INSTITUTO FEDERAL
Brasília
Instituto Federal de Brasília
Campus Estrutural
Licenciatura em Matemática

GUSTAVO HENRIQUE FONTINELE DA SILVA

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO JOGO DA SENHA NO ENSINO MÉDIO

Brasília
2023

GUSTAVO HENRIQUE FONTINELE DA SILVA

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO JOGO DA SENHA NO ENSINO MÉDIO

Artigo apresentado como Trabalho de Conclusão de curso ao Curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Estrutural do Instituto Federal de Brasília como requisito parcial para obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Wembesom Mendes Soares
Coorientador: Me. Bruno Marx de Aquino Braga

Brasília
2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

FICHA DE APROVAÇÃO EM BANCA EXAMINADORA

Trabalho de Conclusão de Curso

Discente: Gustavo Henrique Fontinele da Silva

Título: Raciocínio Combinatório: Aplicação e Validação do Jogo da senha no Ensino Médio .

Trabalho aprovado em: **15/07/2023**.

Brasília - DF, **15** de **Julho** de 2**023**.

Banca Examinadora

Orientador (Presidente): **Dr. Wembesom Mendes Soares**

Examinador A (membra): **Ma. Evelyn Helena Nunes Silva**

Examinador B (membra): **Ma. Adriana Barbosa de Souza**

RESUMO

O ensino tradicional da combinatória muitas vezes se baseia na memorização de fórmulas sem uma compreensão aprofundada do raciocínio por trás delas, o que pode gerar dificuldades tanto para os professores quanto para os estudantes. É essencial que as fórmulas sejam consequência do desenvolvimento do raciocínio combinatório ao resolver problemas. Nesse sentido, recursos didáticos que promovam o raciocínio combinatório de maneira significativa e contextualizada são de extrema importância. Um recurso promissor é o jogo, que desperta o interesse dos alunos e os engaja na resolução de problemas combinatórios. O objetivo principal deste artigo é analisar o impacto da aplicação do Jogo da Senha no Ensino Médio quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório. A relevância do tema foi identificada por meio de pesquisas documentais em textos norteadores da Educação Básica e levantamentos bibliográficos sobre o ensino e a aprendizagem do raciocínio combinatório. Essa relevância foi confirmada pelos insuficientes níveis de proficiência dos alunos nesse tema, evidenciados pelos resultados do SAEB, assim como pela análise de Projetos Pedagógicos de Cursos (PPCs) de Licenciaturas em Matemática de Instituições de Ensino Superior (IES) do Distrito Federal, que revelaram desafios na formação dos docentes. A metodologia adotada neste estudo segue o modelo ADDIE, que compreende as fases de análise, design, desenvolvimento, implementação e avaliação. Na fase de avaliação este artigo conduziu-se para os níveis de reação e aprendizagem propostos por Kirkpatrick. Como ferramentas para avaliar esses níveis, foi adaptado um questionário de reação do estudante ao jogo e elaborado um questionário de pré e pós-teste para verificar a aprendizagem, permitindo uma validação qualitativa dos dados gerados. O jogo foi aplicado em uma turma do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Brasília e os resultados e percepções obtidos demonstraram um aumento significativo no desempenho dos estudantes após a utilização do jogo da senha, reforçando sua eficácia como recurso didático para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Palavras-chave: raciocínio combinatório; jogo da senha; modelo ADDIE.

ABSTRACT

Traditional combinatorial teaching often relies on the memorization of formulas without a deep understanding of the reasoning behind them, which can create difficulties for both teachers and students. It is essential for formulas to be a result of the development of combinatorial reasoning when solving problems. In this regard, didactic resources that promote combinatorial reasoning in a significant and contextualized manner are of utmost importance. One promising resource is the game, which engages students and sparks their interest in solving combinatorial problems. The main objective of this article is to analyze the impact of applying the Mastermind game in high school regarding the development of combinatorial reasoning. The significance of the topic was identified through documentary research on guiding texts in Basic Education and literature reviews on the teaching and learning of combinatorial reasoning. This relevance was confirmed by the insufficient levels of proficiency in this topic among students, as evidenced by the SAEB results, as well as by the analysis of Pedagogical Course Projects in Mathematics Education at Higher Education Institutions in the Federal District, which revealed challenges in teacher training. The methodology adopted in this study follows the ADDIE model, encompassing the phases of analysis, design, development, implementation, and evaluation. In the evaluation phase, this article aligned with the reaction and learning levels proposed by Kirkpatrick. Tools to assess these levels included an adapted student reaction questionnaire to the game and a pre- and post-test questionnaire to verify learning, allowing for a qualitative validation of the generated data. The game was applied in a 3rd-year class of high school at the Federal Institute of Brasília, and the obtained results and perceptions demonstrated a significant improvement in student performance after the use of the Mastermind game, reinforcing its effectiveness as a didactic resource for the development of combinatorial reasoning.

Keywords: combinatorial reasoning; Mastermind game; ADDIE model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figuras

Gráficos

Quadros

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Nas linhas de Morgado et al (2016), podemos afirmar que o desenvolvimento da análise combinatória ao longo da história está associado à teoria elementar das probabilidades, devido à necessidade de os participantes de jogos de azar, como cartas ou dados, procurarem formas de garantir uma vitória, precisando, para isso, resolver certos problemas de contagem. Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), referindo-se a Inhelder e Piaget (1951), reiteram que se o aluno não possui capacidade combinatória, ele não é capaz de usar a ideia de probabilidade, exceto com experimentos aleatórios muito elementares. Teixeira (2021) explica que mesmo tendo essa relação íntima com a probabilidade, a combinatória não se limita a essa área do conhecimento, tendo, por exemplo, uma grande aplicação na matemática discreta, em especial na Teoria dos Grafos. Cardoso e Guirado (2007) afirmam que o desenvolvimento dessa área de estudo tem grandes aplicações no dia a dia, como em problemas de transporte e na confecção de horários e planos de produção.

Ainda nas palavras de Morgado et al. (2016, p.1), pode-se dizer que análise combinatória "é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas". Já Hazzan (2013, p.1, grifo do autor), diz que a análise combinatória "visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos **agrupamentos formados sob certas condições**".

Sabo (2008) traz que, em sua experiência, os professores de matemática do ensino médio evitam trabalhar com o conteúdo de análise combinatória, uns justificam ser um tópico difícil de abordar, outros justificam que o tempo é curto e preferem dar maior ênfase para outros temas. Afirmam, ainda, não possuírem conhecimento considerável para trabalhar o assunto. À vista disso, o que se observa na prática educacional em combinatória, é um ensino tecnicista e operacional, isto é, os professores ensinam padrões nas questões para os alunos aplicarem uma fórmula pronta, não trabalhando assim a análise de cada problema (LIMA, 2011). Essa constatação vai de encontro ao que é preconizado nos direcionamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), pois vemos, no PCN+, que "As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande." (BRASIL, 2006, p. 126-127).

Nas próximas subseções, conduzimos uma breve investigação sobre a questão da combinatória na formação docente, passando por um pequeno levantamento de informações em alguns PPC's e pelos norteamentos de documentos fundamentais na Educação Básica.

1.1 Formação do professor de matemática

O ensino mecânico da análise combinatória, pode ser explicado sob a perspectiva de (BORBA et al, 2016, p, 235), que dizem que "O professor, em particular o de Matemática, desenvolve-se, enquanto profissional, a partir dos conhecimentos teórico-práticos adquiridos ao longo de sua formação. Enquanto estudante e, posteriormente, no exercício da docência." Ou seja, o professor aprendeu análise combinatória por meio de fórmulas prontas e repassa do mesmo modo para seus alunos. Nesse sentido, Martarelli e Silva (2020) explicam que, em se tratando da formação inicial do professor de matemática:

> [...] a contagem figura (ou figurou, para boa parte dos professores na ativa), em muitos cursos de licenciatura em matemática, ou como uma disciplina optativa ou um conteúdo dentro de uma disciplina obrigatória – como cálculo de probabilidades ou matemática finita. Isso faz com que seja frequente considerar esse conteúdo como um pré-requisito, não sendo revisitado com o objetivo de discutir as especificidades de ensiná-lo na educação básica. (MARTARELLI; SILVA, 2020, p.1545)

No intuito de ratificar/verificar esse comentário, fizemos uma breve pesquisa documental no Projeto Pedagógico do Curso (PPC) das Licenciaturas em Matemática das quatro Instituições de Ensino Superior (IES) do Distrito Federal que oferecem o curso na modalidade presencial: Universidade de Brasília (UnB), Universidade Católica de Brasília (UCB), Centro Universitário Projeção (UniProjeção) e Instituto Federal de Brasília (IFB).

No PPC de Licenciatura em Matemática da UnB, só existem as ementas de sete disciplinas obrigatórias voltadas à didática de conceitos matemáticos, assim a análise se torna de certa forma superficial, porém, nessas disciplinas com ementa, destacamos a disciplina "Álgebra para o Ensino 2" na qual existe uma menção direta a análise combinatória, contudo é um conteúdo a ser trabalhado dentre "funções, trigonometria, sistemas de equações lineares, sequências, cônicas, equações polinomiais e noções de estatística e probabilidade". Como referência bibliográfica para análise combinatória, consta o livro "Introdução à Análise Combinatória" de Santos et al. (2007). Nas disciplinas optativas, o PPC prevê a disciplina "Análise Combinatória", e outras que teoricamente necessitam de uma base combinatória como "Introdução a Teoria dos Grafos".

Na UCB, de forma parecida com o que acontece na UnB, aparece a combinatória de forma direta apenas em uma disciplina, "Pesquisa e Prática De Ensino Em Matemática II", abordando diversos conteúdos na ementa:

> Resolução de Problemas e Modelagem. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Números reais e complexos. Funções algébricas elementares. Funções trigonométricas. Funções exponenciais e logarítmicas. Sequências numéricas e progressões. **Análise combinatória** e probabilidade. Estatística. Preparação, execução e avaliação de experiências de prática de ensino nesses conteúdos especificados. (UCB, 2010, p.65, grifo nosso)

Porém, essa ementa tão abrangente acaba refletindo na bibliografia do componente ofertado, pois não apresenta nenhum livro que seja especificamente de análise combinatória. Nessa universidade não existem disciplinas optativas e a ementa da disciplina de "Probabilidade e Estatística" não apresenta embasamento combinatório.

No UniProjeção não se tem claramente nada a respeito sobre combinatória. Mesmo em uma disciplina que aborda distintos conteúdos da educação básica, como é o caso da disciplina "Elementos da matemática", não existe uma abordagem combinatória. Existem ainda algumas disciplinas optativas no PPC, porém não está claro se é um rol taxativo ou exemplificativo, de toda forma nenhuma das 5 disciplinas encontradas contempla a Análise Combinatória. A disciplina "Probabilidade e Estatística" segue a tendência de ignorar a análise combinatória, mesmo sendo esse um conteúdo fundamental para os estudos iniciais em Probabilidade.

Por último, o IFB também não aborda nos componentes curriculares do curso o conteúdo de análise combinatória. A exceção fica à cargo de possuir na bibliografia básica de "Probabilidade e Estatística", o livro "Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios" dos autores Morgado et al. (2016). Mesmo assim, nas habilidades e conhecimentos do componente, não existem referências a técnicas de contagem. Quanto às componentes optativas, o PPC elenca 7 optativas (nenhuma delas com combinatória), porém esclarece que é um rol exemplificativo e que podem ser incluídas novas optativas de acordo com a necessidade.

Ante o exposto, o que se observa é que a realidade do DF vai ao encontro do que é explicitado por Martarelli e Silva (2020). A falta de combinatória (ou a presença insípida) na formação docente não seria um problema se a combinatória não fosse relevante para a educação básica. Teixeira (2021) explica que o raciocínio combinatório tem importância significativa para o letramento matemático dos cidadãos, dessa forma deve ser trabalhado ao longo de toda a formação do estudante. Nessa perspectiva, cumpre versar sobre a presença do assunto nos documentos norteadores da educação básica.

1.2 Combinatória em documentos oficiais da educação básica

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática do ensino fundamental, em 1998, já defendiam a importância do ensino de combinatória desde os anos iniciais do ensino fundamental pois “leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios” (BRASIL, 1998)

Ainda neste documento, tem-se que:

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística. (BRASIL, 1998, p. 136 - 137)

Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) trazem que os conteúdos de contagem, probabilidade e estatística são de grande importância para essa etapa do ensino, pois no mundo real, trabalhar com dados, realizar inferências e fazer predições está cada vez mais presente no dia a dia (BRASIL, 2000). Outro documento importante do ensino médio para se analisar, são os PCN+, documento esse que veio para ampliar as orientações contidas no PCNEM. Os PCN+ sistematizam a matéria de matemática no ensino médio em 3 eixos ou temas estruturadores, que são:

1. Álgebra: números e funções;
2. Geometria e medidas;
3. Análise de dados.

O eixo da Análise de dados é organizado em 3 unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade.

Na unidade temática de contagem, Brasil (2006), explica o que seria o raciocínio combinatório, que por algumas vezes já foi citado nesse texto e que faz parte do escopo desta pesquisa.

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada **raciocínio combinatório**. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2006, p.126, grifo nosso)

Borba (2010, p.3) corrobora esse conceito, entendendo o raciocínio combinatório como:

> Modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis.

Ainda nos PCN+, na unidade temática de Contagem, estão propostos os seguintes conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos no ensino médio:

> Contagem - princípio multiplicativo; problemas de contagem: Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos; Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (BRASIL, 2006, p. 127)

Uma vez que são citadas habilidades a serem desenvolvidas pelo estudante, este estudo conduz-se para Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um "documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica." (BRASIL, 2018, p.7). No quadro 1, a seguir, estão dispostas as habilidades relativas à análise combinatória durante toda a educação básica.

Quadro 1 - Habilidades de análise combinatória presentes na BNCC

<table>
<tr><td colspan="3">MATEMÁTICA – 4º ANO</td></tr>
<tr><td>UNIDADES TEMÁTICAS</td><td>OBJETOS DE CONHECIMENTO</td><td>HABILIDADES</td></tr>
<tr><td>Números</td><td>Problemas de contagem</td><td>(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MATEMÁTICA – 5º ANO</td></tr>
<tr><td>UNIDADES TEMÁTICAS</td><td>OBJETOS DE CONHECIMENTO</td><td>HABILIDADES</td></tr>
<tr><td>Números</td><td>Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"</td><td>(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MATEMÁTICA – 8º ANO</td></tr>
<tr><td>UNIDADES TEMÁTICAS</td><td>OBJETOS DE CONHECIMENTO</td><td>HABILIDADES</td></tr>
<tr><td>Números</td><td>O princípio multiplicativo da contagem</td><td>(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.</td></tr>
<tr><td>Probabilidade e estatística</td><td>Princípio multiplicativo da contagem;
Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral</td><td>(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td colspan="3">Probabilidade e estatística</td></tr>
<tr><td rowspan="2">HABILIDADES</td><td colspan="2">(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.</td></tr>
</table>

Fonte: autor, adaptado de Brasil (2018)

Mesmo que o público-alvo deste trabalho seja o ensino médio, é importante elencar todas as habilidades para permitir o entendimento de como espera-se que se dê a progressão desse conteúdo ao longo da vida escolar do aluno, o que permite a construção de avaliações diagnósticas e a hierarquização de objetivos educacionais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Desenvolvimento do raciocínio combinatório

Durante a vida escolar do estudante, ele teoricamente vai sendo exposto a diferentes casos de combinatória. De acordo com Borba et al. (2015) no ensino fundamental, por exemplo, é trabalhado o conceito de *produto cartesiano*, no qual dados dois ou mais conjuntos distintos, podemos formar um novo conjunto de elementos distintos. Já no ensino médio, geralmente aparecem três outros casos de agrupamentos:

> *arranjos* (a partir de um conjunto maior são escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas), *combinações* (que se assemelham aos arranjos em termos de escolha de elementos, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas) e *permutações* (todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia). (BORBA et al., 2015, p.1351)

Comparando com as habilidades da BNCC, pode-se observar claramente isso, no 4º e 5º ano tem-se produto cartesiano a partir de imagem, material manipulável, diagrama de árvore e a inserção do princípio multiplicativo, já a partir do 8º ano e ensino médio, existe uma preocupação maior com o desenvolvimento de novas ferramentas combinatórias e principalmente uma grande associação com a probabilidade, visto que o raciocínio combinatório é fundamental para o letramento probabilístico no levantamento do espaço amostral.

De acordo com Morgado et al.(2016) esses conceitos combinatórios trabalhados na educação básica são fundamentados em dois princípios:

Quadro 2 - Princípios da Combinatória

Princípio	Descrição
Princípio da Adição	Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.
Princípio da Multiplicação	Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.

Fonte: autor, adaptado de Morgado et al. (2016, p.16)

De fato, os dois princípios estão na base dos agrupamentos mais comumente trabalhados no Ensino Médio. Essa também é a percepção de Teixeira (2022), trabalho que, em linhas gerais defende que o estudante está exercitando satisfatoriamente o raciocínio combinatório a partir do pleno domínio desses dois princípios, à medida que o entendimento de seus significados passa pela construção de representações gráficas como a árvore de possibilidades e pelas estratégias de resolução de problema.

Frente ao fato de que as habilidades de contagem perpassam diferentes etapas da educação básica e o fato de todo o conteúdo de combinatória ser fundamentado em apenas dois princípios, espera-se que os estudantes, ao chegarem no 3º ano do ensino médio, tenham certo domínio sobre esse conteúdo. Para dimensionar/problematizar essa expectativa, os resultados de avaliações educacionais são bons indicadores.

2.2 Desempenho dos estudantes do ensino médio em combinatória no SAEB

Tomando como base o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), edição de 2021, observa-se que os estudantes de ensino médio não estão obtendo bons resultados em análise combinatória. Na matriz de referência do Saeb (BRASIL, 2022), o descritor referente a análise combinatória é o D32 (Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples) que se encontra no tópico número III (Números e operações/ álgebra e funções). As habilidades desenvolvidas são organizadas em uma escala de proficiência, dividida em níveis, como podemos ver no quadro 3 abaixo:

Quadro 3 - Escala de Proficiência do Ensino Médio em Matemática

Nível	Desempenho
Nível 0	Desempenho menor que 225
Nível 1	Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250
Nível 2	Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275
Nível 3	Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300
Nível 4	Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325
Nível 5	Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350
Nível 6	Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375
Nível 7	Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400
Nível 8	Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425
Nível 9	Desempenho maior ou igual a 425 e menor que 450
Nível 10	Desempenho maior ou igual a 450

Fonte: criado pelo autor com dados extraídos de Brasil (2020)

Analisando a escala de proficiência do Ensino Médio em Matemática do SAEB, as habilidades referentes à análise combinatória no Ensino Médio encontram-se nos níveis 4, 7 e 8. No quadro a seguir estão expostas essas habilidades.

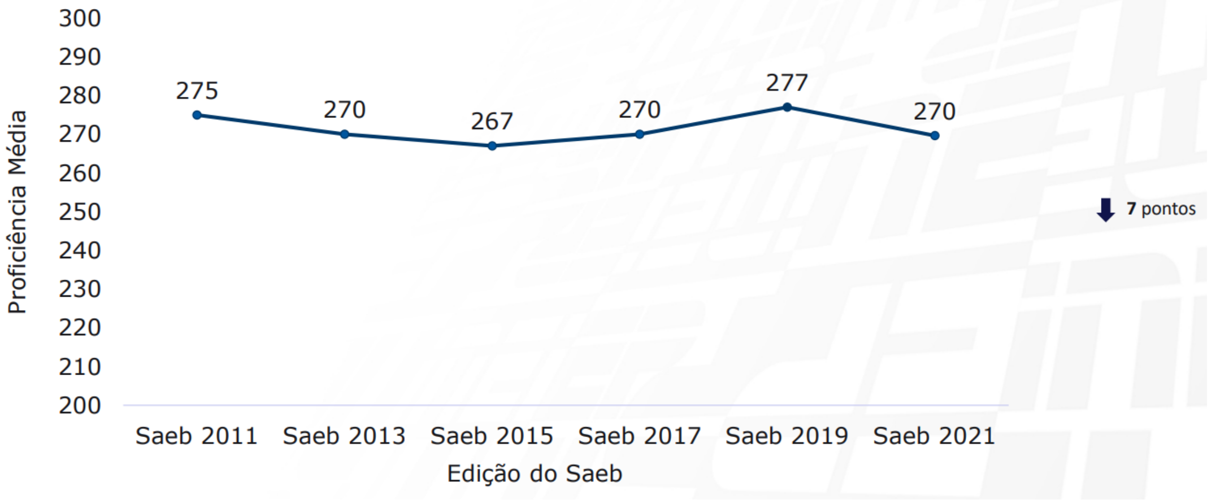
Quadro 4 – Habilidades de análise combinatória por nível no Saeb

Nível	Descrição das Habilidades Desenvolvidas
Nível 4	É provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas de contagem usando princípio multiplicativo.
Nível 7	É provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas usando permutação.
Nível 8	É provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas usando arranjo.

Fonte: autor, adaptado de Brasil (2020)

No ano de 2021, a proficiência média dos estudantes do ensino médio tradicional foi de 270, ou seja, estão no nível 2 da escala de proficiência. No gráfico 1 abaixo estão as médias das edições do Saeb entre os anos de 2011 e 2021.

Gráfico 1 - Evolução das Proficiências Médias no Saeb em Matemática no Ensino Médio Tradicional – Brasil 2011 a 2021

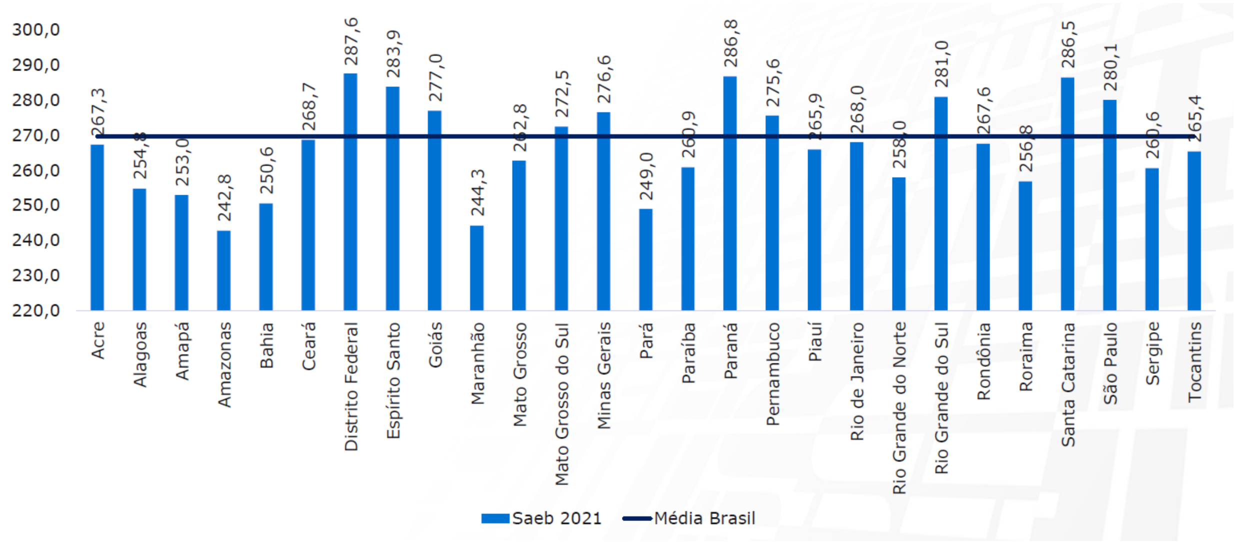


Fonte: Elaborado por Daeb/Inep (2022)

Percebe-se que, em nenhum dos anos anteriores, foi atingida uma média superior a 300, logo, em média os estudantes não atingiram as habilidades relativas a técnicas de contagem, já que a primeira habilidade relativa à análise combinatória se encontra no nível 4.

Num recorte que considera as Unidades da Federação (UF), o gráfico 2 a seguir exibe as proficiências médias de cada uma.

Gráfico 2 - Proficiência Média no Saeb em Matemática no Ensino
Médio Tradicional – Unidade da Federação – 2021



Fonte: Elaborado por Daeb/Inep (2022)

Constata-se a partir do gráfico, que a UF com menor desempenho é o Amazonas, com proficiência média igual a 242,8 , se encontrando dessa forma no nível 1. Das 27 Unidades da Federação, 10 se encontram acima da média de 270, sendo o Distrito Federal a UF com o maior desempenho no ano de 2021, com proficiência média igual a 287,6. Portanto, mesmo as UFs com maiores desempenhos ainda não atingiram o suficiente para chegar ao nível 4.

Tendo em vista o baixo rendimento dos estudantes frente ao conteúdo de análise combinatória e uma aparente lacuna na formação do professor de matemática, entendemos que se faz necessária uma busca por materiais que possam auxiliar no ensino-aprendizagem desse conteúdo.

2.3 Recursos didáticos para o ensino da combinatória

Sabo (2008) afirma que o livro didático é uma ferramenta que para muitos professores é um guia para o planejamento das aulas e para a construção do conhecimento, porém no ensino de combinatória, conceitos como o princípio multiplicativo e o diagrama de árvores, aparecem apenas na introdução do capítulo (FONSECA et al., 2014), sendo os conceitos de permutação, arranjo e combinação trabalhados de forma que priorizam a aplicação de fórmulas (FERREIRA, 2013). Quanto ao uso de softwares e objetos educacionais Borba et al. (2015) trazem que pesquisas feitas mostram também uma inclinação para o uso de fórmula pronta e que faltam nesses softwares ferramentas de ajuda e feedback que permitam uma reflexão por parte do usuário. Uma boa ferramenta que se constitui de metodologia para o ensino da matemática é o jogo, pois “pode auxiliar no desenvolvimento de habilidades de reflexão e de discussão de ideias” (HERMANN et al., 2020, p.5)

Neste trabalho, utilizaremos um jogo como Recurso Didático para apoiar o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório, razão pela qual abordaremos brevemente essa ferramenta na próxima subseção.

2.3.1 *Jogos na Educação Matemática*

De acordo com Grando (2000) o jogo representa uma atividade lúdica, que por si só desperta interesse e prazer pela atividade. Nessa perspectiva, Hermann et al.(2020) argumenta que, no contexto da matemática, como os jogos são pautados por regras, eles podem servir como ferramenta de problematização para trabalhar a resolução de problemas.

O objetivo ao trazer um jogo para sala de aula é que o aluno seja ativo em seu processo de aprendizagem, "desenvolvendo sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação" (GRANDO, 2004, p.26). Cabral (2006) defende o uso de jogos na educação matemática pois introduz uma linguagem que aos poucos é incorporada aos conceitos formais. Smole et al.(2007, p.11) explicam que:

> As habilidades desenvolvem-se porque, ao jogar, os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada; refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. Podemos dizer que o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática.

Paralelo a isso, é importante que o professor tome certos cuidados para que o jogo não tenha caráter puramente aleatório. Grando (2004) destaca que o jogo com objetivo educacional deve ser planejado e necessita de intervenção pedagógica, o professor deve agir como um mediador entre os alunos e o conhecimento proposto através do jogo, tendo a responsabilidade de observar, julgar, organizar e por vezes questionar.

Grando (2015) defende que existem duas formas de se propor o uso de jogos em sala de aula:

> [...] uma delas em que o professor, ao planejar desenvolver um determinado conteúdo, cria um jogo ou busca algum já existente, que foi criado com o objetivo de ensinar matemática (dominó das formas, da tabuada, bingo das operações, etc.); e outra em que o professor busca na atividade lúdica de seus alunos, jogos de entretenimento, que foram criados com esse fim ou ainda jogos criados para passatempo em uma determinada cultura e planeja uma ação intencional a fim de explorar, também, a matemática *a partir* desse jogo (GRANDO, 2015, p. 398).

Em nossas buscas por um jogo para desenvolver o raciocínio combinatório, encontramos o jogo da senha, que se enquadra nessa segunda abordagem. De acordo com Grando (2015) essa segunda forma de propor um jogo desperta maior interesse por parte dos alunos, devido ao fato de ser uma atividade de entretenimento que faz parte de sua cultura lúdica. Além disso, os alunos atribuem um significado especial à aprendizagem matemática, que está associada a jogar bem.

2.4 Jogo da Senha ou Mastermind

De acordo com Silva (2018) o jogo da senha foi criado em 1970 pelo israelita Mordecai Meirowitz. No ano seguinte, um grupo inglês, Invicta Plastics, comprou os direitos intelectuais do brinquedo, que foi lançado sob o nome Mastermind. O jogo ficou conhecido mundialmente, sendo que em 1973 foi eleito o jogo do ano na Inglaterra. No Brasil, o jogo foi comercializado pela primeira vez pela Grow nos anos 80 com o nome Senha. A Grow trouxe o jogo em três versões: "o Senha tradicional, com combinações de 4 pinos usando 8 cores e 10 jogadas possíveis; o Mini-senha, com 4 pinos, mas com 6 cores e apenas 6 jogadas; e o Super-Senha, com combinações de 5 pinos usando 8 cores e 12 jogadas." (SILVA, 2018, p.29)

Figura 1 - Jogo da Senha

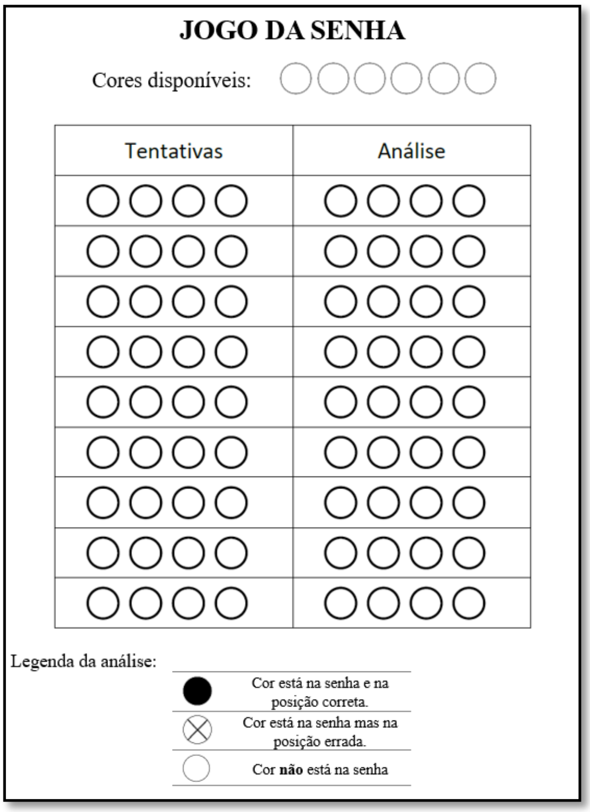
Fonte: <http://www.autobahn.com.br/brinquedos/senha.html> Acesso em: 1 jul. 2023

Trazendo para o contexto educacional, UFF (2021), Martarelli e Souto (2019) e Martarelli et al. (2021), destacam uma abordagem pedagógica com o jogo da senha para trabalhar o princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo), explorando permutação, arranjo e combinação por meio desse jogo. O jogo da senha no site da UFF (2021) é oriundo de um projeto do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID, que possui como objetivo principal a produção de jogos e atividades de matemática recreativa para o ensino básico de matemática. Os artigos de Martarelli e Souto (2019) e Martarelli et al. são produtos de um curso de extensão da UNIRIO, Jogos&Matemática, focado na formação continuada de professores que ensinam matemática. O primeiro artigo propõe o jogo físico e o segundo propõe uma abordagem do jogo da senha de forma digital por meio do software geogebra. O ponto em comum desses 3 trabalhos é que não há um relato de aplicação do jogo em sala de aula, interesse de nosso trabalho e a principal motivo de nossa diferenciação em relação a essas pesquisas. Buscamos entender se o jogo da Senha foi relevante para iniciar o conteúdo de análise combinatória e desenvolver o raciocínio combinatório em estudantes de uma turma de 3º ano de Ensino Médio.

Em nosso jogo, assim como em Martarelli e Souto (2019), utilizamos 6 cores disponíveis para formar uma senha de 4 cores distintas, sendo 9 tentativas para adivinhar a senha. Os alunos devem ser dispostos em duplas, sendo que um deve ser o jogador que irá criar a senha (desafiante) e outro que tentará descobrir a senha (desafiado). É válido lembrar que a posição das cores é importante para a definição da senha (uma senha azul-vermelho-amarelo-verde é diferente de amarelo-azul-vermelho-verde).

Objetivo do Jogo: O desafiado deve descobrir a senha colorida criada pelo desafiante.

Figura 2 - Tabuleiro Jogo da Senha



Fonte: adaptado de Martarelli e Souto (2019) e UFF (2021)

Regras e Dinâmica do Jogo:

O desafiado deve tentar adivinhar a senha escolhendo 4 cores distintas dentre as 6 disponíveis. Após sua tentativa, o desafiante fará a análise da seguinte forma:

• Seguirá a ordem das bolinhas da esquerda para a direita, sendo a primeira bolinha da tentativa correspondendo a primeira bolinha da análise e assim por diante;

• Se a cor escolhida na tentativa estiver na senha e na posição correta, ele preencherá completamente a mesma;

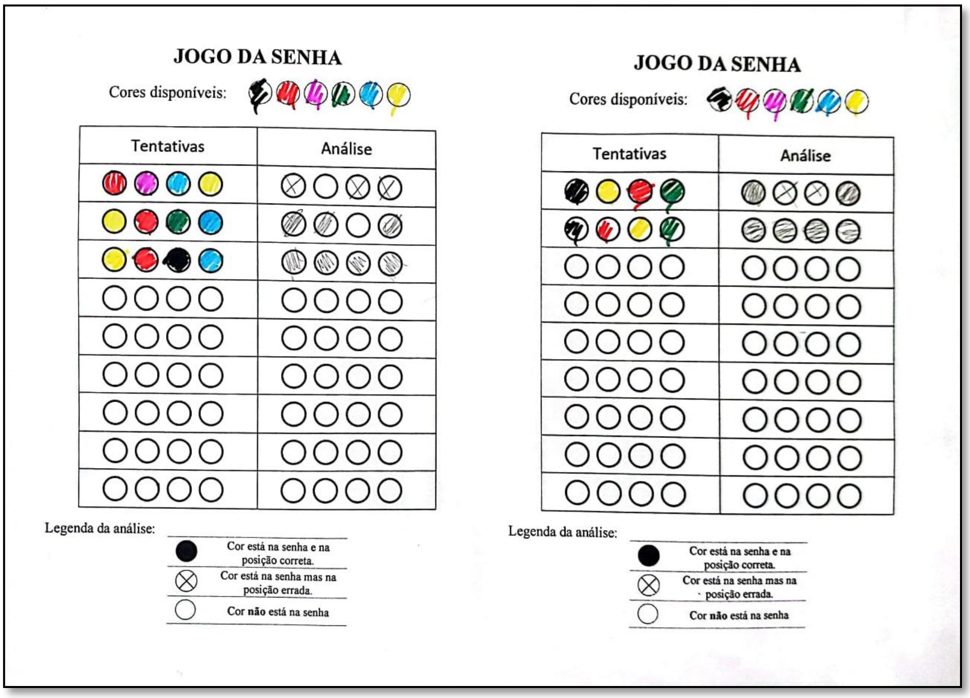
• Se a cor escolhida da correspondente bolinha estiver na senha, mas na posição errada, ele marcará um X na mesma;

• Se a cor escolhida não estiver na senha, ele a deixará em branco;

O jogo segue assim, com tentativas e análises até o desafiado descobrir a senha correta.

Após a descoberta da senha, os alunos devem trocar de função (desafiante-desafiado) e o jogo se reinicia. Ganha o jogo o aluno que descobrir a senha com o menor número de tentativas. Na figura 3 a seguir temos um exemplo de jogo.

Figura 3 – Exemplo de Jogo



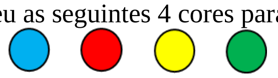
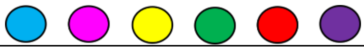
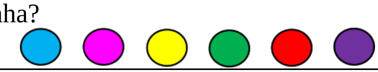
Fonte: dados da pesquisa

Na figura 3, podemos visualizar dois jogos, o primeiro, a esquerda, jogador 1 é o desafiado e o jogador 2 é o desafiante, sendo que o jogador 1 descobriu a senha em 3 tentativas. O segundo jogo, a direita, trocaram-se as funções e o jogador 2 descobriu a senha em 2 tentativas, tonando-se o vencedor.

O jogo da Senha em si não é o principal material responsável por desenvolver o raciocínio combinatório, mas sim as questões retiradas a partir do jogo. Essas questões, que estão expostas no quadro 5, envolvem conceitos de raciocínio lógico, permutação, permutação caótica, arranjo e combinação e foram utilizadas como forma de iniciar o conteúdo de contagem, desse modo a análise combinatória foi formalizada apenas pelos princípios aditivo e multiplicativo e pelo diagrama de árvore, construindo todo o raciocínio das questões juntamente com os alunos.

A permutação caótica (Questão 8), representa uma permutação na qual nenhum elemento está em seu lugar primitivo (MORGADO et al.,2016), esse conceito geralmente não é trabalhado no Ensino Médio, mas é um conceito que está no bojo do jogo da Senha. Pensando em uma perspectiva de que estamos aplicando o jogo no início o conteúdo de combinatória, colocamos a Questão 5 que solicita ao estudante que faça a árvore de possibilidades das senhas possíveis com 4 cores, pois assim ao chegar na questão 8, o aluno possui artifícios para resolução da questão.

Quadro 5 - Questões sobre do Jogo da Senha

Questão 1	Quantas cores, no **MÍNIMO**, você pode acertar na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não?
Questão 2	Existe a possibilidade de acertar apenas uma cor na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não?
Questão 3	Em qual tentativa é possível descobrir, com certeza, todas as cores da senha? (Independentemente da posição estar correta ou não)
Questão 4	O jogador que irá fazer a senha, escolheu as seguintes 4 cores para compor sua senha:  Quantas senhas podem ser feitas utilizando essas 4 cores?
Questão 5	Utilizando o diagrama de árvores esboce em um papel as senhas que podem ser feitas com essas cores.
Questão 6	Quantas são as possibilidades de senha na primeira jogada? Ou seja, quantas senhas de 4 cores distintas podem ser feitas com as 6 cores? 
Questão 7	Para formar uma senha, geralmente, primeiro escolhemos um grupo de 4 cores dentre as 6 disponíveis, nesse caso a ordem entre as cores não importa. Quantos grupos de 4 cores podemos escolher para montar uma senha? 
Questão 8	O jogador que está tentando adivinhar a senha teve em sua primeira tentativa a análise abaixo. Quantas são as senhas possíveis para a próxima tentativa? Tentativa:  Análise: ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

Fonte: Adaptado de Martarelli e Souto (2019) e Martarelli et al. (2021)

3 OBJETIVO GERAL

Analisar o impacto da aplicação do Jogo da Senha no Ensino Médio quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

3.1 Objetivos específicos

- Introduzir o raciocínio combinatório no ensino médio por meio do jogo da Senha;
- Aplicar conceitos de permutação, arranjo e combinação por meio dos princípios aditivo e multiplicativo da combinatória e pelo diagrama de árvore, ou seja, sem o uso de fórmulas;
- Validar o jogo da senha por meio dos níveis de reação e aprendizagem do modelo de avaliação proposto por Kirkpatrick e Kirkpatrick (2006).

4 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho foi o modelo ADDIE - análise (analysis), design (design), desenvolvimento (development), implementação (implementation) e avaliação (evaluation). Esse modelo é um dos mais conhecidos e utilizados no campo do design instrucional. Filatro (2008), de forma resumida, explica que a fase da análise tem o objetivo de compreender o problema educacional real para propor uma solução. A fase do design refere-se ao planejamento, a fase do desenvolvimento envolve a produção e/ou adaptação de materiais didáticos, a fase da implementação diz respeito à aplicação da proposta didática propriamente dita e, por fim, a fase da avaliação busca verificar a efetividade da solução proposta e revisar as estratégias implementadas.

Para essa última fase, Avaliação, este trabalho conduziu-se para o modelo de avaliação da eficácia do programa de treinamento proposto por Kirkpatrick. De acordo com Oliveira et al. (2019) esse modelo é estruturado em 4 níveis: (1) reação, (2) aprendizagem, (3) comportamento e (4) resultados. Os dois primeiros níveis podem ser mensurados logo após a finalização da proposta didática, enquanto os últimos dois níveis são verificados a longo prazo. Por questões de tempo e viabilidade, a avaliação se deu a princípio nos níveis de reação e aprendizagem. Ainda nas linhas de Oliveira et al. (2019, p.973) temos que:

> No contexto de JEDs, a maioria das avaliações realizadas ocorre no nível da reação, com o objetivo de coletar as percepções dos alunos em relação ao jogo, como jogabilidade, satisfação, motivação, entre outros (Savi et al., 2010). Na literatura, há poucos relatos da avaliação da aprendizagem (nível 2) em si, o que há é a avaliação da percepção da aprendizagem, o que está no nível de reação (Oliveira et al., 2018; Rocha, 2014). Para avaliar a aprendizagem, questionários de **pré e pós-testes** devem ser usados para mensurar o aumento do conhecimento. (OLIVEIRA et al., 2019, P.973, grifo nosso)

A abreviação JEDs se refere aos jogos educacionais digitais, contudo, mesmo que o jogo da senha trabalhado por nós seja físico, o que se observa é que o cenário em pouco difere do mencionado pelos autores. Nas próximas subseções, além de explorar as fases do modelo ADDIE, também relataremos como essas fases foram implementadas e descreveremos o desenvolvimento do experimento na turma do 3º ano do IFB. Dessa forma, será fornecida uma visão mais precisa do processo realizado neste trabalho.

4.1 Análise

De acordo com Filatro (2023), a fase da análise consiste, em sua essência, em 3 aspectos, a identificação das necessidades de aprendizagem, a caracterização do público-alvo que apresenta essas necessidades e o levantamento das oportunidades e limitações do contexto em que essas necessidades de aprendizagem estão envolvidas. Como já exposto nas seções anteriores, a identificação do problema se deu pelos insuficientes níveis de proficiência ligados ao tema no SAEB, corroborada por uma breve incursão em alguns Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) de Licenciaturas em Matemática de Instituições de Ensino Superior (IES) do Distrito Federal, no tocante à formação dos docentes.

O público-alvo desta pesquisa foi uma turma de 3º ano do ensino médio integrado do Instituto Federal de Brasília (IFB) que em sua maioria estavam tendo seu primeiro contato com a matéria de análise combinatória. A professora que concordou em participar do experimento disponibilizou 4 aulas de seu planejamento para a aplicação do jogo da senha. No entanto, uma limitação incontornável é que por se tratar de uma turma de ensino médio integrado, a carga horária semanal de matemática é muito baixa, apenas uma aula de 100 minutos por semana, além disso, não foi possível dar aula 4 semanas consecutivas, tendo as vezes um espaçamento de 14 dias entre uma aula e outra, dificultando de certa forma a fixação do conteúdo.

4.2 Design

Na fase de design devem ser tomadas decisões como os objetivos de aprendizagem, estratégias para avaliar se os objetivos foram alcançados, tipos de atividades de aprendizagem, formas de interação entre os participantes, organização dos conteúdos a serem abordados, mídias e tecnologias empregadas, carga horária e cronograma aproximado (FILATRO, 2023).

Nosso objetivo geral foi analisar o impacto da aplicação do Jogo da Senha no Ensino Médio quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para avaliar se os objetivos foram atingidos, os níveis de reação e aprendizagem do modelo de avaliação proposto por Kirkpatrick guiaram de forma qualitativa a validação do jogo da senha. Para nível 1 (reação), nos baseamos no trabalho de Rocha et al. (2015) que propõem um questionário de avaliação de reação (satisfação, motivação etc.) do aprendiz e de sua autoavaliação para um jogo sério. Para o nível 2 (aprendizagem), o trabalho de Oliveira et al. (2019) foi um importante contributo, esclarecendo que para mensurar o aumento de conhecimento são necessários questionários de pré-teste e pós-teste.

Como já exposto no referencial teórico, nosso jogo da senha teve embasamento em Martarelli e Souto (2019). Para trabalhar a questões sobre o jogo (Quadro 5), faz-se necessário uma explicação sobre o princípio aditivo e multiplicativo e o diagrama de árvore. Entendemos que por estamos iniciando o conteúdo de combinatória, pode ser desmotivador para alguns alunos terem que encarar questões sobre um conteúdo novo e que não houve uma instrução tão formalizada. Desse modo, aproveitando que o IFB possui projetores nas salas de aula, as perguntas sobre o jogo foram propostas no formato de Quiz, separando a sala em 6 grupos de 4 pessoas, gerando debate dentro do grupo para resolução das questões e motivação por meio da competitividade entre grupos. Para aplicação desse Quiz o ambiente virtual de aprendizagem (AVA) escolhido foi o site QUIZZIZ. A grande vantagem do QUIZZIZ é permitir que os alunos progridam no mesmo ritmo, sendo o professor o responsável de passar para a próxima questão.

4.3 Desenvolvimento

Na fase de desenvolvimento, Filatro (2023) explica que tudo o que foi concebido na fase de design é transformado em algo concreto. Materiais didáticos são produzidos e ambientes de aprendizagem (físico e digital) são organizados.

Para os questionários de pré e pós teste, foram elaboradas 4 questões sobre o conteúdo em moldes parecidos com as questões do jogo da senha, a primeira questão sobre permutação, a segunda sobre arranjo, a terceira sobre permutação caótica e a quarta sobre combinação. No quadro 6 estão expostas essas questões.

Quadro 6 - Questionário Pré-teste e Pós-teste

As eleições para o grêmio estudantil de uma escola estão se aproximando, existem algumas chapas se candidatando, sabe-se que cada chapa deve ser constituída por 10 pessoas.	
Questão 1 (Permutação)	Os 3 cargos que demandam mais responsabilidade em um grêmio estudantil são os cargos de Presidente, Vice-Presidente e Secretário(a). Em uma dessas chapas, AG, MJ e MC querem ocupar um desses cargos. De quantas e quais formas podemos organizá-las nesses 3 cargos?
Questão 2 (Arranjo)	Os alunos F, V, A e L fazem parte dessa chapa e também querem ocupar um desses 3 cargos. Nesse contexto, temos 7 pessoas concorrendo para 3 cargos. a) Se a primeira escolha a ser feita é o cargo de Presidente. Quantas opções existem para esse cargo? b) Após a escolha do(a) Presidente, quantas opções restaram para o cargo de Vice-Presidente? c) Agora que já foi escolhido o(a) Presidente e o(a) Vice-Presidente, quantas opções existem para o cargo de Secretário(a)? d) De quantas formas diferentes podemos formar esses trios de Presidente, Vice-Presidente e Secretário(a)?
Questão 3 (Permutação Caótica)	AG, MJ e MC já fizeram parte do grêmio estudantil no ano anterior, exercendo as funções de Presidente, Vice-presidente e Secretária, respectivamente. Elas decidiram entre si que nenhuma delas tentaria o mesmo cargo novamente. Nesse novo cenário, quantas e quais as possibilidades delas se organizarem nesses cargos?
Questão 4 (Combinação)	Sabendo que uma chapa é constituída por 10 pessoas, restam 3 vagas para compor a chapa do 3º ano B. Se 5 alunos estão interessadas nessas vagas, independentemente do cargo que vão ocupar, de quantas formas podemos escolher os estudantes para essas vagas?

Fonte: Elaborado pelo autor

Para o questionário de reação, seguindo os moldes de Rocha et al. (2015), foram adaptadas 34 afirmações avaliativas fechadas (agrupadas em 2 subtópicos) e 1 questão aberta. O 1º subtópico (questionários de reação ao jogo) possui 28 afirmações divididas em experiência; atenção estimulada durante o jogo; interação; relevância do conteúdo do jogo; facilidade e confiança em usar o jogo; satisfação; imersão; desafio e progresso; e recomendação. Já o 2º subtópico (questionário de reação do estudante à aprendizagem com o jogo) possui 6 afirmações. As 34 afirmações totais devem ser avaliadas e pontuadas de 1 a 5 na escala Likert, com um ponto central de neutralidade (julgamento 1: discordo totalmente, 2: discordo, 3: neutro, 4: concordo, 5: concordo totalmente). De acordo com essa autora, “A escala de Likert de cinco pontos possibilita uma mensuração qualitativa de eventos” (ROCHA et al., 2015, p.3). Essas questões foram colocadas no google formulários e podem ser visualizadas no quadro 7 a seguir. A questão aberta proposta ao final do questionário de reação foi: “Com base em sua experiência com o jogo da senha, você teria alguma sugestão de melhoria ou alguma outra observação que gostaria de compartilhar?”. As respostas a essa pergunta pode ser visualizada no apêndice “A” deste artigo.

Quadro 7 – Questionário de Reação

1. REAÇÃO DO ESTUDANTE AO JOGO		SATISFAÇÃO	
EXPERIÊNCIA		1.18	Eu estou satisfeito com a oportunidade de jogar o jogo da senha.
1.1	O jogo da senha possibilitou meu aprendizado por meio de experimentação de soluções corretas e incorretas.	1.19	Eu estou satisfeito com o meu progresso no jogo.
1.2	Consegui por meio da experiência no jogo da senha melhorar minha habilidade de raciocinar questões de combinatória.	IMERSÃO	
ATENÇÃO ESTIMULADA DURANTE O JOGO		1.20	Eu não percebi o tempo passar enquanto jogava.
1.3	O jogo da senha conseguiu estimular minha atenção.	1.21	Foi estimulante jogar e aprender com o jogo da senha.
1.4	A variação das combinações de cores e estratégias no jogo da senha ajudou-me a manter a atenção e motivação no jogo.	1.22	Eu gostei do jogo e não me senti ansioso ou entediado por causa dele.
1.5	Me senti motivado e engajado durante o jogo da senha.	DESAFIO E PROGRESSO	
INTERAÇÃO		1.23	O Quiz do jogo da senha foi desafiador o suficiente para estimular o raciocínio combinatório.
1.6	As questões sobre o jogo no formato de Quiz ajudou a promover a participação ativa de todos os membros do grupo.	1.24	As questões sobre o jogo tiveram um nível de dificuldade adequado.
1.7	As atividades em grupo durante o Quiz foram colaborativas e incentivaram a discussão entre os membros do grupo.	1.25	Houve progresso durante o jogo.
1.8	Durante o Quiz, me senti confortável em compartilhar minhas ideias e contribuir para as discussões em grupo.	1.26	Meu interesse aumentou com a superação dos desafios.
RELEVÂNCIA DO CONTEÚDO DO JOGO		1.27	Eu me esforcei para obter bons resultados no jogo da senha.
1.9	O jogo da senha foi relevante para desenvolver minhas habilidades de pensamento lógico e estratégico.	RECOMENDAÇÃO	
1.10	O conteúdo do jogo da senha potencializou os conhecimentos de contagem que eu já possuía	1.28	Eu recomendaria o jogo da senha para outros colegas.
1.11	O Quiz do jogo da senha permitiu a aplicação prática dos princípios aditivo e multiplicativo da combinatória.	**2. REAÇÃO DO ESTUDANTE À APRENDIZAGEM COM O JOGO (PERCEPÇÃO DE APRENDIZAGEM)**	
1.12	Em relação ao método de ensino, eu prefiro aprender com esse jogo do que de outra forma.		
FACILIDADE E CONFIANÇA EM USAR O JOGO		2.1	Eu acredito que o jogo da senha contribuiu muito para iniciar/complementar meu conhecimento sobre contagem.
1.13	Foi fácil entender as regras do jogo da senha.	2.2	Eu acredito que este jogo foi eficiente na aprendizagem e prática do raciocínio combinatório.
1.14	Foi fácil usar o jogo como material de aprendizagem.	2.3	Eu consigo relacionar o que aprendi com a realidade.
1.15	Eu estou confiante com o aprendizado e a experiência que obtive no jogo da senha.	2.4	Eu acredito que a experiência adquirida no jogo da senha irá contribuir para um melhor desempenho no decorrer do conteúdo
1.16	As perguntas do Quiz foram claras e compreensíveis.	2.5	O jogo da senha possibilitou-me criar conceitos lógicos referentes à análise combinatória.
1.17	O tempo dado para responder às perguntas do Quiz foi adequado.	2.6	O Quiz do jogo da senha possibilitou-me experimentar aplicação prática dos princípios aditivo e multiplicativo.

Fonte: Elaborado pelo autor

4.4 Implementação

4.4.1 Aula 1 (08/05/2023)

Na primeira aula proposta os alunos fizeram o pré-teste e depois puderam jogar o jogo da Senha. Na tabela abaixo temos os resultados do pré-teste, vale ressaltar que para critérios de correção, consideramos apenas as questões totalmente corretas, atribuindo valor 1 para questão certa e 0 para questão errada, assim a nota máxima seria 4. Em relação a questão 2 que possuem letras a, b, c, d, somente a letra d que representa o problema de arranjo está sendo considerada.

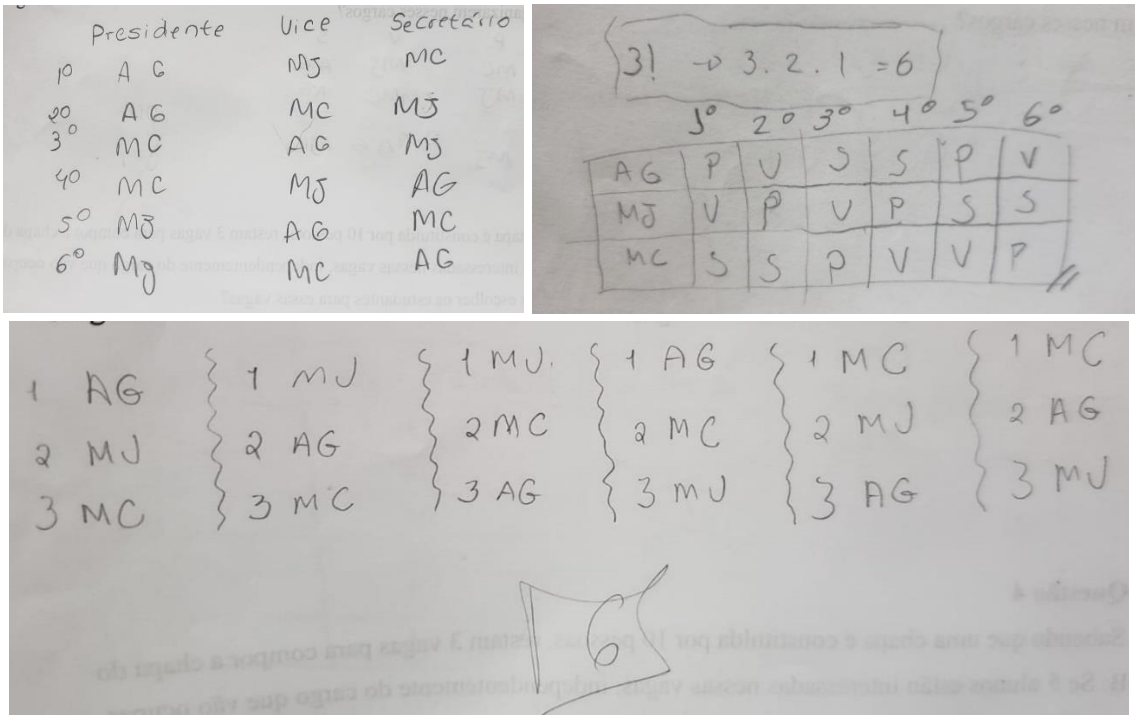
Tabela 1 – Resultado Pré-Teste

Estudante	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Nota
E1	1	0	1	0	2
E2	1	0	1	0	2
E3	1	0	0	0	1
E4	1	0	0	0	1
E5	0	0	0	0	0
E6	1	0	0	0	1
E7	1	0	0	0	1
E8	1	0	1	1	3
E9	0	0	0	0	0
E10	1	0	1	0	2
E11	1	0	0	0	1
E12	1	0	0	0	1
E13	1	0	1	0	2
E14	0	0	0	0	0
E15	1	0	0	0	1
E16	1	1	0	1	3
E17	1	0	0	0	1
E18	1	0	1	0	2
E19	0	0	1	0	1
E20	1	0	1	1	3
E21	1	0	1	0	2
E22	0	0	0	0	0

Fonte: elaborado pelo autor

Na questão 1, a maioria dos alunos que acertaram, conseguiram resolver enumerando os seis casos possíveis, 3 alunos também deram indícios de já possuírem certo contato com a combinatória, resolvendo a questão por fatorial. Na figura 4 abaixo, temos alguns exemplos de resoluções certas de estudantes. Observe que alguns estudantes já conseguiam organizar os agrupamentos por meio de tabelas e tentativa e erro.

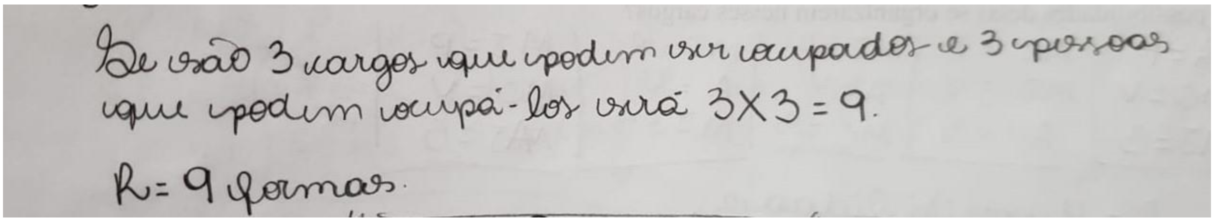
Figura 4 – Exemplo de resoluções corretas da questão 1 do pré-teste



Fonte: dados da pesquisa

Nessa primeira questão, os erros mais comuns encontrados foram dois. O primeiro erro mais comum foram os alunos enumerarem apenas 3 casos, o segundo erro foi multiplicar os dados da questão, vide figura 5 abaixo.

Figura 5 - Exemplo de resolução errada da questão 1 do pré-teste

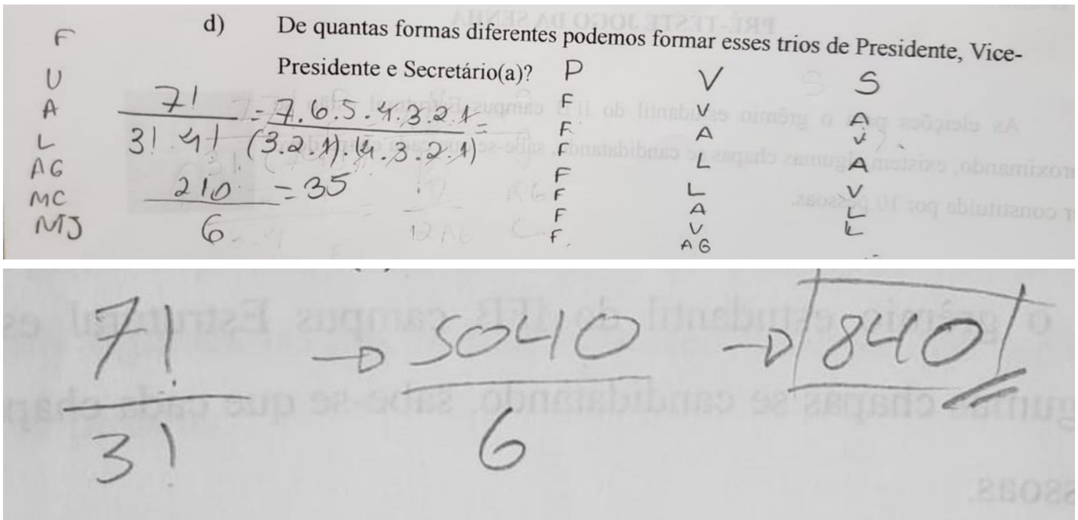


Fonte: dados da pesquisa

Na questão 2, o objetivo inicial era apresentar apenas a letra "d" como questão, mas considerando que a resposta resultava em 210 possibilidades de trios, seria praticamente impossível para os estudantes responderem por enumeração, correndo o risco de termos uma questão totalmente em branco no pré-teste. Com o propósito de compreender como eles chegariam ao cálculo da letra "d", foram adicionadas as letras "a", "b" e "c" para fornecer alguma orientação aos alunos. Mesmo com essas "dicas", apenas o estudante E16 conseguiu acertar essa questão.

Conforme mencionado anteriormente, três estudantes demonstraram indícios de terem estudado análise combinatória anteriormente, sendo eles E7, E17 e E18. Vale ressaltar que esse conhecimento foi adquirido no ensino fundamental, visto que no ensino médio esse foi o primeiro momento em que tiveram contato com a matéria de contagem. Os estudantes E7 e E18 se recordavam da notação de fatorial e tentaram aplicar esse conceito, mas não conseguiram acertar a questão. Na figura 6 abaixo, estão apresentadas as resoluções de E7 e E18, respectivamente.

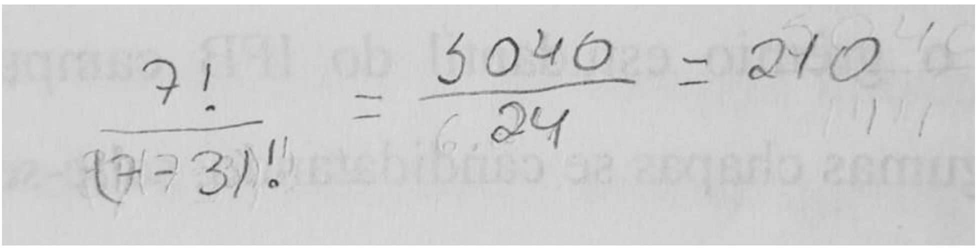
Figura 6 - Resolução errada do E7 e E18 na questão 2



Fonte: dados da pesquisa

Já E16 conhecia as fórmulas de arranjo e combinação e, por meio delas, resolveu e acertou as questões 2 e 4. Na figura 7, temos sua resolução na questão 2.

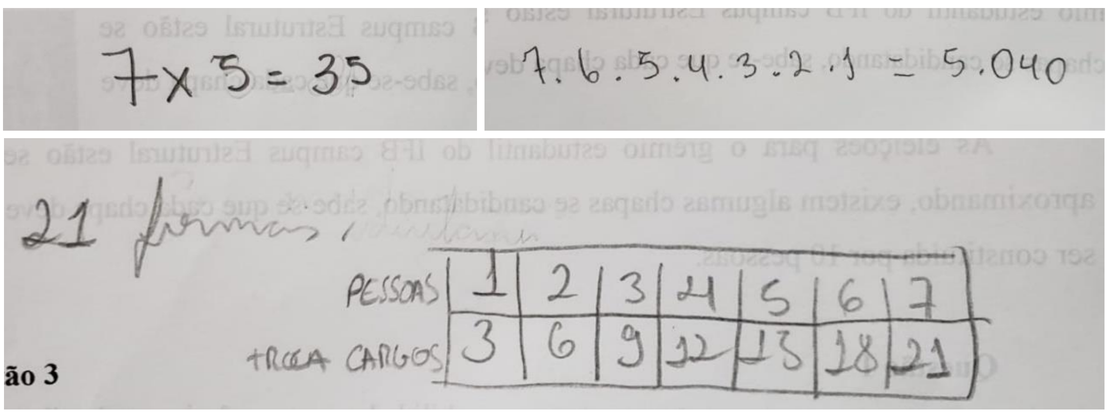
Figura 7 – Resolução correta do E16 questão 2



Fonte: dados da pesquisa

Outros tipos de respostas que apareceram foram de estudantes seguindo o raciocínio das letras “a”, “b” e “c”, porém multiplicando até 1. Outros estudantes também multiplicaram os dados da questão buscando acertar a resposta, como 7x5 =35 e 7x3 =21, conforme exposto na figura 8:

Figura 8 – Outras respostas erradas da questão 2 do pré-teste

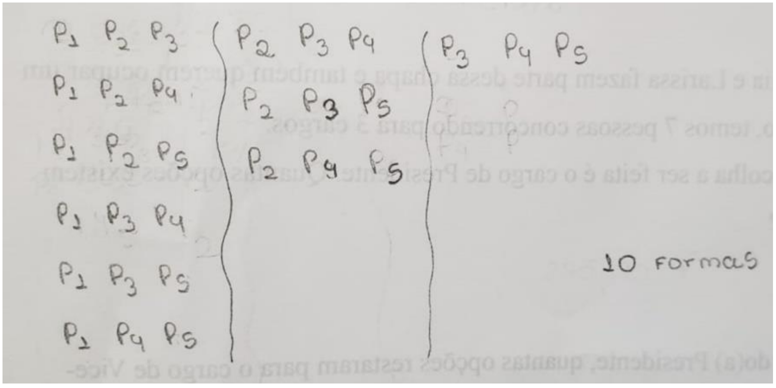


Fonte: dados da pesquisa

Na questão 3 do pré-teste, assim como na questão 8 do jogo da senha, trata-se de uma permutação caótica, mas por ter sido pedido na questão 1 a enumeração de todos os agrupamentos possíveis entre AG, MJ e MC, esperava-se que os alunos conseguissem fazer essa associação, como foi o caso de 9 estudantes.

Na questão 4, esperava-se que seria a questão de maior dificuldade, mas pensando que não haveria instrução formal dos conceitos antes do pré-teste, fez-se a questão pensando em uma baixa quantidade de agrupamentos possíveis (no caso 10), assim além de E16 que resolveu pela fórmula de combinação, E8 e E20 conseguiram enumerar os 10 agrupamentos.

Figura 9 – Resposta correta do E8 na questão 4 do pré-teste

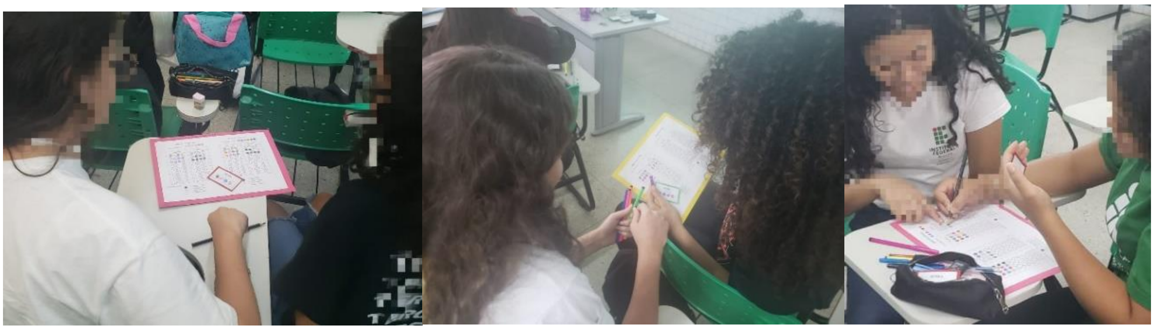


Fonte: dados da pesquisa

Outras respostas encontradas nessa questão 4 foram diversas tentativas de enumeração, mas sem conseguir encontrar as 10, também tiveram respostas multiplicando os dados do enunciado ($5 \times 3 = 15$), e os estudantes E7 e E18 responderam $\frac{5!}{3!} = 20$.

Após a aplicação do Pré-teste, sobraram cerca de 40 min de aula para os estudantes jogarem o jogo da senha. Eles foram dispostos em duplas, e receberam os materiais do jogo. O entendimento das regras foi de fácil assimilação e o os alunos jogaram em média 4 vezes contando tanto quando o aluno é o desafiado como quando é o desafiante.

Figura 10 – Aplicação Jogo da Senha



Fonte: arquivo pessoal

4.4.2 Aula 2 (15/05/2023)

Na segunda aula, houve uma introdução sobre os princípios aditivo e multiplicativo da contagem e apresentação do diagrama e árvores como ferramenta para enumerar todos os casos possíveis de um problema de contagem. Após isso, a turma foi dividida em 6 grupos de 4 alunos para dar início ao quiz. Foi explicado aos grupos que as 3 primeiras questões eram referentes a raciocínio lógico e que as posteriores dependiam apenas dos princípios da combinatória para serem resolvidas, também foi deixado claro para não se preocuparem com o tempo, pois as questões seguiriam o ritmo do professor e que o objetivo era que eles pensassem e debatessem entre si para resolução das questões.

Questão 1 - Quantas cores, no **MÍNIMO**, você pode acertar na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não?

Resposta esperada: Temos 6 cores para escolher 4, no pior cenário, as 2 cores que eu não escolhi (que ficaram de fora) estão na senha, logo das 4 cores que eu escolhi, com certeza 2 estão na senha. No mínimo 2 cores eu consigo acertar que está na senha independentemente de estar na posição correta ou não.

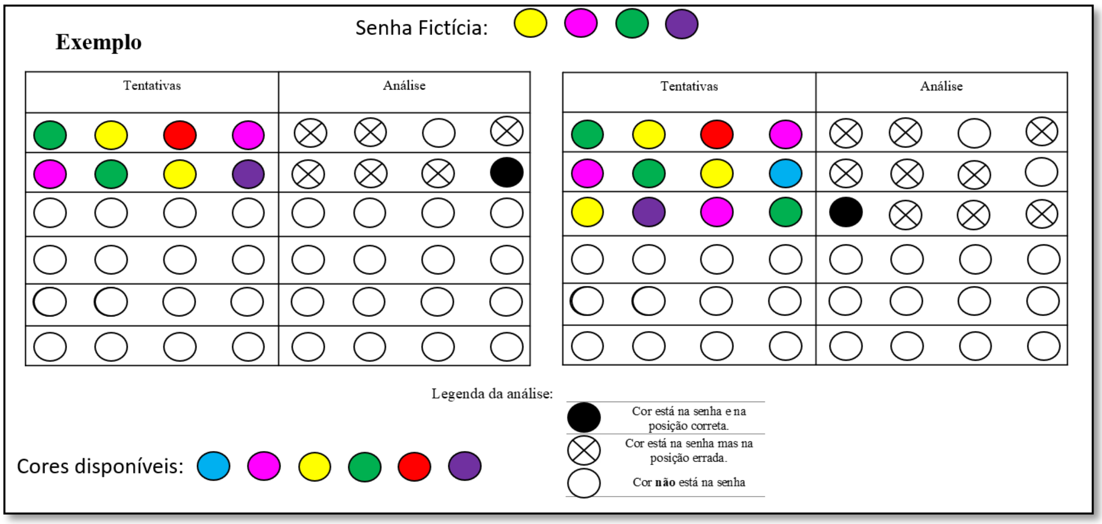
Questão 2 - Existe a possibilidade de acertar apenas uma cor na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não?

Resposta esperada: Pelo resultado da questão anterior que no mínimo 2 cores eu consigo saber que estão na senha na primeira tentativa, **não** existe a possibilidade de acertar apena uma cor!

Questão 3 - Em qual tentativa é possível descobrir, com certeza, todas as cores da senha? (Independentemente da posição estar correta ou não)

Resposta esperada: Existem 3 cenários possíveis na primeira tentativa, descobrir 2 cores ou 3 cores ou 4 cores. Se descobrirmos as 4 cores na primeira tentativa, foi apenas uma tentativa. Se descobrirmos 2 cores na primeira tentativa, significa que as 2 cores que não utilizei na minha primeira tentativa estão na senha, logo é possível descobrir todas as cores, independentemente da posição estar correta ou não, com 2 tentativas. O terceiro e último cenário, é descobrir que 3 cores estão na senha na sua primeira tentativa, nesse cenário uma das duas cores que estiveram de fora na primeira tentativa estão na senha, dessa forma, pode-se dar sorte de escolher a cor faltante na segunda tentativa, ou então, com certeza, na terceira tentativa, descobre-se as cores que compõem a senha. A figura 11 exemplifica esse último cenário.

Figura 11 - Exemplo Questão 3

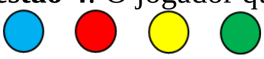


Fonte: elaborado pelo autor

No exemplo acima, descobriu-se que as cores verde, amarelo e rosa estão na senha e a cor vermelha não está, logo a quarta cor que faz parte da senha, ou é a cor roxa ou é a cor azul. No exemplo fictício, se o jogador escolhesse a cor roxa ele descobriria todas as cores na segunda tentativa, mas se escolhesse o azul, apenas na terceira tentativa descobriria todas as cores. Ou seja, com certeza na terceira tentativa é possível descobrir todas as cores da senha independentemente de a posição estar correta ou não.

Não houve intervenção durante essas 3 primeiras questões do Quiz. Apenas quando os grupos responderam a 3ª questão que houve uma pausa na aula para debate e exposição de ideias. Dos seis grupos, três responderam corretamente as questões 1 e 2 e apenas um grupo acertou a questão 3.

A partir da 4ª questão, ao fim de cada questão houve uma intervenção e debate de ideias sobre como aplicar o princípio multiplicativo.

Questão 4: O jogador que irá fazer a senha, escolheu as seguintes 4 cores para compor sua senha:  Quantas senhas podem ser feitas utilizando essas 4 cores?

Resposta esperada:

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{Possibilidades}\\ \text{1ª COR}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Possibilidades}\\ \text{2ª COR}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{Possibilidades}\\ \text{3ª COR}}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{Possibilidades}\\ \text{4ª COR}}} = 24$$

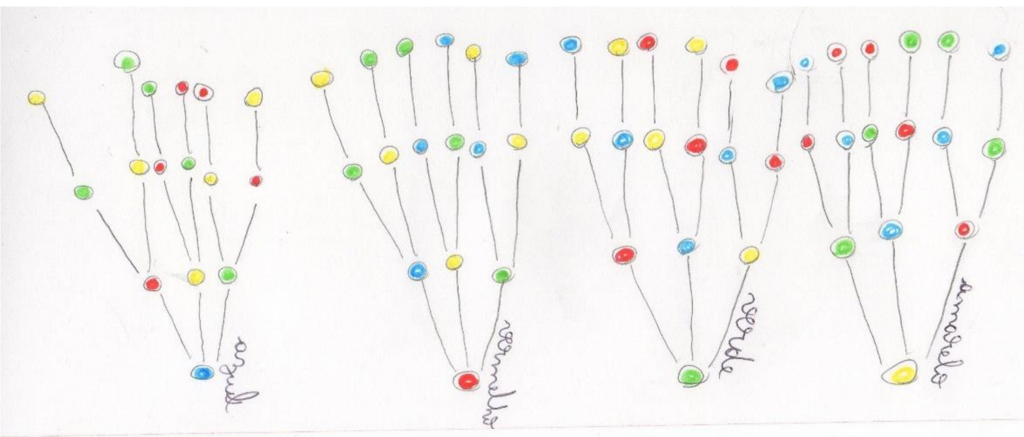
Nessa questão 4, cinco grupos dos seis conseguiram responder corretamente.

Questão 5 - Utilizando o diagrama de árvores esboce em um papel as senhas que podem ser feitas com essas cores.

Na figura 12 temos o diagrama de árvores de um dos grupos participantes do Quiz.

Resposta esperada:

Figura 12 - Resposta Questão 5 do Quiz



Fonte: dados da pesquisa

Nessa questão do diagrama de árvore, como não havia forma de pontuar essa atividade no Quizizz, foi solicitado que, quando concluíssem, mostrassem a árvore para assim receberem um código referente ao gabarito e poderem pontuar no Quiz. Além do objetivo de como construir esse diagrama, o objetivo principal era que todos os grupos conseguissem fazer essa questão para terem meios de responderem posteriormente a questão 8.

Questão 6 - Quantas são as possibilidades de senha na primeira jogada? Ou seja, quantas senhas de 4 cores distintas podem ser feitas com as 6 cores?

Resposta esperada:

$$\underbrace{6}_{\substack{\text{Possibilidades} \\ \text{1ª COR}}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\text{Possibilidades} \\ \text{2ª COR}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{Possibilidades} \\ \text{3ª COR}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Possibilidades} \\ \text{4ª COR}}} = 360$$

Nessa questão, apenas um grupo dos seis conseguiu acertar. Ao fim dessa questão, o tempo de aula acabou e ficou combinado com a turma de finalizar o Quiz na aula seguinte.

4.4.3 Aula 3 (29/05/2023)

Para essa aula ficaram faltando as questões 7 e 8. Porém, como podemos ver pela data da aula anterior e essa, tivemos um intervalo de 2 semanas entre as duas aulas. Durante esse período, não ocorreram aulas de matemática nem qualquer outra instrução relacionada ao conteúdo em questão. Diante disso, a aula teve início com uma revisão das seis questões feitas anteriormente.

Voltando para o Quiz, deu-se início as questões 7 e 8.

Questão 7 - Para formar uma senha, geralmente, primeiro escolhemos um grupo de 4 cores dentre as 6 disponíveis, nesse caso a ordem entre as cores não importa. Quantos grupos de 4 cores podemos escolher para montar uma senha? (Como estamos falando de grupos de cores, a ordem não importa.)

A questão 7, por envolver combinação, é a mais delicada de explicar por meio do princípio multiplicativo. Por termos o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório, não foi exposto durante as aulas o nome dos conceitos (permutação, arranjo e combinação) por trás de cada questão. Em linhas gerais, nosso objetivo com a questão de combinação era de construir o raciocínio que a combinação de n elementos tomados p a p corresponde a:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

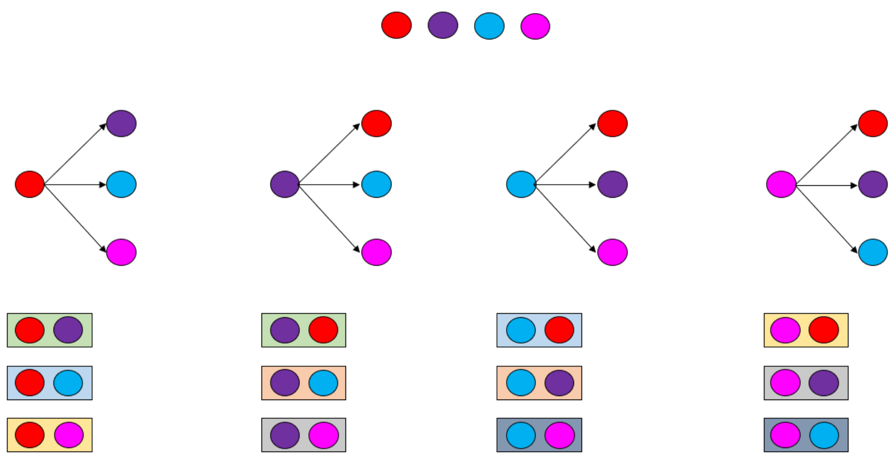
Como mencionado, não conceituamos esses termos, logo, traduzindo para a realidade do jogo da senha, queríamos explicar que montar grupos de 4 cores dentre 6 cores, é o mesmo que calcular todas as senhas possíveis de 4 cores distintas e dividir pela quantidade senhas que cada grupo é capaz de fazer, em outras palavras, é a questão 6 dividido pela questão 4.

Resposta esperada:

$$\frac{\cancel{6}^{\,3} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 15$$

Para resolver essa questão, é evidente que houve uma intervenção por parte do professor, mas inicialmente, a pedido dos alunos, eles tentaram resolver por conta própria discutindo dentro de cada grupo. Após certo tempo, tentamos construir o raciocínio com eles a partir de um agrupamento menor e utilizando o diagrama de árvores da seguinte forma:

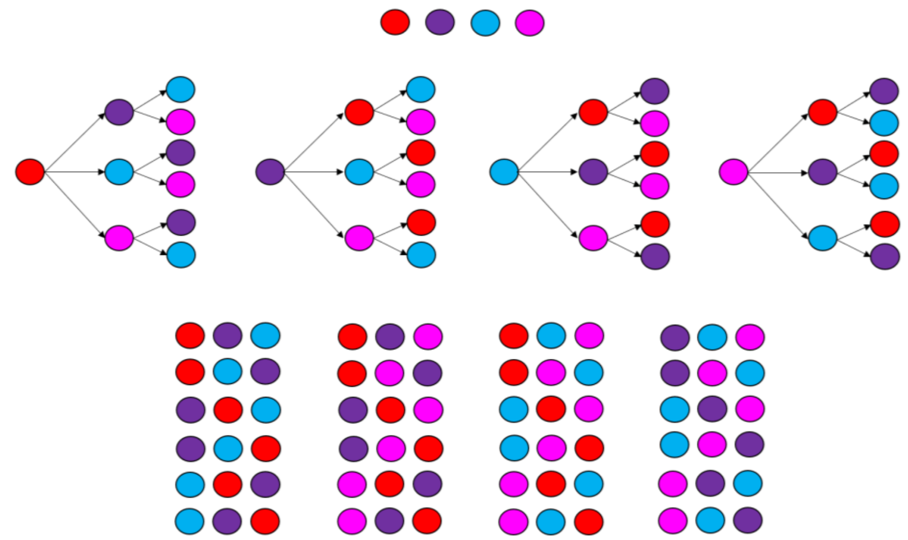
Exemplo 1: Com as 4 cores abaixo, quantos grupos de 2 cores podemos fazer?



Com 4 cores, escolhendo 2, foi possível formar 12 senhas, mas cada grupo de cor se repetiu 2 vezes, logo foi possível formar 6 grupos. Perguntei para eles o seguinte,

Exemplo 2: E se tivéssemos as mesmas 4 cores, mas agora tivéssemos que montar grupos de 3 cores?

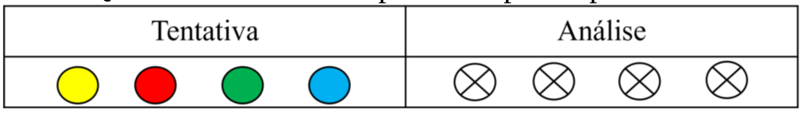
Estudante1: - Ué, cada senha vai se repetir 3 vezes.
Estudante2: - Mas agora a quantidade senhas é maior, 4x3x2 = 24.
Professor: - Vamos fazer a árvore de possibilidades para ver.



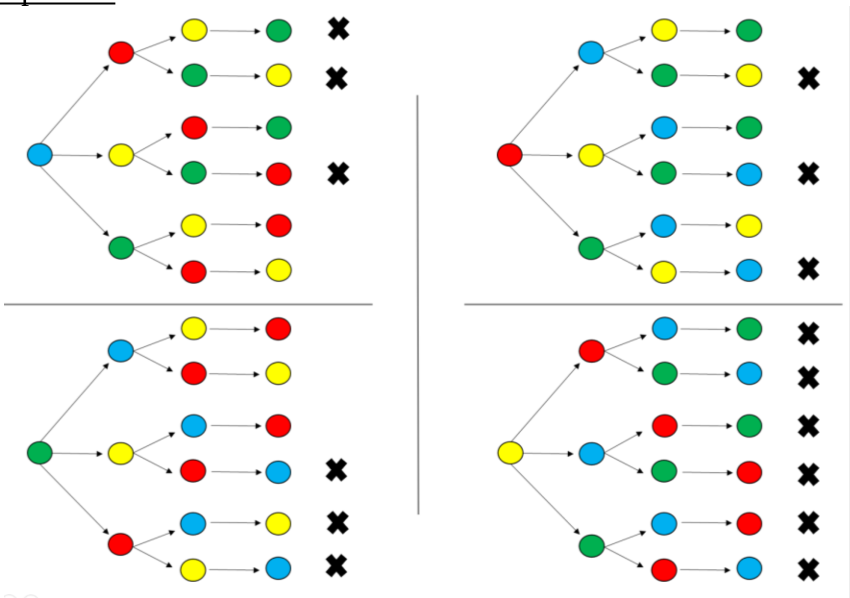
Professor: - Realmente foi possível fazer 24 senhas, mas cada senha se repetiu 6 vezes! Por quê?
Estudante3: - Porque com cada grupo de 3 cores podem ser feitas 6 senhas.
Professor: - Exatamente, e por que formamos 4 grupos?
Estudante3: - Porque 24 dividido por 6, é igual a 4.
Professor: - Perfeito, agora vamos voltar para o Quiz.

Após essa intervenção, os alunos ficaram conversando entre si dentro dos grupos por mais uns 5 min e três grupos do seis conseguiram responder corretamente à questão. Voltei ao quadro e expliquei a questão para todos.

Questão 8 - O jogador que está tentando adivinhar a senha teve em sua primeira tentativa a análise abaixo. Quantas são as senhas possíveis para a próxima tentativa?

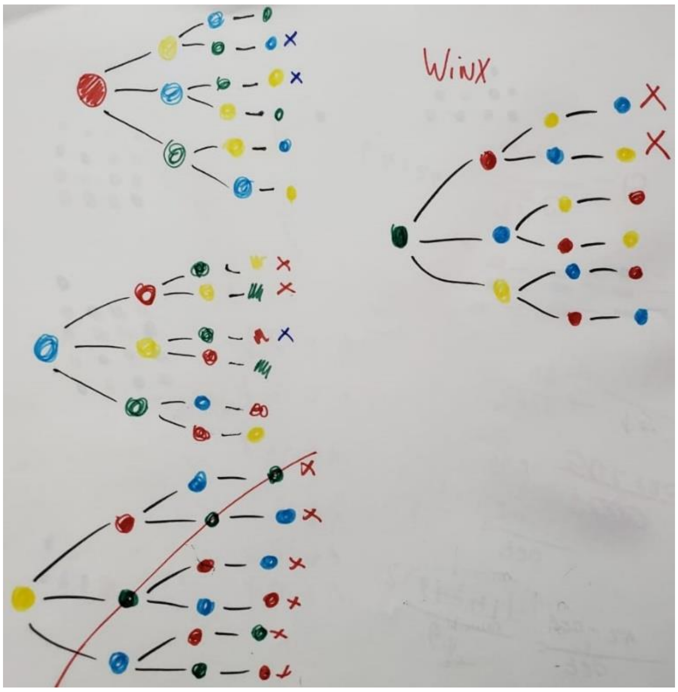


<u>Resposta esperada:</u> 9 Senhas



No início da aula 3 foi devolvido a árvore de possibilidades construída pelos grupos na aula anterior, assim que a questão 8 foi apresentada no Quiz, todos os grupos conseguiram perceber a relação entre essa questão e a Questão 5, mesmo assim nenhum grupo chegou na reposta de 9 senhas, muitas vezes por falta de atenção. Na figura 13 abaixo temos um exemplo de um grupo que teve o raciocínio correto, porém não chegou na resposta.

Figura 13 – Resposta incorreta Questão 8 do Quiz



Fonte: dados da pesquisa

Finalizado o Quiz, 3 grupos terminaram empatados. Para premiar os estudantes foi dado a cada grupo uma caixa de bombom e foram distribuídos pirulitos para todos os alunos da turma.

4.4.4 Aula 4 (12/06/2023)

Para essa última aula ficaram pendentes a aplicação do pós-teste para verificar a aprendizagem e a aplicação do questionário de reação. Observa-se que houve um novo intervalo de 2 semanas entre essa aula e a anterior por conta de um problema institucional. Tal como aconteceu anteriormente, nesse período não ocorreram aulas de matemática nem qualquer outra instrução relacionada ao conteúdo em questão. A seguir o resultado do pós-teste.

Tabela 2 – Resultado Pós-Teste

Estudante	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Nota
E1	1	1	1	3
E2	1	1	1	3
E3	1	0	1	2
E4	1	1	1	3
E5	1	1	1	3
E6	1	1	1	3
E7	1	1	1	3
E8	1	1	1	3
E9	1	1	0	2
E10	1	1	1	3
E11	1	1	1	3
E12	1	1	1	3
E13	1	1	1	3
E14	1	1	1	3
E15	1	0	1	2
E16	1	0	1	2
E17	0	0	1	1
E18	1	1	1	3
E19	0	0	1	1
E20	1	1	1	3
E21	1	1	1	3
E22	1	0	1	1

Fonte: elaborado pelo autor

Observando o a tabela 2 acima, vemos que está faltando a coluna da questão 4, isso ocorre, pois, essa questão ficou viesada por um descuido do aplicador. Na aplicação tanto do pós-teste como também no pré-teste foi explicado aos alunos que o teste valia nota, isso foi dito para que os alunos fizessem com mais atenção e dedicação os testes. Contudo, durante o pós-teste a questão 4 estava gerando muita reclamação pois os estudantes não se lembravam como resolvê-la. Dessa forma, seguiu-se o seguinte diálogo.

Professor: - Lembrem-se do Quiz da aula anterior. Para descobrir a quantidade de grupos, tínhamos todas as senhas e a quantidade de senhas que cada grupo poderia fazer.

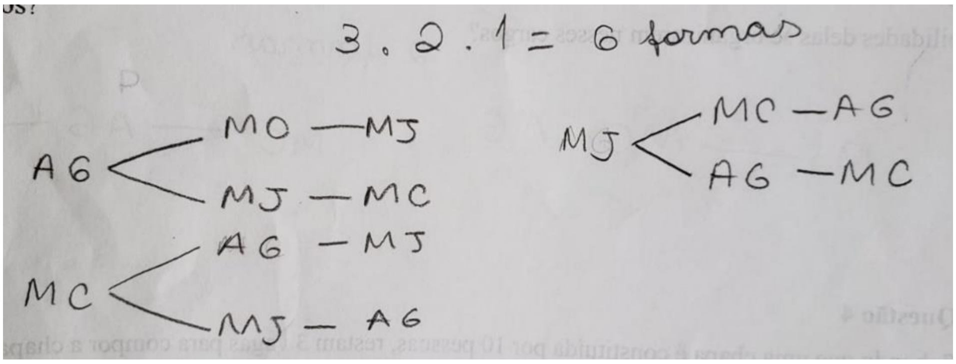
Nesse momento, um estudante falou em voz alta.

Estudante: - Ah, é só dividir.

Dessa forma, muitas respostas para a questão 4 estão similares, e optamos por retirá-la da avaliação do pós-teste.

Em relação à questão 1, a presença de resoluções por meio de tabelas e tentativa e erro se manteve, mas é interessante notar o surgimento de resoluções utilizando o diagrama de árvore em comparação ao pré-teste.

Figura 14 – Exemplo de resolução correta da questão 1 no pós-teste

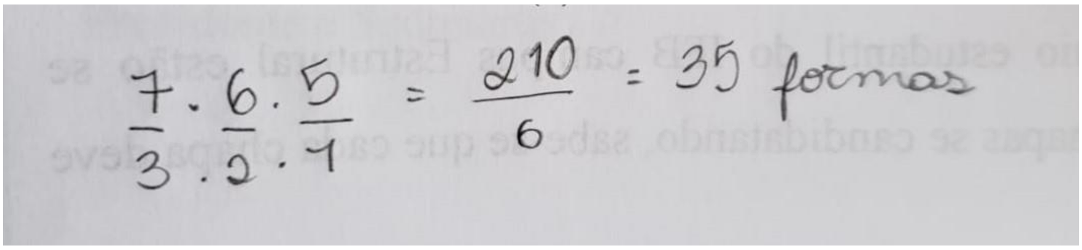


Fonte: dados da pesquisa

Na questão 2, todos os estudantes que acertaram a questão utilizaram o princípio multiplicativo para resolução: $7 \times 6 \times 5 = 210$.

Já os erros cometidos foram de 2 tipos, ou multiplicaram os dados da questão novamente igual ao pré-teste: $7 \times 3 = 21$, ou se confundiram por conta da questão de combinação, como vemos na figura 15 abaixo

Figura 15 – Exemplo de erro na questão 2 do pós-teste



Fonte: dados da pesquisa

Na questão 3, a quantidade de acertos foi quase total, sendo que E9 só errou a questão pois por mais que tenha escrito 2 opções, só enumerou 1 agrupamento. Entendemos que isso é prova de que os estudantes conseguiram fazer a conexão entre as questões 1 e 3.

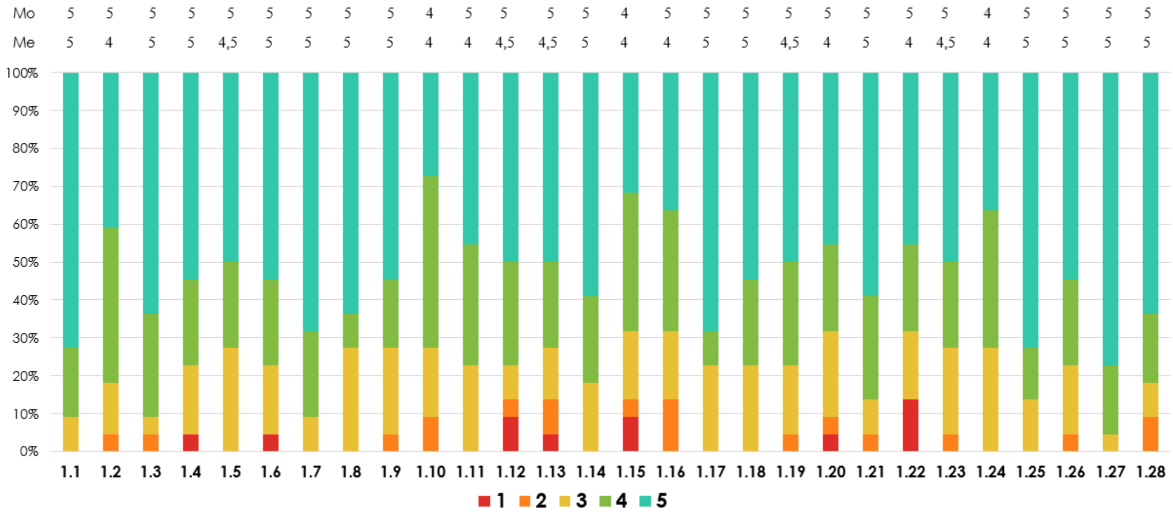
O questionário de reação foi aplicado ao final da aula, na sequência do pós-teste, e seus resultados serão mais bem explorados na subseção de Avaliação.

4.5 Avaliação

4.5.1 Avaliação de Reação (Nível 1 de Kirkpatrick)

O questionário de Reação (Quadro 7) foi respondido por 22 estudantes, sendo que todas as questões eram obrigatórias. O 1º subtópico do questionário (questionário de reação ao jogo) que possui 28 afirmações, foram avaliados e pontuados de 1 a 5 na escala Likert, com um ponto central de neutralidade (julgamento 1: discordo totalmente, 2: discordo, 3: neutro, 4: concordo, 5: concordo totalmente). O resultado está exposto no gráfico 3 a seguir.

Gráfico 3 - Resultado Questionário de Reação ao Jogo



Fonte: elaborado pelo autor

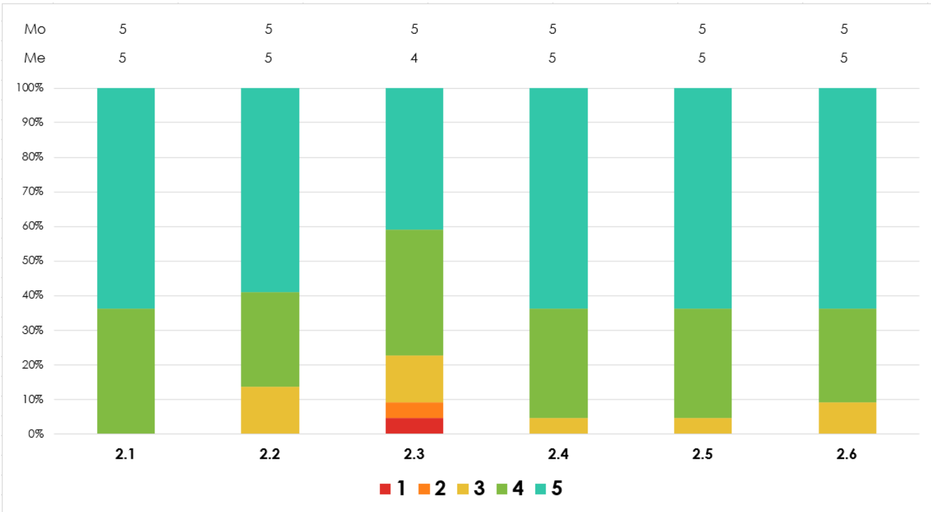
É importante comentar que todas as perguntas tiveram mediana e moda superior ou igual a 4, ou seja, os estudantes em sua maioria concordaram ou concordaram totalmente com as questões expostas no Quadro 7.

A afirmações 1.1 (O jogo da senha possibilitou meu aprendizado por meio de experimentação de soluções corretas e incorretas), 1.3 (O jogo da senha conseguiu estimular minha atenção), 1.7 (As atividades em grupo durante o quiz foram colaborativas e incentivaram a discussão entre os membros do grupo) e 1.27 (Eu me esforcei para obter bons resultados no jogo da senha) foram pontuadas com notas 4 e 5 por mais de 90% dos estudantes.

Já as afirmações 1.15 (Eu estou confiante com o aprendizado e a experiência que obtive no jogo da senha), 1.16 (As perguntas do quiz foram claras e compreensíveis), 1.20 (Eu não percebi o tempo passar enquanto jogava), 1.22 (Eu gostei do jogo e não me senti ansioso ou entediado por causa dele) receberam notas menores ou iguais a 3 por um pouco mais de 30% dos estudantes. Um comentário sobre a afirmação 1.22 cabível aqui, é que os alunos que deram uma nota baixa nesse item me relataram dar essa nota por conta de ficarem ansiosos com o jogo, não por ficarem entediados, logo, talvez essa afirmação devesse ter sido dividida em 2.

Já o 2º subtópico (questionário de reação do estudante à aprendizagem com o jogo) possuiu 6 afirmações, sendo que os resultados estão expostos no gráfico 4.

Gráfico 4 - Resultado do Questionário de Reação do estudante à aprendizagem com o Jogo (Percepção de Aprendizagem)



Fonte: elaborado pelo autor

As afirmações 2.1 (Eu acredito que o jogo da senha contribuiu muito para iniciar/complementar meu conhecimento sobre contagem), 2.4 (Eu acredito que a experiência adquirida no jogo da senha irá contribuir para um melhor desempenho no decorrer do conteúdo de combinatória), 2.5 (O jogo da senha possibilitou-me criar conceitos lógicos referentes à análise combinatória) e 2.6 (O Quiz do jogo da senha possibilitou-me experimentar aplicação prática dos princípios aditivo e multiplicativo) também foram avaliadas positivamente por mais de 90% dos estudantes.

Já as afirmações 2.2 (Eu acredito que este jogo foi eficiente na aprendizagem e prática do raciocínio combinatório) e 2.3 (Eu consigo relacionar o que aprendi com a realidade) também foram bem avaliadas, mas receberam algumas pontuações neutras e baixas, principalmente a afirmação 2.3. Mesmo assim as medianas e modas de todas as afirmações foram iguais a 5, com exceção de 2.3 que teve mediana igual a 4.

4.5.2 Avaliação de Aprendizagem (Nível 2 de Kirkpatrick)

Os resultados de pré e pós testes já foram expostos anteriormente, porém nosso objetivo aqui é compreender como evoluíram os estudantes ao longo dessas 4 aulas trabalhando o jogo da senha. Relembrando que, como já exposto, a questão 4 foi retirada para efeitos de avaliação por estar viesada. Logo, a nota máxima de cada teste foi igual a 3 (atribuído valor 1 para questão certa e 0 para questão errada). Na tabela 3 abaixo, temos os resultados de cada questão no pré e pós-teste.

Tabela 3 – Notas antes(Pré-teste) e depois(Pós-teste) de cada questão

Estudante	Questão 1		Questão 2		Questão 3	
	Antes	Depois	Antes	Depois	Antes	Depois
E1	1	1	0	1	1	1
E2	1	1	0	1	1	1
E3	1	1	0	0	0	1
E4	1	1	0	1	0	1
E5	0	1	0	1	0	1
E6	1	1	0	1	0	1
E7	1	1	0	1	0	1
E8	1	1	0	1	1	1
E9	0	1	0	1	0	0
E10	1	1	0	1	1	1
E11	1	1	0	1	0	1
E12	1	1	0	1	0	1
E13	1	1	0	1	1	1
E14	0	1	0	1	0	1
E15	1	1	0	0	0	1
E16	1	1	1	0	0	1
E17	1	0	0	0	0	1
E18	1	1	0	1	1	1
E19	0	0	0	0	1	1
E20	1	1	0	1	1	1
E21	1	1	0	1	1	1
E22	0	1	0	0	0	0
Percentual	77%	91%	5%	73%	41%	91%

Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se que na questão 1, houve um aumento de acertos de 14% do pré-teste para o pós-teste, na questão 2 o aumento de foi de 68%, e na questão 3 o aumento percentual foi 50%, logo, em todas as questões houve uma melhora entre o pré e o pós-teste, sendo um indício de desenvolvimento do raciocínio combinatório. Na tabela 4, temos a nota final de cada estudante no pré e pós teste, e a respectiva média da nota dos estudantes A nota varia de 0 a 3.

Tabela 4 – Nota final antes e depois

Estudante	Nota		Diferença Nota
	Antes	Depois	(D - A)
E1	2	3	1
E2	2	3	1
E3	1	2	1
E4	1	3	2
E5	0	3	3
E6	1	3	2
E7	1	3	2
E8	2	3	1
E9	0	2	2
E10	2	3	1
E11	1	3	2
E12	1	3	2
E13	2	3	1
E14	0	3	3
E15	1	2	1
E16	2	2	0
E17	1	1	0
E18	2	3	1
E19	1	1	0
E20	2	3	1
E21	2	3	1
E22	0	1	1
Média	1,2273	2,5455	1,3182

Fonte: elaborado pelo autor

Por essa tabela, temos que a nota média dos alunos no pré-teste foi igual a 1,2273 e a nota média no pós-teste foi igual a 2,5455. Sendo assim, entre o pré e o pós teste existe uma diferença média de 1,3182 da nota final dos estudantes, sendo mais um indício que houve aprendizagem ao introduzir o conteúdo de combinatória no ensino médio a partir do jogo da senha.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do apresentado, entendemos que o jogo da senha atingiu seu objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório em uma turma de 3º ano do ensino médio integrado do IFB. Os resultados obtidos na avaliação de reação revelaram que a maioria dos estudantes concordou ou concordou totalmente com as questões apresentadas no questionário de reação ao jogo. Isso indica uma recepção positiva e aceitação por parte dos alunos em relação à abordagem utilizada.

No questionário de pré e pós-teste, observou-se um aumento significativo no número de acertos entre o pré e o pós-teste em todas as questões. Os alunos apresentaram uma melhora média de 1,3182 na nota final entre os dois momentos de avaliação. Esses resultados demonstram a efetividade do uso do jogo da senha como uma estratégia para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

As respostas dos estudantes à pergunta aberta (Apêndice A) revelaram percepções adicionais sobre a experiência com o jogo da senha. A maioria dos alunos expressou satisfação com a abordagem dinâmica e interativa das aulas, destacando que o jogo contribuiu significativamente para a compreensão da matéria e o engajamento geral.

No entanto, algumas sugestões de melhoria também foram mencionadas. Alguns alunos expressaram o desejo de ter tido mais aulas teóricas ou exercícios preparatórios antes de participarem do quiz e do jogo da senha, acreditando que isso poderia ter proporcionado uma base mais sólida para a compreensão dos conceitos.

Essas respostas também reforçam a percepção geral de que o uso de jogos no ensino, como o jogo da senha, pode aumentar o interesse e a motivação dos alunos, tornando as aulas mais atrativas e interativas.

Apesar dos resultados positivos observados até o momento, é fundamental ressaltar que uma validação externa desempenharia um papel crucial na confirmação e no fortalecimento das conclusões deste estudo. Recomenda-se, portanto, que pesquisas futuras levem em consideração a possibilidade de realizar uma validação externa mais abrangente, incorporando uma análise estatística mais detalhada e ampliando a amostra para incluir outras turmas ou instituições de ensino. Ao realizar essas medidas adicionais, será possível obter uma compreensão mais completa e abrangente dos impactos do jogo da senha no desenvolvimento do raciocínio combinatório e sua relevância no contexto educacional.

Portanto, com base nos objetivos alcançados e nos resultados obtidos, concluímos que a utilização do jogo da senha como uma ferramenta no ensino de raciocínio combinatório no ensino médio é uma abordagem promissora. Essa abordagem proporcionou engajamento dos alunos, facilitou a compreensão dos conceitos e contribuiu para o desenvolvimento de habilidades combinatórias.

REFERÊNCIAS

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan D.; NAVARRO-PELAYO, Virginia. 18. Combinatorial Reasoning and its Assessment. 1997.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: X ENEM, 2010.

BORBA, R.; ROCHA, C. A.; LIMA, A. P. B. **Conhecimentos docentes sobre combinatória:** reflexões para a prática em sala de aula. In LAURINO, D. P.; RODRIGUES, S.C. (Org) Estudos em Educação em Ciência. Editora da FURG: Rio Grande, 2016. p. 234-252. Disponível em: < http://repositorio.furg.br/handle/1/5939>. Acesso em: 11 dez. 2022.

BORBA, R.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. **Estudos em Raciocínio Combinatório:** investigações e práticas de ensino na Educação Básica. Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. 2015, v. 29, n. 53, p. 1348-1368. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a27. Acesso em: 7 Jan. 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Matriz de Referência de Matemática do Saeb**. Brasília, DF: Inep, 2022a. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/matriz-de-referencia-de-matematica_2001.pdf>. Acesso em 9 jul. 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Escalas de proficiência do Saeb**. Brasília, DF: Inep, 2020.Disponível em : <https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/escalas_de_proficiencia_do_saeb.pdf>. Acesso em 9 jul. 2023.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Apresentação de resultados do Saeb 2021**. Brasília, DF: Inep, 2022b. Disponível em : < https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/apresentacao_saeb_2021.pdf>. Acesso em 9 jul. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental). V.3. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).** Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

CABRAL, Marcos Aurélio. **A utilização de jogos no ensino de matemática**. 2006. Monografia (Conclusão de Curso) — Universidade Federal de Santa Catarina.

CARDOSO, Evelyn Rosana; GUIRADO, João Cesar. **Análise Combinatória:** da Manipulação à Formalização de Conceitos. [S. l.], 2007. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/246-2.pdf. Acesso em: 10 dez. 2022.

CENTRO UNIVERSITÁRIO PROJEÇÃO (UniProjeção). **Projeto Pedagógico do Curso de Matemática**. 2016. Disponível em: < https://projecao.br/centraldocumentos/download/5984 > Acesso em: 20 jan. 2023.

FERREIRA, F.P. **Análise Combinatória no Ensino Médio**: uma abordagem sem o uso de fórmulas. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Juazeiro - BA, 2013

FILATRO, Andrea. Design instrucional na prática. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

FILATRO, Andrea. Design instrucional para professores. Editora Senac São Paulo, 2023.

FONSECA, S. S.; SOUZA, I. S.; FONSECA, A. J. S.; SANTOS, S. G.; SUSSUCHI, E. M.; S. FILHO, J. C. Uma reflexão sobre o conteúdo Análise Combinatória em dois livros didáticos do ensino médio. Scientia Plena, [S. l.], v. 10, n. 4(b), 2014. Disponível em: https://scientiaplena.org.br/sp/article/view/1929. Acesso em: 8 jan. 2023.

GRANDO, R.C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.** São Paulo: Paulus, 2004.

HAZZAN, Samuel. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR**: Combinatória Probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 5.

HERMANN, W. et al. Um panorama das publicações de quatro periódicos da área de Educação Matemática a respeito de jogos como recursos didáticos para o ensino de Matemática. **Research, Society and Development**, vol. 9, no. 10, 2020, p. e6639109002.

INSTITUTO FEDERAL DE BRASÍLIA. Campus Estrutural (IFB). **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. 2018. Disponível em: <https://www.ifb.edu.br/attachments/article/10493/PPC%20Matem%c3%a1tica%2002072018%20revisado%20pelo%20NDE.pdf> Acesso em: 20 jan. 2023.

KIRKPATRICK, Donald; KIRKPATRICK, James. **Evaluating training programs: The four levels**. Berrett-Koehler Publishers, 2006.

MARTARELLI, L. C. T.; SOUTO, B. P. M.. A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DE JOGOS. In: XV ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Londrina. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática-EPREM. Londrina, 2019. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1i2SUpaL_ek6FOzIi_GB4SJHMmlxdsKGc/view >. Acesso em: 2 jul. 2023.

MARTARELLI, L. C. T.; SOUTO, B. P. M.; SILVA, F. G.; TAJIMA, U. C. . O jogo da senha no GeoGebra e suas atividades exploratórias em combinatória. **Revista do Instituto**

GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 10, p. 40-59, 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/53710 . Acesso em: 8 jan. 2023.

MARTARELLI, L. da C. T. .; SILVA, U. D. da . Compreendendo critérios de validação de problemas de contagem utilizados por professores da Educação Básica. **Ensino em Re-Vista**, [S. l.], v. 27, n. Especial, p. 1542–1564, 2020. DOI: 10.14393/ER-v27nEa2020-16. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/57451. Acesso em: 17 dez. 2022.

MORGADO, A.C.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**: com as soluções dos exercícios. 10 ed. Editora SBM: Rio de Janeiro, 2016.

OLIVEIRA, R et al. Avaliações em Jogos Educacionais**:** instrumentos de avaliação da reação, aprendizagem e comparação de jogo. **In SBIE**, 2019, p. 972-981.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, n. 1, p. 1-22, 2010.

ROCHA, R. V.; BITTENCOURT, I.; ISOTANI, S. Avaliação de Jogos Sérios: questionário para autoavaliação e avaliação da reação do aprendiz. In: XIV Simpósio Brasileiro de Games e Entretenimento SBGames. Trilha de Art & Design, Teresina, 2015. p.648-657.

SABO, R, D. **O ensino dos conceitos de análise combinatória e o livro didático:** discurso de professores do Ensino Médio, p. 1-20, 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/257-1-A-GT1_sabo_ta.pdf. Acesso em: 09 jan.2023.

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **– Introdução à Análise Combinatória** – 4ª edição revista – Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.SBIE, p. 947-956.

SILVA, J. C. T. **Reflexões sobre Conhecimentos Evidenciados por Licenciandos em Matemática por meio da Elaboração de um Jogo sobre Análise Combinatória**. 132f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Vitória, 2014.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. **Cadernos do Mathema: Jogos de Matemática de 1º a 5º ano** - Ensino Fundamental. Porto Alegre/RS, Brasil: Artmed, 2007.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. Jogo “Grelha Retangular 3 X 4”: Uma Proposta Para O Desenvolvimento Do Raciocínio Combinatório. **Revista Eletrônica De Educação Matemática**, Florianópolis, v.16, 1-21, jan./dez., 2021.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. O exercício do Raciocínio Combinatório nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e o Letramento Combinatório. *In*: GASPAR, José Carlos Gonçalves *et al*, (org.). **Formação de Professores de Matemática e Contemporaneidade**. Nova Xavantina, MT: Pantanal, 2022. cap. III, p. 41-60. ISBN 978-65-81460-27-3. *E-book* (82 p.).

UFF. Dalincenca, 2021. Se Jogando na Matemática: Jogo Senha. Disponível em: < https://dalicenca.uff.br/2021/04/13/se-jogando-na-matematica-jogo-senha/ >. Acesso em: 2 jul. 2023.

UNIVERSIDADE CATÓLICA DE BRASÍLIA (UCB). **Projeto Pedagógico Curso Matemática.** 2010. Disponível em: < https://ucb.catolica.edu.br/portal/wp-content/uploads/2019/02/projetopedagogicomatematica.pdf > Acesso em: 20 jan. 2023.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA (UnB). **Projeto Político Pedagógico Licenciatura em Matemática.** 2012. Disponível em: <https://mat.unb.br/upload/graduacao-cursos/2019_07_02/PPC-Licenciaturas.pdf> Acesso em: 20 jan. 2023.

APÊNDICE A - RESPOSTAS QUESTÃO ABERTA

Com base em sua experiência com o jogo da senha, você teria alguma sugestão de melhoria ou alguma outra observação que gostaria de compartilhar?
Eu gostaria de ter ensinado e feita exercícios da matéria antes dos quiz e jogo da senha, seria melhor.
Não, professor top, dinâmica diferenciada!
o jogo ajudou muito na compreensão da matéria.
mudar o site do quiz
Fazermos mais exercícios ou revisar os exercícios para fixar mais pois com exercícios junto com o professor conseguimos entender mais. Mas as aulas foram bem interativas e conseguimos entender
Perguntas um pouco mais claras para ter uma compreensão, e poder responder de forma mais condizente
eu gostei muito do contéudo
Não, só gostei muito das suas aulas, e da metodologia que você usou, as aulas ficaram mais interativas.
nenhuma observação
acho que não tava tranquilo
ótimo e deveria ser aplicado nas outras matérias
Muito bom e didática muito interessante das aulas.
Gostaria que o professor nos desse mais orientações sobre como efetuar os cálculos, me senti burra lendo as questões e isso foi frustrante
A id4eia de colocar um jogo faz com que tenhamos mais vontade de participar das aulas, além do mais quando é adicionado ao jogo um tipo de estímulo, mesmo que seja um pirulito. Obrigada por essas aulas, ajudaram muito.

Documento Digitalizado Público

TCC Gustavo Henrique

Assunto: TCC Gustavo Henrique
Assinado por: Antonio Neto
Tipo do Documento: Trabalho de Conclusão de Curso - TCC
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Público
Tipo do Conferência: Documento Original

Documento assinado eletronicamente por:

- **Antonio Dantas Costa Neto**, **COORDENADOR DE CURSO - FUC1 - ES-GRAD-LM**, em 18/09/2023 17:49:18.

Este documento foi armazenado no SUAP em 18/09/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 506075
Código de Autenticação: 372d039f7a