, mas isso nada diz sobre sua ontologia e epistemologia. Essa é apenas uma característica da matemática que a distingue por garantir clareza e consistência de seus métodos. Já o formalismo é uma corrente filosófica que concebe a matemática como apenas como um sistema de símbolos, manipulados segundo regras bem definidas, mas contido em um sistema formal vazio de conteúdo, cuja origem e finalidade não são importantes.

O formalismo será a tradição filosófica adotada neste trabalho e a partir dele investigaremos as possibilidades no ensino de matemática. Utilizamos anteriormente o exemplo do teorema de Pitágoras para apresentar o platonismo, cuja ontologia e epistemologia diferem em relação ao formalismo. Com o mesmo exemplo podemos investigar as relações entre filosofia e ensino de matemática.

Retomando o exemplo anterior, no preparo de uma aula sobre o Teorema de Pitágoras, o professor precisa delimitar a maneira de apresentação do teorema e, nesse processo de preparo o professor deve considerar as possíveis perguntas de um estudante tais como "qual a origem do teorema?" ou "em que local se originou esse teorema?". Essas perguntas exigem uma resposta clara e objetiva do professor, pois do contrário a aula se tornaria um debate histórico.

Os fatores históricos e filosóficos estão intimamente relacionados, e duas possíveis repostas para as perguntas dos alunos podem ser: "o teorema foi descoberto pelos gregos" ou "o teorema foi criado pelos babilônios". Outras respostas ou a combinação delas também são possíveis, mas a história da matemática não possui atualmente fontes consolidadas para a origem precisa desse teorema.

Se o professor responder “o teorema foi descoberto pelos gregos” estará implicitamente adotando a perspectiva platonista sobre a matemática. Isso pode influenciar a forma como os alunos compreendem a matemática – como um saber abstrato, distante, reservado aos “gênios” descobridores que acessam esse mundo ideal. Eventualmente, isso pode gerar resistência e aversão à matemática em estudantes que não se identifiquem ou não se adequem a esse modelo de ensino. Adotar essa perspectiva, mesmo que implicitamente, trará consequências no ensino e aprendizagem que podem ser produtivas ou improdutivas.

Ao responder à questão com “o teorema foi criado pelos babilônios”, então o professor negará o platonismo, uma vez que que a criação de algo por seres humanos não é o processo admitido no platonismo grego, para eles a descoberta é resultado da ascensão dos homens ao mundo das ideias para receber dos deuses o conhecimento perfeito. Essa resposta, implicitamente, adota variações filosóficas decorrentes do empirismo, já que o teorema utilizado pelos babilônios é resultado de uma aplicação numérica e não de objetos ideais.

O empirismo também não está livre de problemas quando aplicado em temas educacionais. Um deles é a experimentação material do teorema de Pitágoras, que pode ser demasiadamente trabalhosa, requerendo conhecimento técnico e objetos apropriados. Para o professor construir um mecanismo ou objeto que represente o teorema serão necessários materiais como madeira ou plástico. Esses exigem conhecimento prévio para manipulação adequada, a ideia da construção pode parecer simples, mas as ferramentas e o uso desses materiais podem ser complexos.

Além disso, a própria noção de teorema não se aplicaria se utilizássemos o exemplo descrito pelos babilônios como prova concreta de algo na matemática. A construção empírica do teorema também não é considerada uma prova matemática, é na verdade uma observação aproximada de algo que a matemática demonstra. Essa perspectiva está ligada aos aspectos modernos de ontologia e epistemologia da matemática.

Diante disso, o professor pode preferir não responder tais questões ou deixar informações ambíguas para verificação dos estudantes, mencionando que filosofia nada tem de contribuição para a educação matemática. Mas, em algum momento surgirá questionamentos acerca do uso e importância da matemática e novamente as respostas exigem um contexto histórico e filosófico.

Independentemente da resposta, ressaltamos que há sempre uma filosofia da matemática subjacente que implicará na forma de ensino e, portanto, no processo de ensino-aprendizagem. Isso indica que o ensino de matemática não é neutro ou alheio ao contexto filosófico e, assim como a história da matemática é utilizada como ferramenta de ensino, a filosofia da matemática também possui essa potencialidade. Ignorar isso é limitar a compreensão da matemática e abrir mão de uma importante ferramenta pedagógica.

Em resumo, o presente trabalho parte dessa relação entre filosofia (em especial o formalismo de jogos) e o ensino de matemática (em especial da aritmética elementar), com o objetivo de desenvolver uma proposta de ensino de matemática. Não objetivamos nem pretendemos criar planos de aulas prontos ou aplicações diretas para sala de aula, mas intencionamos a reflexão sobre a abordagem pedagógica que compreenda a matemática como um jogo, fundamentado em regras e axiomas, e sobre como esse “jogo” pode ser ensinado.

2 FORMALISMO

O formalismo em filosofia da matemática é distinto da noção comum que existe sobre formalismo em matemática. Quando dizemos que a matemática é um campo de conhecimento formal significa que há uma linguagem e regras bem definidas das quais seguem definições, postulados e proposições matemáticas. Os resultados matemáticos são derivados de argumentos lógicos conectados as regras através da linguagem. Isso confere a matemática um aspecto rígido e exato.

Já para a filosofia, o formalismo é uma abordagem acerca da epistemologia e ontologia do conhecimento matemático. De modo geral, dizemos que as questões ontológicas são acerca da existência matemática e epistemológicas são aquelas que versam sobre a origem do conhecimento matemático. Portanto, quando se usa o termo formalismo neste trabalho, trata-se dos aspectos relacionados à filosofia da matemática em uma de suas escolas, o formalismo.

Dentro do formalismo existem ao menos três orientações distintas: formalismo de jogos, formalismo de termos e dedutivismo. As características gerais e específicas serão esboçadas neste capítulo e a nossa escolha de orientação do formalismo ocorreu pela adequação à proposta pedagógica e importância histórica. Apesar de distintas, as vertentes do formalismo convergem em pontos como:

> As várias filosofias que dão pelo nome de “formalismo” perseguem a tese de que a essência da matemática é a manipulação de caracteres. Uma lista dos caracteres e das regras permitidas determina quase exaustivamente o que há a dizer sobre um ramo dado da matemática. De acordo com o formalista, então, a matemática não é, nem precisa de ser, sobre qualquer coisa, ou qualquer coisa além de caracteres tipográficos e regras para os manipular. (SHAPIRO, 2015, p. 145)

Isso significa que o formalismo tem como traço característico fixar a matemática como algo despido de qualquer significado. Para um formalista, ainda que seja possível, as interpretações da matemática em aplicações de uso científico ou cotidiano não são relevantes a ponto de determinarem a origem do saber matemático. Em termos gerais, quando se diz que a matemática é uma ferramenta importante para as ciências ou, então, uma linguagem utilizada para descrever os fenômenos da natureza, não significa que essa é a essência matemática para o formalismo.

A matemática é vista como um tipo de conhecimento sobre a manipulação de símbolos. Saber matemática, para um formalista, é o mesmo que saber manipular símbolos seguindo as regras prescritas. A partir dessa perspectiva é possível fundamentar a matemática somente em seus objetos, ou seja, são os símbolos que a determinam e dessa interpretação origina-se uma vertente, a saber, o formalismo de termos.

Para compreender essa escola vejamos um exemplo prático de escrita de equações como em x + 5 = 10. Esses símbolos x, +, =, 5 e 10 não necessariamente representam laranjas ou maçãs. Os símbolos 5 e 10 não precisam sequer representar números, são símbolos desprovidos de quaisquer significados além de sua própria grafia e qualquer afirmação sobre eles é secundária no âmbito da matemática. Assim, a grafia “x + 5 = 10” e a manipulação posicional desses sinais é apenas uma regra lógica estabelecida, onde x poderá ter um valor, mas o significado de quantidade não precisa ser compreendido.

Essa grafia, no entanto, pode variar e o símbolo 10 que é a junção de outros dois “1 e 0" pode também ser designado pelos símbolos "x + 5” já que estão do outro

lado da igualdade na equação apresentada. É claro que tais símbolos são distintos, no entanto eles representam e significam o mesmo conceito, “10”. É nesse ponto que surge uma inconsistência para o formalismo de termos: “Não cabe ao formalista alegar que os dois símbolos denotam o mesmo número, visto que a tese central do formalismo de termos é que não precisamos considerar entidades extralinguísticas que os termos supostamente denotam” (SHAPIRO, 2015, p. 207).

Uma possível solução para isso seria considerar números como entidades que possuem um "tipo" determinado e esse tipo é a forma geral de representarmos os números. Por exemplo, para representarmos duas unidades utilizamos o tipo 2, dando a esse símbolo um significado de dobro de uma unidade.

Entretanto, o símbolo 2 pode ser utilizado para representar o número 22, neste temos duas vezes a grafia do número 2, mas isso não significa o dobro de duas unidades. Esse significado atribuído a um tipo gera um problema já que os números 2 e 22 utilizam o mesmo tipo para representar números diferentes. O sistema posicional é que os diferencia, mas o tipo utilizado é apenas um. Empregando o símbolo 2 temos duas unidades daquilo que se considera unidade e no símbolo 22 temos duas dezenas acrescidas de duas unidades. No primeiro caso, o conceito de dobro é para unidades já no o segundo caso, o conceito de dobro é aplicado para dezenas.

É evidente que o dobro de determinadas unidades é diferente do dobro de dezenas, o que implica na modificação do sinal empregado, mas não necessariamente modifica a essência do significado de dobro. Então, como é possível utilizar símbolos diferentes para o mesmo conceito?

Essa é uma questão em aberto para o formalismo de termos. Se a aritmética ou até mesmo toda a matemática está restrita a símbolos, e esses não são a respeito de nada, não devem ser utilizadas variações linguísticas ou palavras adicionais para se explicar um mesmo conceito utilizado. Além disso, atualmente o sistema de numeração é construído de maneira posicional, onde o conceito empregado a determinado número varia conforme sua posição. O mesmo termo “2” é utilizado em diversas representações existindo casos, como “1/2”, em que o 2 é relacionado com a divisão em duas partes iguais ou ainda a metade de algo que era inteiro.

A partir dessa problemática, propondo alternativas e possíveis resoluções, surge o formalismo de jogos. Nele, a matemática continua sem um sentido próprio, mas, dessa vez, o sentido simbólico também foi abolido. Formalistas de jogos afirmam que a matemática é “acerca de nada” e que números, objetos geométricos e quaisquer significados matemáticos não existem, seus símbolos ou tipos são acerca de nada. Portanto, a importância do significado deles pode ser preterida e uso desses símbolos é o que recebe maior importância. Saber manipular os símbolos, seguindo as regras definidas é que caracterizam a matemática.

Assim, a matemática é reduzida a um jogo semelhante a jogos de tabuleiro e, como em qualquer outro jogo, a sua finalidade é meramente recreativa e mesmo que suas ferramentas possibilitem aplicações, elas não são o objetivo ou a finalidade do jogo. Segundo essa perspectiva, podemos considerar a obra clássica *Os Elementos* de Euclides, por exemplo, como uma coleção de peças e regras de um jogo que pode ser jogado por alguém que tenha interesse e disposição para tal, sem necessariamente buscar nele uma finalidade como construções arquitetônicas ou de objetos.

Desse modo, é possível estabelecer uma correspondência entre termos geométricos como ponto, reta e plano com peões, bispos e rainhas no jogo de xadrez.

Os lemas, proposições e teoremas, por sua vez, são como regras ou jogadas específicas e bem elaboradas.

> Podemos dar a alguém os nossos [axiomas] e... definições... – como daríamos a posição inicial das peças no xadrez – dar-lhe as regras que permitem transformações, e depois passar-lhe o problema de derivar o nosso teorema... tudo isto sem que ela tenha a mais leve suspeita do sentido e significado destes sinais, ou dos pensamentos expressos pelas fórmulas. (FREGE, 1903 *apud* SHAPIRO, 2015, p. 145)

Nessa concepção de formalismo, não há representações de entes matemáticos, pois tais entes sequer existem. Portanto, representá-los seria impossível. As peças desse jogo, os signos e desenhos de pontos e retas possuem apenas finalidades que estão restritas ao uso no contexto dos termos da matemática. Isso, de certo modo, dá um significado para os segmentos de retas, por exemplo, como objetos que formam triângulos, mas para o formalismo de jogos esse significado deve ser desconsiderado.

Do mesmo modo a expressão “por dois pontos é possível traçar uma única reta” é uma variação linguística de coisas que nada significam. A expressão matemática é reduzida a uma linguagem e coisas da linguagem não necessariamente existem além dela. Isso indica que a linguagem utilizada não é a essência da matemática e, nem mesmo caracteriza a existência de objetos. A matemática possui uma fundamentação em seu aspecto operacional e nas regras de inferência lógica. É o uso correto dessas regras que definem o que são os entes matemáticos, sem necessariamente limitá-los a definições precisas e rigorosas.

Com isso, o formalismo de jogos se estabelece como uma variante do formalismo e os problemas existentes no formalismo de termos, como inconsistências de significados, símbolos e conceitos não fazem parte de seu arcabouço teórico. Entretanto, o desenvolvimento em filosofia não é linear e aquilo que parece ser resolvido em determinado momento retorna e impossibilita a solução do problema. Um dos paradoxos mais importantes que surgiu com o formalismo de jogos reside não em sua teoria refinada, mas na interpretação dela, uma vez que a redução da matemática a um mero jogo que possui finalidade em si mesmo não explica a preferência desse jogo em relação aos demais.

É justamente a aplicabilidade matemática ao contexto real que o formalismo de jogos não consegue explicar, justamente pela ausência de significado da matemática. Surgem questões como “Por que a matemática é a preferida dentre tantos jogos?” ou, “o que faz de suas jogadas tão assertivas em interpretações no mundo materializado?” que ficam sem respostas quando colocadas diante do formalista de jogos.

Tais inconsistências tiveram a contribuição de matemáticos e filósofos que buscaram soluções a esses perguntas sem abrir mão dos princípios do formalismo, em especial o princípio de que a matemática não possui significado e interpretação. Em Shapiro (2015, p. 151): “No que respeita a matemática, tudo o que importa é que as regras sejam seguidas. O significado é meramente heurístico, não é mais do que uma ajuda psicológica”.

O problema que surge agora é o de justificar esse jogo, que apesar de não possuir significado, é inteiramente aplicável à realidade e, além disso, é capaz de fornecer “jogadas” poderosas o bastante para construir prédios, carros e aeronaves. O formalismo de termos não consegue responder o problema da validade matemática, pois as regras estabelecidas em um jogo podem ser arbitrárias. No caso da matemática, se as regras são aleatórias e arbitrárias, como podem acarretar

consequências tão profundas a ponto de serem chamadas de resultados "verdadeiros"? Esse é mais um problema para o formalismo de jogos.

A aplicabilidade material e a validade lógica são algumas das inconsistências do formalismo de jogos. Buscando resolvê-las, outras ideias propõem resoluções para a aplicabilidade desse jogo matemático. O dedutivismo e o finitismo, apesar das divergências entre si, se baseiam no pressuposto de uma matemática ausente de significados e restrita a manipulação de símbolos, para o dedutivismo:

> Tal como o formalista de jogo, o nosso dedutivista propõe respostas claras a questões filosóficas. De que trata a matemática? Nada, ou pode ser considerada como sendo sobre nada. O que é conhecimento matemático? É conhecimento do que se segue de quê. O conhecimento matemático é conhecimento lógico. Como se aplica um ramo da matemática? Encontrando interpretações que tornam verdadeiros os seus axiomas. (SHAPIRO, 2015, p. 216)

O dedutivismo é bastante influenciado por *Os Fundamentos da Geometria* de David Hilbert publicada em 1899. Uma brevíssima contextualização se faz necessária, pois esse trabalho propõe também uma formalização axiomática da geometria utilizada até os dias de hoje.

Entre o final do século XIX e início do século XX ocorreu a chamada *crise dos fundamentos*, período de contestação das bases do conhecimento matemático. Essa crise foi ocasionada, dentre outros motivos, pelo desenvolvimento da teoria de conjuntos de Cantor, que pretendia unificar todas as áreas da matemática na teoria de conjuntos, e de alguns paradoxos decorrentes da dessas interpretações.

Para além da teoria de conjuntos, outras áreas da matemática apresentavam problemas relacionados a sua base axiomática, havendo também a reformulação dos famosos axiomas da geometria Euclidiana. O trabalho de Hilbert desenvolveu a base rigorosa de axiomatização da Geometria Euclidiana, construída agora sob um sistema formal, ou seja, destituído da *interpretação euclidiana* da geometria.

Ainda nesse período, trabalhos semelhantes ao de Hilbert, em que a geometria é dissociada de seu conteúdo, foram corroborados pois, até então, a existência de tais estudos não era consolidada na matemática. As geometrias não-euclidianas usam uma base axiomática semelhante à dos *Elementos* de Euclides, mas as noções comuns e axiomas são distintos. Desse modo, ponto, reta e plano, podem assumir formas quaisquer de acordo com a teoria pretendida, isso implica em axiomas que versam sobre objetos quaisquer o que consequentemente gera espaços que atualmente podem parecer impossíveis de serem imaginados ou representados.

Essa perspectiva encontra respaldo e é corroborada pelo formalismo desenvolvido por Hilbert que, além de consolidar os estudos em geometria, foi responsável por avanços no campo da lógica matemática com a eliminação de métodos de demonstração considerados "intuitivos". Em particular:

> Hilbert foi um campeão do método axiomático. Criado por Euclides no séculoIII a.C., o método axiomático-dedutivo consiste em fundar toda uma ciência em uma base de verdades não demonstradas - os axiomas da teoria - a partir das quais se podem derivar todas as verdades dessa ciência por meios exclusivamente lógicos. (SILVA, 2007, p. 183)

Ressalta-se ainda que o uso do termo geometrias não-euclidianas não indica oposição, superação ou discordância da geometria euclidiana. Algumas comparações de forma direta entre tais geometrias são consideradas sem sentido, pois as

geometrias não-euclidianas existem em espaços não euclidianos, o que significa que possuem noções comuns diferentes e objetos distintos. Isso significa que ambas as geometrias existem e são utilizadas de acordo com os espaços definidos:

> Moritz Pasch desenvolveu a ideia de que a inferência lógica deve ser neutra quanto ao tema. Pasch escreveu que a geometria deve ser apresentada de uma maneira formal, sem depender da intuição ou observação quando se fazem inferências (SHAPIRO, 2015, p. 217)

Imaginar espaços não-euclidanos pode ser uma tarefa complicada e até impossível, pois não temos atualmente possibilidades ou tecnologias adequadas para a visualização de objetos infinitamente pequenos ou infinitamente grandes. Mesmo na geometria euclidiana, imaginar retas ou planos infinitos em ambas as direções exigem muita intuição. Então, eliminar a noção intuitiva da geometria e também da matemática é algo que será reforçado a partir do trabalho de Hilbert e de sua filosofia da matemática.

A influência dos *Fundamentos da Geometria* no campo filosófico deu origem ao dedutivismo que propõe a separação clara e objetiva das linguagens utilizadas para descrever as formulações e teoremas matemáticos, das inferências lógicas deles. Para o dedutivismo a importância da matemática e de seus significados ficam legitimados pelo uso do método de dedução lógica, que confere um caráter verdadeiro e fundamental para a utilização da matemática como ferramenta.

> Do ponto de vista semântico moderno [teoria dos modelos], se uma inferência [dedução] com premissas Γ e conclusão Φ é válida, então Φ é verdadeira sob qualquer interpretação que torne verdadeiras todas as premissas em Γ. A ideia por detrás do dedutivismo é ignorar a interpretação e apegar-se às inferências. (SHAPIRO, 2015, p. 216)

Sem negar as bases contidas no formalismo de jogos, o dedutivismo ressalta os métodos como essenciais para a matemática e sua validade fica condicionada a validação e dedução lógica. Nisso, ao retornarmos as inconsistências do formalismo de jogos, o dedutivismo consegue fornecer respostas para a finalidade e relevância de se jogar o jogo da matemática.

Tem-se, então, uma matemática justificada e reconhecida como verdadeira a partir da validação lógica, uma ferramenta importante que valida as asserções. Ainda que verse sobre objetos que podem ser considerados inexistentes, as questões em aberto inerentes ao formalismo de jogos como: a importância de se jogar a matemática; e a preferência de se jogar o jogo da matemática em relação aos outros, são respondidas no dedutivismo. Uma delas pode ser a inquietação humana na busca por explicações verdadeiras sobre a realidade. Como a matemática é agora um jogo validado pela lógica, as verdades matemáticas são também verdades lógicas.

Essa matemática preconizada pelo dedutivismo pode ser tanto desenvolvida pelos métodos axiomáticos como descrevemos anteriormente, ou elaborada a partir de um processo chamado de abstração formalizante. Ambos os métodos são validados na matemática atualmente, vemos em Silva (2007, p. 186) “Husserl chamava de abstração formalizante - ou formal - o processo de desvestimento de significados que gera uma teoria formal a partir de uma teoria interpretada” a descrição de tal processo e a relação com o desenvolvimento da matemática.

Isso significa que o fazer matemático a partir da abstração formalizante consiste na “retirada” dos objetos do domínio específico gerando uma espécie de “molde formal” para outros domínios, considerando apenas seus aspectos lógicos. Desse

modo, é possível partir de: Teorias interpretadas (geometria) - para: teorias não interpretadas, simbólicos formais (teoria formal).

Como exemplo de teorias interpretadas e não interpretadas, recorremos novamente a geometria euclidiana e as geometrias não-euclidianas e, novamente, ressaltamos que uma não sobrepõe ou nega outras, apenas transforma o "conteúdo específico" para a ausência de "conteúdo". Esse processo é importante pois:

> A abstração formalizante - ou formalização simplesmente - é um estratagema para manter os procedimentos dedutivos no interior de um sistema axiomático-dedutivo dentro dos limites estabelecidos. Ademais, ela tem a vantagem de pôr às claras o arcabouço lógico de uma teoria. (SILVA, 2007, p. 187)

Essas teorias não interpretadas possuem inúmeras possibilidades e ainda somos incapazes de prever os limites e a consequência desse conhecimento. Isso porque, uma vez abolidas ou corrigidas as teorias formalmente inconsistentes, elas ganham em seu aspecto formal aquela validade lógica preconizada pelo dedutivismo. "Uma teoria interpretada - Euclides (geometria) - pode ser fomal ou informal. Mas uma teoria não interpretada – Geometria de Hilbert – é sempre formal." (SILVA, 2007, p. 186).

Neste novo aspecto, a matemática é vista como um jogo de consequências verdadeiras, esse conceito destaca o formalismo como ferramenta importante para a compreensão da matemática tal como ela é desenvolvida atualmente. Segundo Silva (2007, p. 187): "Hilbert liberou o método axiomático de suas limitações, abrindo-lhe os horizontes do puro formalismo". Ou seja, reduzir os objetos do domínio matemático para o domínio lógico e formal eliminando a intuição, significados e quaisquer outras inconsistências transforma a visão sobre a matemática e dá origem a um novo significado filosófico.

Assim, o dedutivismo revela consistência em seu arcabouço teórico que, partindo das premissas do formalismo, responde as questões filosóficas da matemática de maneira contundente. Os *Fundamentos da Geometria* de Hilbert e os novos desenvolvimentos matemáticos, como as geometrias não-euclidianas, dão ao dedutivismo respaldo matemático e filosófico. Além disso, a possibilidade da criação de geometrias ou ainda "teorias matemáticas" sem a necessidade da interpretação de seus elementos caracterizam o real sentido do dedutivismo, que é o de uma matemática formal e verdadeira acerca do nada.

> Thomae também observa que "a perspectiva formal nos livra de todas as dificuldades metafísicas". Uma das principais motivações, então, parece ser bloquear, evitar ou contornar (de alguma forma) qualquer compromisso ontológico com um domínio problemático de objetos abstratos. Pois, a matemática padrão implica uma abundância de teoremas que afirmam a existência de infinitos domínios de entidades — números, funções, conjuntos e assim por diante, entidades que não parecem ser concretas. Os formalistas, em geral, desejam se desfazer de qualquer compromisso com esses domínios que, de fato, parecem difíceis de encaixar em uma concepção totalmente naturalista da realidade. (STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY, 2019, tradução nossa)[3]

[3] Tradução livre de: *Thomae also remarks 'the formal standpoint rids us of all metaphysical difficulties' (ibid: 184). One main motivation then seems to be to block, avoid, or sidestep (in some way) any ontological commitment to a problematic realm of abstract objects. For standard mathematics entails a plethora of theorems affirming the existence of infinite realms of entities—numbers, functions, sets and so forth, entities which do not seem to be concrete. Formalists, in general, wish to divest*

Consequentemente, essas novas perspectivas do formalismo sugerem um novo modo de se ensinar o jogo matemático, que pode ser baseado nesse método de "abstração formalizante". É nesse ponto que retornamos ao objetivo inicial deste trabalho.

No campo educacional, procedimentos semelhantes ao da "abstração formalizante" podem ser interessantes para o ensino de matemática, bem como o ensino de teorias formais no lugar de teorias interpretadas aproxima o ensino de matemática ao verdadeiro conhecimento matemático. Isso indica que eliminar do ensino de matemática as contextualizações provenientes das teorias interpretadas pode aproximar o estudante daquilo que é de fato a matemática preconizada pelo dedutivismo e em geral, também pelo formalismo.

Se tomássemos a abordagem dedutivista para desenvolver a proposta de educação matemática orientada pelo formalismo, objetivando o ensino de um jogo lógico formal, as regras da lógica, de deduções e os processos de argumentos por indução seriam necessários antes de qualquer matemática.

Um estudante no início de seus estudos em aritmética elementar provavelmente não conhece todo o aparato lógico necessário para compreender a estrutura de axiomatização da aritmética. Ou seja, o limite entre o formalismo de jogos e o dedutivismo seria cruzado, pois se seguíssemos a concepção puramente dedutivista para uma proposta pedagógica, os critérios de verdade matemática deveriam ser explicitados e defendidos, mas isso só é possível com o auxílio da lógica, um outro campo de conhecimento.

Mas, ensinar lógica não é o objetivo deste trabalho. Por isso adotaremos a versão do formalismo de jogos, onde a noção de validade lógica em relação a regra do jogo não é necessária, as regras do jogo podem ser arbitrárias. Isso não significa que abriremos mão das validades lógicas, ao contrário, elas serão ferramentas fundamentais para o trabalho, mas o que chamamos de axiomas será entendido como regras do jogo e, consequentemente, esse jogo precisa respeitar suas regras para ser considerado válido.

---

themselves of any commitment to these domains which do, indeed, seem hard to fit into a thoroughly naturalistic conception of reality.

3 APRESENTAÇÃO DE UM JOGO

Como o formalismo de jogos preconiza a matemática tal qual um jogo, podemos apresentar um jogo e compará-lo com o jogo da matemática. Para isso escolhemos o futebol, pois suas regras e objetivos são mundialmente conhecidas fazendo parte do imaginário coletivo. Entretanto, supondo que um estudante desconhecesse o futebol ou que precise de relembrar sua dinâmica de jogo, um professor atribuído a essa tarefa começar a apresentação do futebol a partir de seus elementos básicos como bola, campo, trave para posteriormente esboçar as possíveis jogadas como drible, passe de bola, entre outros. Nasce, dessa ordem de apresentação, a necessidade de definir, antes de qualquer regra ou jogada especifica, o que a bola, o campo e as traves, bem como o local onde esse jogo pode ocorrer.

O futebol costuma acontecer em uma quadra de esportes ou campo gramado retangular. No entanto, essa convenção não o impede de ser praticado em localidades diversas. Pode-se dizer que basta um terreno, plano ou inclinado, com marcações que delimitem o local do jogo, podendo ser feita de maneira informal inclusive, como é o caso das ruas em bairros pouco movimentados. Assim, apresentar o local de jogo a um estudante principiante significa apenas indicar as possibilidades de lugares em que possa ser possível a aplicação de regras para realização do jogo.

Com os locais de jogo delineados pode-se prosseguir com a apresentação dos elementos, seguidos das regras e objetivos do jogo. No caso do futebol, a menos de jogadores e pessoas envolvidas, um elemento importante é a bola. A bola está relacionada com as traves que por sua vez pertencem aos campos/times e sem esses elementos não podemos distinguir as funções de cada pessoa e muito menos as regras do jogo.

A bola, como tradicional e amplamente conhecida, é esférica e de material emborrachado. Mas tal como o local de jogo, existem inúmeras possibilidades que definem uma bola de futebol. De modo geral basta o cumprimento de uma finalidade, se mover de um ponto a outro do campo, para que determinado objeto seja denominado bola. Quanto às traves, podem ser apenas marcações realizadas no local do jogo, indicando o local onde a bola deve entrar para que determinado time realize a marcação de um ponto no jogo.

Com isso, os elementos podem ser associados a funções de cada jogador e ainda à separação de times para que se inicie a disputa. Com os elementos e o local de jogo é possível realizar não apenas o futebol, mas o basquete, por exemplo, pode ser jogado utilizando uma bola esférica e um campo gramado. Ou seja, locais prováveis e elementos importantes não caracterizam por completo um jogo. O que falta para definirmos que o jogo será o futebol é justamente aquilo que o diferencia dos outros, as regras. As regras, juntamente com os elementos elencados há pouco, caracterizam o futebol. Como em qualquer jogo, se não existirem regras que associem os elementos e as funções de um jogador não é possível realizá-lo. Portanto, as regras são fundamentais.

Um exemplo de regra do futebol, quando um jogador possui a função de goleiro, é impedir que a bola cruze a linha que separa a área do campo da área determinada pelas traves. Se a bola cruzar a linha de divisão entre o campo e trave o ponto é atribuído ao time adversário. Essa regra é uma das principais do futebol, pois é através dela que os times podem realizar pontos e ganhar uma partida.

Regras semelhantes são devem ser apresentadas a esse estudante que por hipótese não conhece o futebol, como o detalhamento das demais regras não é o objetivo do nosso trabalho, podemos considerar apresentadas as regras e objetivo do

jogo, que é a realização de mais pontos contra o time adversário e assim o futebol fica viabilizado.

É evidente que apenas regras e objetivos não fornecem as estratégias e jogadas que possam levar determinado time ou jogador a vitória. O objetivo do futebol é facilitado quando apresentadas opções de movimentos que facilitem a realização da marcação de um gol. Esses são melhor observados durante a realização de uma partida, pois é nela que se pode observar comportamentos e brechas na movimentação dos oponentes.

Desse modo, as estratégias de boas jogadas são aprendizados decorrentes de observações e ponderações que podem ser obtidas no ato do jogo. Esse é um aprendizado oriundo da experiência e da realização do jogo, e, na matemática, ocorre de modo similar. Ou seja, um jogador experiente sabe que para jogar o *jogo aritmético* é preciso conhecer além de seus elementos e regras, é durante e depois das partidas que acontecerá o aprendizado de estratégias eficientes para uma boa partida.

Apresentar o futebol da maneira feita anteriormente, com seus elementos e regras, pode ser parafraseada durante uma aula simples, que dura de 45 a 50 minutos, com crianças do 3º ano do Ensino Fundamental. Para organizar as informações propomos um modelo de plano de aula para apresentação do futebol que posteriormente será associado com a apresentação da aritmética.

Um modelo de plano de aula para apresentação do futebol a crianças do 3º ano do Ensino Fundamental se inicia com exploração dos elementos básicos do jogo e o desenvolvimento da coordenação motora, noções espaciais e cooperação. Para isso, são apresentados os componentes essenciais do futebol a bola, o campo, as traves e os jogadores. As regras simples tais como o objetivo de fazer gols, o uso dos pés para conduzir a bola e a importância do respeito entre os participantes vêm na sequência.

O encontro inicia-se com um momento de conversa inicial, no qual o professor questiona os alunos sobre seus conhecimentos prévios sobre o futebol e apresenta imagens ilustrativas. Em seguida, realiza-se um aquecimento lúdico para seguir a bola, no qual cada criança explora movimentos básicos, como correr, parar e chutar a bola suavemente, desenvolvendo familiaridade com o objeto e trabalhando a coordenação motora.

A atividade principal é organizada em grupos nos quais as crianças podem realizar sequências de chutes ao alvo, passes em dupla e condução da bola em um circuito simples. Essa dinâmica favorece a participação de todos, a cooperação e a experimentação de diferentes aspectos motores do futebol. Após as rotações, propõe-se uma partida inicial e adaptada, em um campo reduzido e com regras simplificadas. O foco é a vivência colaborativa do esporte, e a compreensão das regras e o objetivo, não a disputa propriamente dita.

Os materiais utilizados incluem bolas, cones ou garrafas plásticas para demarcação, coletes coloridos e imagens temáticas. A avaliação ocorre de forma contínua e qualitativa, observando-se o envolvimento dos alunos, sua compreensão das regras, o respeito aos colegas e os progressos na coordenação motora. A aula é finalizada com uma breve conversa sobre o que foi aprendido, destacando valores importantes como trabalho em equipe e respeito mútuo, seguida de um pequeno exercício de relaxamento e alongamento.

4 APRESENTAÇÃO DO *JOGO ARITMÉTICO*

Assumimos, pelo formalismo de jogos, que a aritmética elementar é um jogo e como já apresentamos no capítulo anterior os elementos, regras e objetivos do futebol, é possível utilizá-los e construir uma analogia para apresentar a aritmética elementar. O ponto de partida para apresentação do futebol foi o ambiente do jogo e de modo análogo devemos considerar o contexto do *jogo aritmético,* supondo a apresentação dele a um estudante que nada ou pouco sabe sobre aritmética.

O espaço em que o futebol é realizado é aquele convencionado entre os participantes no momento do jogo, pode ser o tradicional campo gramado retangular, mas nada impede que a partida do jogo aconteça em uma rua de asfalto. O *jogo aritmético* ocorre de forma similar ao futebol, não se estabelece um ambiente exclusivo e determinado para a prática desse jogo, pode ser físico ou imaterial.

Em geral são utilizados caderno, lousa, tela do computador, ou seja, apresentar o ambiente a um estudante principiante consiste em contextualizar ambientes para a aplicação de regras, pois são elas que definem como seus elementos podem interagir para alcançar um objetivo.

No futebol, uma vez determinado o ambiente de jogo, são apresentadas suas regras e com elas seus principais elementos, sendo a bola um componente indispensável. O papel da bola no futebol é caracterizado pela ação dos jogadores. Sem ela é impossível realizar qualquer jogada.

Se no futebol a bola é imprescindível, no *jogo aritmético* o número é o que possui essa importância. Os números permitem, entre outras coisas, a abstração de quantidades bem como a realização de contagens e operações. Mas, números são conceitos abstratos e sua representação é o que possibilita a comunicação e a realização do jogo aritmético de maneira concreta.

Para representar números, em geral utilizam-se símbolos que exprimem determinada quantidade, esses são chamados de numerais. Uma forma simples e intuitiva de numeral são as barrinhas alinhadas e simétricas, onde uma unidade é I e as demais unidades são aglutinações desta mesma representação, sendo um, dois, três, etc representados I, II, III, IIII, IIIII e assim sucessivamente.

Representar números com barrinhas ou pontinhos foi uma novidade nos primórdios da humanidade. No entanto, quando utilizamos quantidades maiores, como o número nove ou o número oito a captação visual fica prejudicada. As sequências de barrinhas IIIIIIIII e IIIIIIII quando observadas rapidamente e sem atenção parecem ter a mesma quantidade. Surge, portanto, a necessidade de outra forma de representação, e é nesse contexto que aparecem os algarismos.

Para simplificar a sequência de barrinhas IIIIIIIII e IIIIIIII são utilizados os símbolos 9 e 8, provenientes dos algarismos indo-arábicos. São dez símbolos amplamente difundidos e que representam de zero até nove unidades (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Seu uso na atualidade, através do sistema de numeração decimal, estabelece regras de posicionamento que viabilizam a escrita de dezenas, centenas, milhares, etc.

Os números posteriores a 9 unidades são representados pela justaposição de dois símbolos, um para representar as dezenas e outro para representar as unidades. Facilitando a apreensão visual, visto que representar nove dezenas e uma unidade por meio de barrinhas IIIIIIIIIII...I seria excessivamente longo e trabalhoso, enquanto a notação 91 é visualmente facilitada. Com isso, a ordem de escrita das unidades (U),

dezenas (D) e centenas (C) é estabelecida da esquerda para a direita formando a estrutura CDU. O sistema é expandido para milhares, milhões, bilhões, etc., utilizando a mesma ordem.

Esse sistema de numeração é chamado decimal justamente por possuir 10 símbolos que são capazes de representar qualquer número. O surgimento desses símbolos foi o resultado de um longo processo histórico de uso, adaptação e difusão entre distintos povos e culturas. Destacamos ainda que essa maneira de representar não é única, povos e culturas mais isoladas ou distantes utilizaram outros símbolos e sistemas de numeração distintos como o sistema maia e o sistema babilônico.

Com isso, os algarismos são facilitadores indispensáveis para a aritmética pois permitem a escrita de números grandes de maneira concisa e visualmente direta. Além disso, os algarismos permitem a criação de algoritmos para a realização de operações entre eles. Mostrando que o conceito de número em sua representação enquanto numeral e algarismo é elementar para o *jogo aritmético* e, mesmo que exista a variação de símbolos, o uso deles é o que importa para a realização de operações.

Além de permitir a realização de operações, os símbolos numéricos favorem a comunicação de quantidades e a realização do *jogo aritmético*. Sem eles é improvável estabelecer regras, objetivos ou estratégias. De modo análogo, os números (algarismos) ocupam na aritmética o mesmo papel que a bola ocupa no futebol.

No futebol, as jogadas realizadas utilizando a bola possuem objetivos claros e definidos, uma delas é atravessar a área delimitada pelas traves; outro objetivo é manter a bola dentro do campo, entre outros. Na aritmética, os números também possuem diversas finalidades, não sendo possível designar um único e fixado objetivo.

Com números é possível reunir e separar quantidades, ou ainda agrupá-las em quantidades semelhantes. São as chamadas operações entre números. Agrupar quantidades é o mesmo que somar, com isso podemos estabelecer a soma como o processo de agrupamento de barrinhas que descrevemos acima. Somar duas barrinhas com três forma uma nova sequência de cinco barrinhas (IIIII). O mesmo ocorre com as operações de subtração, multiplicação e divisão.

Elas constituem as primeiras jogadas a serem realizadas no *jogo aritmético*, mas números também são utilizados para registrar, medir, enumerar, ordenar, etc. Ou seja, com os números e a aritmética elementar são realizadas atividades que aplicam concretamente as operações abstratas.

Isso permite que o jogo aritmético tenha aplicabilidade para além do próprio jogo. No entanto, isso não é observado no futebol. É nesse ponto que podemos destacar uma dissonância entre o *jogo aritmético* e o futebol. O futebol é um jogo que pode ser associado a aplicações e contextos como ir a feira comprar maçãs, mas essa associação é casual e as regras do futebol não se aplicam diretamente a essa ação da realidade. Mas, no *jogo aritmético,* as operações e relações permanecem válidas em contextos distintos.

Exemplos clássicos no ensino de aritmética elementar são aqueles em que ações corriqueiras, como ir comprar frutas na feira, são associadas a quantidades e as operações básicas. Assim, somar II com III é convertido para um problema do tipo “Joana tinha duas maçãs em casa, foi a feira e comprou três maças, qual o total de maças que Joana possui?”, onde as barrinhas representam as maças e a adição ganha sentido de aquisição ou compra.

Essa possibilidade de associação dos elementos da matemática e a interpretação das operações é uma distinção entre o futebol e a aritmética. É também um dos pontos fracos do formalismo de jogos, pois a premissa de que a matemática

é apenas um jogo como outro qualquer desconsidera que ela possui aplicações importantes para a humanidade.

Isso não invalida a matemática como um jogo pois o formalismo de jogos continua a prescrever a matemática como tal. Mas jogos como damas ou boliche não possuem a mesma riqueza de possibilidades. Entretanto, utilizar exemplos contextualizados não estariam de acordo com o ensino de matemática prescrito pelo formalismo de jogos, é uma possibilidade, mas pode não ser conveniente.

Retomando, então, a apresentação do *jogo aritmético*, vemos que o ambiente de jogo é aquele que permite o movimento de seus elementos, neste caso, os numerais. Os movimentos dos numerais ou algarismos ocorrerá seguindo determinadas regras e são elas que diferenciam e definem um jogo. Quando falamos do futebol, tínhamos um ambiente, campo gramado, e um elemento, a bola. Com campo e bola podemos jogar vôlei, basquete ou beisebol. Ou seja, as regras de movimento da bola é que podem caracterizar qual exporte será praticado.

No *jogo aritmético,* temos a mesma caracterização, os elementos e os espaços não definem um jogo, é o conjunto de regras, as manipulações de caracteres, a interação entre os jogadores, dentre outros, que caracterizará o jogo. Com uma lousa ou caderno e numerais ou algarismos podemos realizar jogo como Sudoku, que pouco ou nada tem a ver com aritmética.

Na aritmética formal o conjunto inicial de regras utilizadas são chamados de axiomas. Os axiomas não são exatamente as regras de um jogo, a definição de axiomas e a escolha de alguns em detrimento de outros é um debate aberto entre filósofos da matemática. Mas, não queremos apresentar a aritmética formal a um estudante principiante, então, não apresentaremos os axiomas da aritmética formal.

Além disso, apresentar os axiomas da aritmética elementar para um estudante requer que as noções de lógica e a abstração de raciocínios indutivos sejam conhecidas. Daí a necessidade de algumas adaptações entre elas o uso do sistema unário e a adaptação dos axiomas formais para um conjunto de regras.

Assim, podemos utilizar símbolos do sistema unário, que possui apenas um símbolo “I” para representar uma unidade e as demais são formadas pelas sequências de barrinhas agrupadas. Assim, duas regras ficam estabelecidas:

a) I representa uma unidade
b) I $\wedge$ I = II (duas unidades), II $\wedge$ I = III (três unidades), e assim até obtermos **n** barrinhas IIIII....I que representam **n** unidades e então IIIII...II representará **n + I** unidades.

Com essas duas regras simples temos a ideia de quantidade unitária e a contagem de mais de uma unidade. A explicação desses dois axiomas para estudantes de aritmética elementar é facilitada quando explicitados os elementos e símbolos que a compõem como “**n**” unidades sendo um símbolo para qualquer quantidade e o símbolo “$\wedge$” é a concatenação das barrinhas.

Tradicionalmente, quando somos introduzidos ao processo de contagem, as situações de contexto são apresentadas e as representações de maças parecem apropriadas para se demonstrar que os agrupamentos de algumas maçãs formam uma quantidade nova a ser denominada. Dessa forma, agrupar quantidades é a primeira e uma das mais intuitivas formas de apresentação da operação de adição da aritmética, tanto como conteúdo escolar ou como um jogo, parece simples e intuitiva a capacidade de uma criança para agrupar objetos.

Surge, desse modo, a adição que é a regra dada no item b, onde o estudante pode agrupar uma ou mais barrinhas. É a concatenação delas em uma nova e única sequência que representara um novo número resultado daquela operação. Tão simples quanto agrupar maças que estavam espalhadas por um quarto e agora devem estar dentro de um cesto.

Assim, por exemplo, o número dois representado por II é o resultado da adição de I + I e, analogamente, III = I + I + I. O símbolo "=" representa a equivalência de quantidade entre os dois lados e a adição "+" é o símbolo que representa uma ação do jogo que deve ser realizada. Com isso, podemos dar duas barrinhas "I, I" e solicitarmos através do símbolo de adição "+" que o estudante realize a jogada pedida, tal como seu tutor solicita que ele guarde dois lápis em um estojo. Prosseguindo para quantidades maiores, tem-se a seguinte apresentação:

I + I = II
I + II = III
I + III = IIII
I + IIII = IIIII
...

Observe que a realização dessas jogadas pelo estudante é apenas uma organização e posicionamento de símbolos e não é necessário compreender algo além da própria maneira de manipulação. O aprendizado recai então na organização desses símbolos e em como operá-los. A intuição desses termos, e sua interpretação, é dispensada e a realização da operação com exemplos contextualizados no cotidiano não precisam fazer parte do ensino do *jogo aritmético*.

Vemos algo equivalente a isso no ensino tradicional de aritmética elementar, quando somos apresentados ao sistema decimal. Em geral associa-se a determinada quantidade a exemplos como maças ou laranjas e em seguida a operação de adição dessas frutas. Como passo final desse processo somos levados as tabuadas de adição que apresentam todos os 10 algarismos indo-arábicos:

1 + 0 = 1
1 + 1 = 2
1 + 2 = 3
1 + 3 = 4
1 + 4 = 5
1 + 5 = 6
1 + 6 = 7
1 + 7 = 8
1 + 8 = 9

Essa tabuada da soma apresenta os 10 algarismos partindo sempre de uma unidade adicionada ao resultado a linha anterior. A primeira linha é a definição do processo e o zero, neste caso, é o número que não possui antecessor e, além disso, o elemento neutro da adição. Para as somas com duas unidades uma tabuada semelhante é apresentada, com o 2 na primeira coluna e todos os outros 10 algarismos sendo adicionados a 2, para os demais números o processo se repete.

O uso de tabuadas de soma é comum e amplamente utilizado nos anos iniciais do ensino fundamental implícita ou explicitamente, de modo análogo podemos utilizar tabuadas de adição para realizar essa operação no *jogo aritmético* com as barrinhas

verticais. A ideia agora é apresentar a adição como uma jogada, semelhante a um passe de jogo no futebol, e verificar se essa jogada está de acordo com as regras definidas.

Quando apresentamos o futebol, após as regras trazemos o objetivo do jogo e com isso é possível a realização de exemplos que ocorrem em partidas do futebol. Por exemplo, se um goleiro deixa a bola ultrapassar a linha da trave, então é realizado ponto para o time adversário, mas, se a bola não bate na trave e não cruza a linha do gol, nenhum ponto é realizado.

Em analogia ao exemplo do futebol é possível associar pontuações no *jogo aritmético* determinando como objetivo principal a manipulação correta de seus símbolos. Assim, ao somar III + II somente um resultado é possível, a sequência IIIII. Do contrário, a regra de concatenação seria violada e então a jogada ficaria invalidada.

A vantagem de compreender a aritmética como um jogo é que os erros de um estudante não são vistos como ocorrências graves que podem levar a desmotivação. Os erros de um jogo são apenas faltas que o estudante está cometendo e, portanto, deve evitá-las para realizar o objetivo do jogo. Desse modo, o desafio de superar a falta pode ser motivador em casos de repetidos erros.

Com regras e objetivos definidos, uma infinidade de jogadas se torna possível e o jogo aritmético certamente se ampliará, surgindo novas regras que são chamadas de propriedades. Uma delas é a comutatividade, que consiste na igualdade de resultados em que a ordem da adição é trocada. Por exemplo, somar II com III tem resultado IIIII, somar III com II também possui resultado IIIII. Então, II + III = III + II = IIIII. Contextualizando essa jogada com maçãs, dizemos que a comutatividade é equivalente a comprar duas maças na feira e depois mais três no mercado, totalizando o mesmo que comprar primeiro três no mercado e depois duas na feira.

A associatividade é outra propriedade importante para a realização da soma e determina que a soma de dois termos (a e b) adicionado ao terceiro (c) é o mesmo que somar o segundo e o terceiro (b e c) e em seguida adicionar o primeiro (a). Na linguagem simbólica temos, por exemplo, II + III + IIII = (II + III) + IIII = II + (III + IIII) = IIIIIIIII. O uso dos parênteses indica a prioridade na realização da soma, primeiro se resolve o que está dentro deles e depois o restante.

Essas propriedades são formalmente demonstradas na aritmética elementar e decorrem dos axiomas que definem a adição. Assim, ao realizar uma jogada no *jogo aritmético* o estudante deverá seguir essas propriedades. Não segui-las acarreta na invalidação da jogada e perda de pontos.

Exemplos de exercícios que exploram a associatividade e comutatividade são:

a) realize a adição de III + IIIII
b) realize a adição de III + II + I
c) as adições anteriores possuem o mesmo resultado, por que?
d) a adição de IIIII + III é a mesma que III + IIIII? Por que?

Veja que esses exercícios diferem daqueles que se valem de contextualizações do tipo somar maçãs ou bananas, as jogadas se restringem unicamente a manipular símbolos conforme as regras. No item c e d o jogador pode justificar seu pensamento se baseando apenas nas regras apresentadas.

Dessa maneira, o *jogo aritmético* está de acordo com os pressupostos do formalismo “As fórmulas dessa linguagem são, ou são tratadas como se fossem, sem interpretação, possuindo apenas a forma sintática de sentenças às quais podemos

aplicar regras formais de transformação e inferência, mas sem qualquer semântica" (STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY, 2024, tradução nossa)[4].

Naturalmente, a oposição entre ensinar o jogo aritmético e ensinar aritmética elementar parece reduzida e vimos que muito do que é ensinado em aritmética elementar pode ser visto como o ensino de um jogo. Retomando a motivação desse trabalho, que investiga o ensino da matemática prescrita pelo formalismo de jogos, é possível observar que ele já é uma das correntes vigentes no ensino de matemática.

Com isso, um modelo de plano de aula direcionado a estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental para trabalhar especialmente a operação de soma segundo o formalismo de jogos pode ser organizado. A adição é um dos "movimentos permitidos" dentro do jogo e a aula pode se iniciar com situações cotidianas em que somar aparece naturalmente: juntar brinquedos, contar amigos, adicionar pontos em jogos, etc. A partir dessas experiências, o professor apresenta a adição como a regra que permite concatenar duas quantidades tornando-se uma terceira.

Assim como no futebol, onde existem ações estratégicas como passes, chutes e defesas, na aritmética a adição representa um tipo específico de ação simbólica. Para tornar isso evidente aos estudantes, utiliza-se material concreto como tampinhas, blocos ou palitos, esses desempenham o mesmo papel das barras alinhadas que utilizamos anteriormente. Elas devem juntar esses materiais para compreender a formação do total e através desse processo temos a introdução de um "movimento básico" do *jogo aritmético*: juntar conjuntos.

A atividade pode ser organizada em grupos temáticos que abordem diferentes representações da soma. Em um grupo, as crianças unem objetos e registram o total com o símbolo "+" e outros grupos podem resolvem desafios visuais que relacionam quantidades representadas em desenhos. Esses grupos representam o treino dos movimentos do jogo e podem ser trocados ao final de uma "partida" para que sejam desenvolvidas estratégias de cálculo em diferentes contextos, que não necessariamente estejam associados a situações do cotidiano.

Ao final das atividades, o professor reúne os estudantes a fim de comparar as representações concretas e simbólicas da adição, revelando que, embora as existam variadas formas e maneiras de ocorrência da adição, a regra utilizada é a mesma que utiliza barrinhas alinhadas verticalmente. Para encerrar a aula, o professor destaca a importância da adição como operação fundamental do *jogo aritmético*, assim como chutar, passar ou marcar um gol fazem parte do jogo de futebol.

[4] Tradução livre de: *The formulae of this language are, or are treated as if they are, uninterpreted, having the syntactic form of sentences to which we can apply formal rules of transformation and inference but no semantics.*

5 CONCLUSÃO

O trabalho teve como hipótese: *"se a matemática é aquilo prescrito por uma filosofia da matemática, então ensinar matemática deve estar em acordo com o que é postulado por tal filosofia".* A escolha de uma das correntes filosóficas foi orientada pela simplicidade pois, adequar a perspectiva de uma corrente filosófica com o ensino de matemática para iniciantes é um desafio. Partimos daquela que se apresenta de maneira simples e, portanto, mais adaptável ensino de matemática.

O formalismo de jogos permitiu a comparação entre o jogo da matemática com o futebol, uma vez que ambos são jogos e, por isso, possuem elementos comuns e passíveis de comparação. Assim, a matemática, postulada pelo formalismo de jogos, pôde ser apresentada em analogia ao futebol, um dos jogos mais famosos do Brasil e do mundo. Seus elementos, regras e locais de jogo foram apresentados em analogia ao de um esporte, indicando que o ensino de matemática pode ser realizado de forma semelhante ao ensino do futebol.

A adoção do formalismo de jogos viabiliza uma abordagem pedagógica coerente com sua visão filosófica: o foco recai sobre a estrutura das regras de um jogo e não sobre interpretações externas, o que permite ao estudante desenvolver estratégias operatórias independentes de contextos concretos.

O formalismo de jogos é uma dentre tantas escolas filosóficas que podem contribuir com o ensino de matemática. O trabalho apresentou as implicações relacionadas apenas ao formalismo de jogos, mas o platonismo, o construtivismo, bem como as variações deles podem ser utilizadas. Indicando que a conexão entre filosofia e ensino de matemática possibilita novas e múltiplas abordagens pedagógicas.

A escolha do formalismo de jogos não significa que este é melhor ou pior que aquele. Isso porque, em filosofia, “Não há, não pode haver, nem deve haver uma correta filosofia da matemática” (SILVA, 2007, p. 236).

Por fim, esse trabalho oferece um esboço e indicação sobre as possibilidades existentes entre filosofias da matemática e ensino de matemática. Ao longo dele, o reconhecimento do papel da filosofia da matemática no ensino de matemática fica evidenciado. E, parafraseando o título do trabalho *FORMALISMO DE JOGOS: UMA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA* concluímos que o formalismo de jogos é uma possibilidade pedagógica.

REFERÊNCIAS

DA SILVA, Jairo José. **Filosofias da matemática**. São Paulo: UNESP, 2007.

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY. **Formalism in the philosophy of** mathematics. Disponível em:https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/formalism-mathematics/. Acesso em: 7 dez. 2025.

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY**. Formalism in the philosophy of** mathematics. Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/fall2024/entries/formalism-mathematics/. Acesso em: 7 dez. 2025.

SHAPIRO, Stewart. **Filosofia da matemática**. Lisboa: Edições 70, 2015

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Edgar, meu orientador, expresso minha sincera gratidão pela orientação dedicada, pela disponibilidade e ensinamentos que contribuíram não só para este trabalho, mas também para minha formação profissional.

A professora Ana Libório, pelo olhar atento e pela disponibilidade, sem os quais a finalização deste trabalho não teria sido possível.

Aos meus pais, Reginaldo e Gislaine, que sempre me motivaram nos estudos; e à minha irmã Thamires, cujo crescimento me impressiona.

Aos meus amigos Rafael e Gabriela, agradeço as horas dedicadas a escuta e a reflexão.

Aos professores e orientadores do Instituto Federal de Brasília que fazem parte da Especialização em Matemática, Educação e Tecnologias.

Ao meu companheiro Rafael Monteiro, que me conforta e inspira todos os dias.

À professora Cecília, cujo incentivo incondicional e apoio fizeram parte da minha jornada e me acompanham até hoje, seu exemplo me inspira.