



**INSTITUTO
FEDERAL**

Brasília

Instituto Federal de Brasília
Campus Taguatinga
Licenciatura em Física

Ana Luiza Oliveira Sousa

**DISCUSSÕES ACERCA DOS OSCILADORES CLÁSSICO E
QUÂNTICO**

Brasília
2025

Ana Luiza Oliveira Sousa

DISCUSSÕES ACERCA DOS OSCILADORES CLÁSSICO E QUÂNTICO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Brasília do *Campus* Taguatinga, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Hara Dessano Menezes
Instituto Federal de Brasília

Brasília
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo bibliotecário
Marcelo José Rodrigues da Conceição (CRB1-2323)

Sousa, Ana Luiza Oliveira

S725d Discussões acerca dos osciladores clássico e quântico / Ana Luiza Oliveira Sousa.
Brasília-DF, 2025.

50 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília, Campus Taguatinga, 2025.

Orientador: Hara Dessano Menezes.

Inclui referências.

1. Física – Estudo e ensino. 2. Física quântica. 3. Teoria quântica. 4. Mecânica. I.
Título. II. Menezes, Hara Dessano. III. Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de Brasília.

CDU 530.145



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

Ana Luiza Oliveira Sousa

DISCUSSÕES ACERCA DOS OSCILADORES CLÁSSICO E QUÂNTICO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física do Campus Taguatinga do Instituto Federal de Brasília como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Hara Dessano Menezes

Aprovado em: 24 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Maia Dias Ledo - Instituto Federal de Brasília

Prof. Dr. Tiago de Jesus e Castro - Instituto Federal de Brasília

Prof. Dr. Hara Dessano Menezes - Instituto Federal de Brasília

Documento assinado eletronicamente por:

- **Hara Dessano Menezes**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 24/07/2025 18:26:27.
- **Rodrigo Maia Dias Ledo**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 24/07/2025 18:36:56.
- **Tiago de Jesus e Castro**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 28/07/2025 09:53:55.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 24/07/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifb.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 632618

Código de Autenticação: 08eccc74e5



Campus Taguatinga
QNM 40 A/E 01, None, TAGUATINGA NORTE,
TAGUATINGA / DF, CEP 72.146-050
(61) 2103-2200

Em memória do meu pai, que nunca tirou a
mão do meu ombro quando o mundo pesou
sobre os meus pés.

AGRADECIMENTOS

Em memória do meu pai, **Jaime Pascoal**,
cuja presença sempre iluminou minha vida.

Em homenagem à minha avó, **Maria das Dores**,
ao meu irmão, **Artur Climaco**,
e ao meu tio, **Jander Oliveira**,
por todo o amor e carinho que sempre me dedicaram.

Ao meu namorado, **Guilherme Carlos**,
o meu mais sincero agradecimento.
Por ter sido meu apoio nos dias mais difíceis,
por ser o companheiro que tornou esta jornada mais leve,
e por ser a pessoa que amo de todo o coração.

“Só mais um round!”
— **Rocky Balboa.**

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise comparativa entre os osciladores harmônicos clássico e quântico, destacando suas semelhanças e diferenças fundamentais. No contexto clássico, o oscilador é descrito pelo formalismo hamiltoniano, com trajetórias contínuas e energia variando de forma contínua. Já na abordagem quântica, os observáveis são representados por operadores, resultando em níveis discretos de energia e uma energia mínima não nula, mesmo no estado fundamental. Em sistemas com altos números quânticos, os resultados quânticos aproximam-se progressivamente das previsões clássicas.

O estudo foi desenvolvido como material de apoio para professores do ensino básico, oferecendo uma visão clara das diferenças conceituais entre as duas abordagens. Além disso, serve como referência para estudantes de graduação em física, apresentando de forma didática a transição entre a física clássica e quântica através deste sistema fundamental. A comparação evidencia como um mesmo fenômeno físico pode ser interpretado de maneiras distintas em diferentes escalas, enriquecendo a compreensão dos princípios que regem cada teoria.

Palavras-chave: Oscilador harmônico clássico, Oscilador harmônico quântico, Mecânica clássica, Mecânica quântica, Formalismo hamiltoniano.

ABSTRACT

This work presents a comparative analysis between classical and quantum harmonic oscillators, highlighting their fundamental similarities and differences. In the classical context, the oscillator is described by Hamiltonian formalism, with continuous trajectories and continuously varying energy. In the quantum approach, observables are represented by operators, resulting in discrete energy levels and a non-zero minimum energy, even in the ground state. For systems with high quantum numbers, quantum results progressively approach classical predictions.

The study was developed as supporting material for basic education teachers, providing a clear view of the conceptual differences between the two approaches. Additionally, it serves as a reference for undergraduate physics students, presenting in a didactic manner the transition between classical and quantum physics through this fundamental system. The comparison demonstrates how the same physical phenomenon can be interpreted differently at different scales, enriching the understanding of the principles governing each theory.

Keywords: Classical harmonic oscillator, Quantum harmonic oscillator, Classical mechanics, Quantum mechanics, Hamiltonian formalism.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema massa mola	5
Figura 2.2 – Triângulo retângulo com as respectivas constantes.	10
Figura 4.1 – Escada de energia (operadores).	26
Figura 5.1 – Análise do sistema massa-mola.	31
Figura 5.2 – Energia do sistema massa-mola.	32
Figura 5.3 – Níveis energéticos para o oscilador quântico	34
Figura 5.4 – Comportamento dos níveis energéticos	35
Figura 5.5 – Gráfico de $ \psi_{60} ^2$ com o distribuição clássica (curva tracejada) sobreposto.	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	OSCILADOR HARMÔNICO CLÁSSICO	3
2.1	Modelo de oscilador harmônico clássico	3
3	MECÂNICA QUÂNTICA: UMA BREVE REVISÃO DO FORMA-	
	LISMO	13
3.0.1	<i>Notação de Dirac</i>	13
3.0.2	<i>Operadores lineares</i>	15
3.0.3	<i>Autovalor e autovetor</i>	16
3.0.4	<i>Equação de Schrödinger</i>	17
3.0.5	<i>Princípio da incerteza</i>	19
4	OSCILADOR QUÂNTICO	21
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	30
5.1	Análise da posição entre os osciladores	30
5.2	Análise energética entre os osciladores	31
5.2.1	<i>Oscilador clássico</i>	31
5.2.2	<i>Oscilador quântico</i>	33
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Os osciladores harmônicos ocupam um lugar importante na física, tanto no contexto clássico quanto no quântico. É considerado um dos sistemas mais fundamentais e amplamente estudados e serve como base para a compreensão de vários fenômenos físicos. Para Shankar (1980), o oscilador harmônico deve ser colocado em seu lugar, em um pedestal, ao ser um sistema que pode ser resolvido exatamente tanto na teoria clássica quanto na quântica. Como Taylor (2013) aponta, a análise de sistemas harmônicos é importante para entender o comportamento de sistemas mais complexos porque estes podem frequentemente ser aproximados como oscilações harmônicas próximas a um ponto de equilíbrio.

Neste trabalho serão discutidos os resultados obtidos para o oscilador harmônico, utilizando o mesmo formalismo matemático, o hamiltoniano, porém com duas abordagens diferentes: a clássica e a quântica. Primeiro serão obtidas as equações de movimento do oscilador clássico. O formalismo hamiltoniano será adotado, pois nos permite realizar a descrição do oscilador, sendo esse formalismo muito útil para descrever sistemas dinâmicos de forma estruturada e sistemática. Esse formalismo nos permite caracterizar a energia de um sistema em termos de seus componentes cinéticos e potenciais, bem como estabelecer relações fundamentais entre os parâmetros gerais que regem seu comportamento (Taylor, 2013).

Em seguida, o mesmo problema será discutido, porém, utilizando a abordagem quântica. A principal diferença é que os observáveis físicos como posição e momentum passam a ser representados por operadores. Griffiths (2018) destaca a importância do oscilador harmônico quântico como um dos poucos sistemas que podem ser resolvidos exatamente, ao mesmo tempo, em que fornece uma visão profunda do comportamento de sistemas quânticos mais gerais. Em contraste com a visão clássica, o oscilador harmônico quântico fornece o resultado notável de que, mesmo no estado mais baixo, o sistema tem energia diferente de zero, sendo resultado das flutuações quânticas, demonstrando uma diferença marcante em comparação com a termodinâmica clássica, em que a energia zero do sistema é esperada no zero absoluto.

Dessa forma, este trabalho tem o objetivo servir de apoio para o professor de educação superior que tenha interesse em conhecer as diferenças entre os osciladores nos aspectos clássicos e quânticos e como material de consulta para alunos da graduação em física. No Capítulo 2, será realizada uma revisão teórica da importância e aplicações do oscilador harmônico clássico, bem como sua descrição matemática a partir do formalismo hamiltoniano. O Capítulo 3 apresenta uma introdução ao oscilador harmônico quântico e uma breve revisão do formalismo quântico necessário para sua dedução, como o uso de operadores, função de onda e a notação de Dirac. No Capítulo 4, será feita uma

análise comparativa sobre as principais divergências na interpretação física dos resultados encontrados por meio da descrição de ambos os modelos, principalmente nas grandezas que representam a energia, a posição e o momento linear dos sistemas. Por fim, no Capítulo 5 serão apresentadas as considerações finais.

2 Oscilador Harmônico Clássico

Visando uma melhor compreensão a respeito da formulação do oscilador harmônico clássico, este capítulo apresenta o embasamento para a dedução do sistema clássico utilizando o formalismo hamiltoniano. Para tanto, são revisados os conceitos fundamentais do movimento harmônico simples, incluindo suas equações características e propriedades gerais. Em seguida, introduz-se a estrutura da Mecânica Lagrangiana e sua correspondência à Mecânica Hamiltoniana, destacando as definições de coordenadas generalizadas, momento conjugado e a construção da função Hamiltoniana. Por fim, aplica-se esse formalismo ao caso específico do oscilador harmônico, obtendo suas equações de movimento.

2.1 Modelo de oscilador harmônico clássico

Segundo Bloch (1997), quando qualquer sistema realista vibra com pequena amplitude em torno de sua posição de equilíbrio, o sistema pode ser descrito como um oscilador harmônico simples. O oscilador harmônico é um dos sistemas mais fundamentais na física, servindo como base para a compreensão de fenômenos que envolvem oscilações e vibrações. Ele é definido como um sistema onde a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento a partir de um ponto de equilíbrio estável e atua na direção oposta a esse deslocamento. Para Lage (2019), o oscilador harmônico é o dispositivo mais simples capaz de exibir um fenômeno periódico, ainda mais simples que um pêndulo, pois este se reduz ao oscilador harmônico para pequenas amplitudes de oscilação.

O oscilador harmônico é utilizado como modelo em uma ampla gama de contextos, desde molas e pêndulos na mecânica clássica até osciladores elétricos em circuitos e a análise de estados quânticos em mecânica quântica. Conforme Symon (1953) sua simplicidade permite análises detalhadas, ao passo que modelos complexos podem ser aproximados a sistemas harmônicos. A abordagem matemática utilizada para descrever um único oscilador harmônico pode ser utilizada para estudar sistemas quânticos complexos, como, por exemplo, moléculas poliatômicas podem ser modelados como uma coleção de osciladores harmônicos, designados por modos normais de vibração (Lage, 2019). Essa abordagem simplifica o estudo de sistemas físicos reais e fornece uma metodologia poderosa para descrever vibrações em diversos contextos.

Nosso objetivo é comparar os resultados obtidos ao estudar um mesmo sistema físico — o oscilador harmônico — sob duas abordagens diferentes, a mecânica clássica e a mecânica quântica. Apesar de tratarem do mesmo sistema, essas abordagens se aplicam a escalas distintas. Para facilitar essa comparação, utilizaremos um único formalismo matemático comum às duas, o formalismo Hamiltoniano. Este formalismo é alternativo e equivalente ao de Newton. Neste capítulo, estudaremos o movimento harmônico simples

utilizando o formalismo aplicado ao sistema massa-mola. Para tal, será necessária uma breve introdução ao formalismo lagrangiano, pois utilizaremos a função lagrangiana associada ao oscilador. Tanto o formalismo lagrangiano, quanto o hamiltoniano são equivalentes à mecânica newtoniana, definida em um espaço euclidiano tridimensional. Neste espaço é construído um sistema de coordenadas cartesianas, no qual cada eixo, (x, y, z) , está associado a uma direção. No entanto, em sistemas onde as partículas não podem se mover livremente sobre todo o espaço, devem ser verificadas algumas equações de vínculo entre as coordenadas de suas partículas e dessa forma será mais conveniente a utilização de outros sistemas de coordenadas (Pessoa, 2016).

O formalismo lagrangiano e hamiltoniano são construídos com base em coordenadas generalizadas, definidas em espaços matemáticos, cujo número de dimensões corresponde à quantidade de coordenadas generalizadas e, na maioria dos casos, coincide com o número de graus de liberdade do sistema.

Desenvolvidas entre o final do século XVIII e início do século XIX essas duas formulações matemáticas possuem o objetivo de descrever os movimentos mediante uma mecânica analítica, isto é, por meio de funções escalares. A ideia não era substituir a mecânica newtoniana, totalmente estabelecida na época, mas sim desenvolver um método alternativo a fim de lidar com problemas complexos (Taylor, 2013).

Esse método é consequência do Princípio de Hamilton, onde suas equações de movimento são derivadas das equações de Lagrange (Taylor, 2013). As equações desenvolvidas pelo matemático e astrônomo francês Joseph-Louis de Lagrange, em 1788, tiveram como intuito descrever a dinâmica de partículas em qualquer sistema de coordenadas (Marion, 2011).

A formulação matemática lagrangiana é baseada numa função solução para que a integral de ação seja estacionária até a primeira ordem, dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (2.1)$$

onde, a função lagrangiana \mathcal{L} é descrita por um conjunto de coordenadas generalizadas q_i e $\dot{q} = \frac{dq_i}{dt}$ e a integração é realizada entre os instantes t_1 e t_2 .

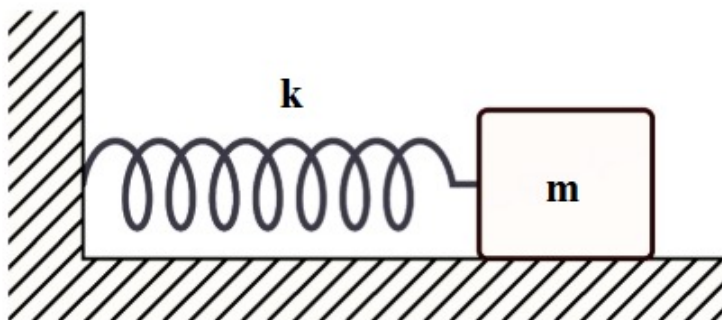
A função que recupera os resultados newtonianos é conhecida como função Lagrangiana, dada pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema. Essa formulação permite reescrever as equações de movimento a partir de princípios variacionais, oferecendo uma abordagem mais geral e poderosa para descrever sistemas dinâmicos. Além de reproduzir os resultados obtidos pela segunda lei de Newton, a lagrangiana serve como ponto de partida para o desenvolvimento do formalismo hamiltoniano, que, por sua vez, será fundamental tanto na análise do oscilador harmônico clássico quanto na sua extensão ao contexto quântico. A lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (2.2)$$

onde, T representa a energia cinética e V a energia potencial do sistema.

No caso a ser analisado, consideraremos uma massa m conectada a uma mola com constante elástica k de massa desprezível, que oscila em uma única dimensão sobre uma superfície sem atrito, como representado pela Figura 2.1.

Figura 2.1 – Sistema massa mola



Fonte: elaborado pelo autor.

Temos um sistema unidimensional, possuindo apenas um grau de liberdade e, por isso, todo o movimento é descrito pela coordenada x , que passa a ser chamada de coordenada generalizada do sistema. Daqui em diante usaremos a notação $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, isto é, a derivada temporal da variável associada. Desta forma, a energia cinética do sistema é

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \quad (2.3)$$

Consideraremos apenas os casos em que a força F é restauradora e depende exclusivamente da posição, ou seja, $F = F(x)$. Embora a forma exata dessa função não seja conhecida, sabemos que se trata de uma força restauradora: quando o corpo se desloca para longe de uma posição de equilíbrio, a força tende a trazê-lo de volta. Assim, é razoável supor que exista um ponto x_0 no qual a força seja nula, o que representa a posição de equilíbrio. Sem perda de generalidade, podemos tomar $x_0 = 0$ como sendo essa posição.

Supondo que a função $F(x)$ seja suficientemente suave, ou seja, possua derivadas contínuas de todas as ordens, podemos expandi-la em série de Taylor ao redor do ponto $x = 0$

$$F(x) = F(0) + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left(\frac{d^3 F}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (2.4)$$

Como estamos expandindo em torno da posição de equilíbrio, assumimos $F(0) = 0$, pois neste ponto não há força atuando sobre o sistema. Além disso, se considerarmos apenas oscilações suficientemente pequenas em torno da origem, os termos de ordem superior (x^2 , x^3 , etc.) podem ser desprezados, pois seu valor será muito pequeno em comparação com o termo linear. Com isso, a expressão da força pode ser aproximada por

$$F(x) \approx x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 \quad (2.5)$$

definindo $k = - \left(\frac{dF}{dx} \right)_0$, obtemos a expressão final para a força restauradora

$$F(x) \approx -kx, \quad (2.6)$$

onde o sinal negativo indica que a força é sempre dirigida no sentido oposto ao deslocamento x , característica de forças restauradoras. Como a derivada $\left(\frac{dF}{dx} \right)_0$ é negativa, o valor de k será uma constante positiva (Marion, Thornton [2011](#)).

A expressão da energia potencial elástica armazenada na mola pode ser obtida a partir do conceito de trabalho realizado por uma força variável. Como a força restauradora da mola segue a Lei de Hooke, dada por $F(x) = -kx$, o trabalho realizado por essa força ao deslocar a partícula da posição de equilíbrio $x = 0$ até uma posição genérica x é:

$$W = - \int_0^x F(x') dx' = - \int_0^x (-kx') dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{kx^2}{2} \quad (2.7)$$

como esse trabalho está associado à variação da energia potencial armazenada no sistema, identificamos

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (2.8)$$

essa forma da energia potencial caracteriza o comportamento de forças conservativas, uma vez que o trabalho realizado depende apenas dos pontos inicial e final da trajetória. Além disso, reforça a simetria do sistema e a estabilidade do ponto de equilíbrio, onde $x = 0$ corresponde à energia mínima (Marion, Thornton, [2011](#)).

Assim, a função lagrangiana dada pela Eq. [\(2.2\)](#) fica escrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (2.9)$$

A Eq. [\(2.9\)](#) descreve as forças conservativas que atuam sobre o sistema. Esse é o ponto de partida para usar as equações de Euler-Lagrange. A equação que leva o nome de Leonhard Euler foi divulgada em 1744, por meio de seu trabalho intitulado *Métodos para achar curvas planas que mostram algumas propriedades de máximos e mínimos* (Cardoso; Junior; Trindade, [2020](#)). Anos depois o trabalho foi aprofundado por Joseph Louis Lagrange, se transformando num formalismo matemático para encontrar as equações de movimento de um sistema mecânico, da mesma forma que a segunda lei de Newton. Para uma leitura mais aprofundada do formalismo lagrangiano, deixamos como sugestão o livro dos professores Marion e Thornton (Marion; Thornton, [2011](#)). O formalismo tem como objetivo encontrar as equações de movimento que satisfaçam

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0. \quad (2.10)$$

Utilizando a Eq. (2.9), o primeiro termo da equação para o sistema massa-mola, terá como resultado

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}, \quad (2.11)$$

em que \ddot{x} é a aceleração da massa. O segundo termo é a derivada parcial da Lagrangiana em relação à posição x , de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx. \quad (2.12)$$

Desta forma, utilizando a Eq. (2.10) pode ser reescrita na forma

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.13)$$

Note que é a mesma equação de movimento se a mecânica newtoniana fosse utilizada.

Faremos agora a transição da equação de Lagrange para o formalismo hamiltoniano e será possível perceber a equivalência entre os formalismos, uma vez que chegaremos na mesma equação. Para o formalismo hamiltoniano os sistemas dinâmicos podem ser divididos em dois grandes grupos, sendo eles conservativos e dissipativos. Nos sistemas conservativos a energia se mantém constante a medida que o tempo evolui, sendo denominados como hamiltonianos. Já os sistemas dissipativos não conservam energia com o passar do tempo (Teles, 2012).

O sistema hamiltoniano pode ser descrito, em termos das coordenadas generalizadas de posição q e momentos p , por uma função escalar chamada de hamiltoniana que foi elaborada pelo matemático, físico e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton em 1833. A palavra hamiltoniana tem como significado geral “caminho de sistema” (Marion; Thornton, 2011). A função hamiltoniana, em termos das coordenadas generalizadas, é definida por (Goldstein; Poole; Safko 1950)

$$H(q, p, t) = \sum_{n=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad (2.14)$$

em que $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - V$ é a função lagrangiana e a soma é feita no número de coordenadas generalizadas N . O momento generalizado p_i corresponde ao momento conjugado à coordenada q_i . Dessa forma, esse momento pode se revelar como o momento linear ou angular da partícula, ou ainda, o momento angular acoplado entre uma partícula carregada e um campo elétrico (Taylor, 2013).

Se a hamiltoniana não depender explicitamente do tempo e o potencial for conservativo, a hamiltoniana será igual a energia total do sistema, isto é,

$$H = T + V = E. \quad (2.15)$$

O momento conjugado à coordenada x , no formalismo hamiltoniano, é obtido por

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad (2.16)$$

ou seja

$$p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \dot{x}. \quad (2.17)$$

Perceba que no caso do oscilador massa-mola as coordenadas generalizadas q e p correspondem, respectivamente, à posição x e ao momento linear $m\dot{x}$. A partir da relação acima torna-se possível perceber a proporcionalidade entre o momento conjugado p e à velocidade \dot{x} .

Podemos então construir a função hamiltoniana do sistema, dada pela Eq. (2.14),

$$H = p_x \dot{x} - \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right), \quad (2.18)$$

de forma que ao substituir a Eq. (2.17), chegamos a

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (2.19)$$

As equações de movimento no formalismo hamiltoniano são dadas pelas equações canônicas de Hamilton (Goldstein, 1950), sendo elas

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \quad (2.20)$$

e

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Aplicando as Eq. (2.20) e a Eq. (2.21) ao hamiltoniano do sistema massa-mola dado pela Eq. (2.19), obtemos

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (2.22)$$

e

$$\dot{p}_x = -kx. \quad (2.23)$$

Por fim, ao substituir a Eq. (2.23) na Eq. (2.22), obtemos a equação diferencial do sistema massa-mola, de modo que

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -kx \quad (2.24)$$

ou seja,

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} \right) x = 0. \quad (2.25)$$

Definindo $\frac{k}{m} = \omega^2$, chegamos a

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.26)$$

Assim, temos uma equação diferencial de segunda ordem, responsável por descrever o movimento de um oscilador harmônico.

Para resolver a Eq. (2.26) é necessário encontrar uma função $x(t)$, de forma que assumimos a solução sendo uma função exponencial como $x(t) = e^{\lambda t}$, assim, substituindo na Eq. (2.26), temos

$$\frac{d^2 e^{\lambda t}}{dt^2} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0. \quad (2.27)$$

Ao calcular a derivada,

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0, \quad (2.28)$$

e como $e^{\lambda t} \neq 0$, encontramos a equação característica geral

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \quad (2.29)$$

de forma que

$$\lambda^2 = -\omega^2, \quad (2.30)$$

ou seja,

$$\lambda = \pm i\omega. \quad (2.31)$$

A solução geral de uma equação diferencial linear homogênea pode ser escrita como uma combinação linear das soluções particulares de forma que a quantidade de constantes corresponde ao grau da equação diferencial. Portanto, como a Eq. (2.26) é uma equação de segunda ordem, podemos escrever a solução geral na forma

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}, \quad (2.32)$$

onde A e B são constantes que podem ser encontradas através das condições iniciais, e $i\omega$ e $-i\omega$ são as raízes da equação característica associada à equação diferencial. É possível reescrever a solução acima numa forma mais intuitiva. Para isso vamos explorar as identidades de Euler, dadas por

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (2.33)$$

e

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta. \quad (2.34)$$

Substituindo as identidades acima na Eq. (2.32), temos

$$x(t) = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t). \quad (2.35)$$

Organizando a equação acima de forma a separar a parte real e imaginária, chega-se a

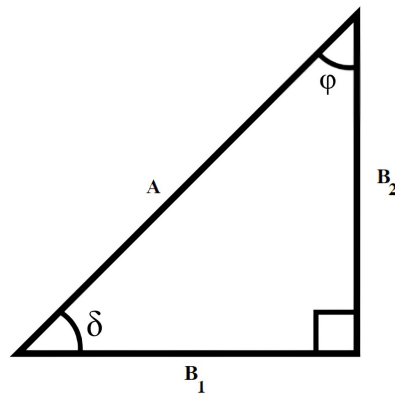
$$x(t) = (A + B)\cos\omega t + i(A - B)\sin\omega t, \quad (2.36)$$

em que $(A + B)$ ou $i(A - B)$ serão nomeadas como novas constantes, sendo elas B_1 e B_2 , respectivamente, isto é,

$$x(t) = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t. \quad (2.37)$$

A solução geral acima expressa a posição do oscilador harmônico em um dado instante de tempo. No entanto, a equação geral utiliza coeficientes como B_1 e B_2 que podem ser difíceis de interpretar visualmente. Desta forma vamos introduzir uma nova constante sendo essa, $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$. Esta nova constante corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo representado na Figura 2.2 e nos permite expressar a solução geral em função de uma fase inicial para o movimento oscilatório.

Figura 2.2 – Triângulo retângulo com as respectivas constantes.



Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, podemos definir as constantes B_1 e B_2 em função dos ângulos apresentados na Figura 2.2 Para φ ,

$$B_1 = A\cos\varphi \quad (2.38)$$

e

$$B_2 = A\sin\varphi. \quad (2.39)$$

Para δ ,

$$B_1 = A \sin \delta \quad (2.40)$$

e

$$B_2 = A \cos \delta. \quad (2.41)$$

Podemos então reescrever a Eq. (2.37) em termos da fase φ ou δ , o qual chamaremos de fase. Vamos adotar a fase φ de modo que

$$x(t) = A \cos \varphi \cos \omega t + A \sin \varphi \sin \omega t. \quad (2.42)$$

Portanto, podemos escrever a solução para a posição $x(t)$ do oscilador harmônico simples na forma como normalmente é encontrada na literatura, qual seja,

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.43)$$

onde A é a amplitude da oscilação (valor máximo de deslocamento), ω é a frequência angular e φ a fase inicial responsável por determinar a posição inicial da partícula. Alternativamente, a solução também pode ser escrita como

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta). \quad (2.44)$$

Cabe uma análise, neste momento, acerca do caráter determinístico da mecânica clássica, pois as equações obtidas nos permitem calcular, de forma precisa, a posição e a velocidade de um corpo em qualquer instante de tempo. Isso implica que, a partir das condições iniciais do sistema, como a posição e a velocidade no instante inicial, é possível prever seu comportamento futuro com exatidão. Tal previsibilidade está fundamentada no fato de que essas equações são funções do tempo, e suas derivadas em relação a esse parâmetro fornecem informações adicionais sobre o movimento. A primeira derivada da posição em relação ao tempo determina a velocidade, enquanto a segunda derivada fornece a aceleração. Assim, todas as grandezas dinâmicas do sistema podem ser conhecidas a partir das equações de movimento. Dessa forma, temos a impressão de que o sistema é completamente compreendido, mesmo sem observá-lo diretamente. Com a realização de medições físicas e com base nessas equações, é possível determinar a trajetória, a energia, a velocidade e outras propriedades do sistema a qualquer instante. Esse determinismo é uma das características fundamentais da mecânica clássica e constitui um contraste marcante em relação à abordagem probabilística da mecânica quântica.

O desenvolvimento teórico apresentado neste capítulo forneceu a base para a compreensão do oscilador harmônico clássico, tal como sua descrição por meio do formalismo hamiltoniano. Essa fundamentação é essencial para estabelecer paralelos entre os tratamentos clássico e quântico do sistema. No capítulo seguinte, será discutida a importância do oscilador harmônico quântico, juntamente com uma breve revisão dos

elementos fundamentais do formalismo necessário para seu estudo, como a notação de Dirac e o uso dos operadores. A partir desses conceitos, será realizada a descrição do oscilador harmônico no contexto quântico, utilizando também o formalismo hamiltoniano, para que possamos comparar os resultados obtidos para o mesmo sistema, porém em domínios diferentes.

3 Mecânica Quântica: uma breve revisão do formalismo

Dando continuidade ao estudo dos osciladores harmônicos, este capítulo tem como objetivo apresentar a discussão do oscilador harmônico quântico. Inicialmente, será feita uma breve revisão dos formalismos da mecânica quântica utilizados neste capítulo. Em seguida, construiremos uma função hamiltoniana para encontrar soluções do sistema.

O oscilador harmônico quântico é um dos sistemas mais fundamentais na física quântica, servindo como ponto de partida para a compreensão de uma ampla gama de fenômenos envolvendo quantização de energia, movimento periódico e estados estacionários. Diferentemente do oscilador harmônico clássico, descrito pela mecânica newtoniana ou hamiltoniana, onde as variáveis físicas do sistema são tratadas de maneira determinísticas, o oscilador quântico é regido pelos princípios da mecânica quântica, que introduz conceitos como superposição de estados, quantização de energia e operadores lineares hermitianos (Griffiths, 2018).

Essa abordagem permite uma descrição compatível com a observada em experimentos envolvendo sistemas em escalas atômicas e subatômicas, onde os efeitos quânticos se tornam predominantes. Além disso, o oscilador harmônico quântico fornece um dos exemplos mais ilustrativos de como o comportamento clássico emerge como um limite da mecânica quântica.

3.0.1 Notação de Dirac

Para resolvermos o problema do oscilador harmônico na mecânica quântica, utilizaremos a notação de Dirac, particularmente útil devido à sua conexão direta com o espaço de Hilbert, além do poder de compactar os cálculos que essa notação traz.

A palavra vetor vem do verbo latino *vehere* que têm como significado transportar e levar (Carvalho, 2009). No espaço euclidiano, um vetor é representado por \vec{A} . Já no espaço de Hilbert, iremos adotar a notação de Dirac, $|A\rangle$. Um vetor escrito desta maneira é denominado *ket*. Na mecânica quântica, um estado físico é representado por um vetor de estado em um espaço vetorial complexo (Griffiths, 2018). Tem-se como postulado que este *kets* de estado contenha informação completa do estado físico: tudo que podemos nos perguntar a respeito do estado está contido no *ket* (Dirac, 1948). Os *kets* podem ser adicionados, isto é

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle, \quad (3.1)$$

onde $|\gamma\rangle$ também é caracterizado com um *ket*. Se multiplicarmos esse mesmo *ket* por um número a , podendo ser escrito tanto à direita quanto à esquerda obtemos o mesmo resultado,

$$a|\gamma\rangle = |\gamma\rangle a, \quad (3.2)$$

ou seja, para $a \neq 0$ $a|\gamma\rangle$ e $|\gamma\rangle a$ representam o mesmo estado físico.

Introduziremos agora os *bras*, sendo tratado em um espaço vetorial "dual" ao espaço dos *kets*. Para cada *ket* existe um *bra*, neste espaço dual, isto é

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \xleftrightarrow{CD} \langle\alpha| + \langle\beta|, \quad (3.3)$$

onde *CD* significa correspondência dual, ou seja, há uma correspondência unívoca entre estes espaços. O produto interno entre dois vetores do espaço de Hilbert é denotado por $\langle\beta|\alpha\rangle$, e em geral, é um número complexo.

O *bra* dual de uma combinação linear é obtido aplicando-se a conjugação complexa aos coeficientes, isto é

$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \longrightarrow c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|.$$

O produto interno possui propriedades fundamentais, como a simetria complexa, isto é

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*.$$

Em particular, o produto interno de um vetor consigo mesmo satisfaz

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0,$$

sendo igual a zero apenas se $|\alpha\rangle = 0$. Este resultado é essencial para a interpretação probabilística da mecânica quântica. Dois *kets* $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são ditos ortogonais se

$$\langle\alpha|\beta\rangle = 0.$$

Dado um *ket* $|\alpha\rangle$ não nulo, podemos definir o *ket* normalizado $|\tilde{\alpha}\rangle$ como

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}} \right) |\alpha\rangle,$$

de modo que

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = 1.$$

Essa normalização é fundamental na mecânica quântica, pois assegura que o vetor de estado tenha norma unitária, o que é interpretado como a totalidade da probabilidade para o sistema estar naquele estado (Sakurai, 1989).

Representamos, por exemplo, um vetor $|A\rangle$, bidimensional, em uma determinada base, pelo *ket*

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

o vetor tem como *bra*

$$\langle A| = (a_1^* \ a_2^*), \quad (3.5)$$

onde a_1^* e a_2^* corresponde aos complexos conjugados dos elementos a_1 e a_2 .

Utilizando a mesma base do exemplo anterior, podemos escrever um *ket* $|B\rangle$ na forma

$$|B\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

de modo que, o produto interno entre os vetores $|A\rangle$ e $|B\rangle$ é definido por

$$\langle A|B\rangle = (a_1^* \ a_2^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 a_1^* + b_2 a_2^*. \quad (3.7)$$

Por outro lado, também é possível construir o produto externo entre dois vetores, o qual resulta em uma matriz, por exemplo, na representação de operadores de projeção. O produto externo entre os mesmos vetores fica na forma

$$|B\rangle\langle A| = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (a_1^* \ a_2^*) = \begin{pmatrix} b_1 a_1^* & b_1 a_2^* \\ b_2 a_1^* & b_2 a_2^* \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Além das operações de produto interno e externo, é importante destacar que os estados quânticos podem ser combinados linearmente.

3.0.2 Operadores lineares

Matematicamente, um operador pode ser descrito por uma matriz, servindo como uma instrução matemática que transforma um vetor em um novo vetor. Por exemplo, um operador \hat{T} pode atuar em um vetor $|u\rangle$ transformando-o em outro vetor, isto é (Boldrini et al., 1984). Na mecânica quântica, essa representação matricial dos operadores é especialmente poderosa, pois permite descrever o sistema físico por meio de sistemas de equações lineares, nos quais os operadores atuam como matrizes sobre vetores de estado. Isso torna possível resolver diversos problemas de forma algébrica, sem a necessidade de resolver diretamente a equação de Schrödinger, o que muitas vezes envolveria cálculos extensos e complexos, assim, a ação de um operador sobre um vetor pode ser representada da seguinte forma

$$\hat{T} |u\rangle = |v\rangle. \quad (3.9)$$

Os operadores presentes neste trabalho podem possuir espectro contínuo e discreto. Essa característica está relacionada ao tipo de base do espaço vetorial em que esses operadores atuam. Por outro lado, uma base contínua é rotulada por parâmetros contínuos,

como a posição x ou o momento p , sendo usada para representar sistemas com espectro contínuo. Nesses casos, as somas usuais são substituídas por integrais, refletindo a natureza contínua do sistema descrito.

Na notação de Dirac a identidade é escrita, no espaço da posição, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x| dx = \mathbb{I},$$

com a condição de ortonormalidade generalizada

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'),$$

em que $\delta(x - x')$ é a função delta de Dirac.

Os operadores lineares tem as seguintes propriedades

- Soma de operadores:

Os operadores lineares seguem a propriedade distributiva, isto é

$$(\hat{T} + \hat{S})|u\rangle = \hat{T}|u\rangle + \hat{S}|u\rangle. \quad (3.10)$$

- Produto de dois operadores:

Seguem também a propriedade associativa, de modo que

$$(\hat{T}\hat{S})|u\rangle = \hat{T}(\hat{S}|u\rangle). \quad (3.11)$$

Um conceito essencial no formalismo da mecânica quântica é o de comutador, que permite compreender como diferentes operadores se relacionam entre si. Em geral, os operadores utilizados na descrição de sistemas quânticos não satisfazem as mesmas regras de comutação válidas para números reais ou complexos. Isso significa que, ao aplicarmos dois operadores sucessivamente, a ordem em que eles atuam pode alterar o resultado da operação. Para avaliar essa diferença, define-se o comutador entre dois operadores \hat{A} e \hat{B} como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (3.12)$$

Se o resultado do comutador for nulo, ou seja, se $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, os operadores são ditos comutativos, e a ordem de aplicação não interfere no resultado final. Por outro lado, se o comutador não for nulo, os operadores não comutam entre si, e sua ordem de atuação é relevante.

3.0.3 Autovalor e autovetor

As palavras autovalor e autovetor têm origem alemã, sendo comumente chamadas na literatura de valores próprios ou valores característicos e vetores próprios ou vetores característicos (Colares, 2014). Um vetor $|v\rangle$ é denominado autovetor de um operador \hat{T} se

$$\hat{T}|v\rangle = \lambda|v\rangle, \quad (3.13)$$

isto é, \hat{T} age sobre o vetor $|v\rangle$ preservando sua “direção” e “módulo”. Note que o vetor nulo $|v\rangle = 0$ também satisfaz a equação para qualquer λ , porém não é considerado um autovetor válido, pois não carrega informação física ou geométrica relevante. Por essa razão, interessa-nos apenas encontrar autovetores não nulos, $|v\rangle \neq 0$, que satisfaçam a Eq. (3.13). O escalar λ é denominado autovalor ou valor característico de \hat{T} , associado ao autovetor $|v\rangle$.

Ao examinarmos a ação de um operador em sua representação matricial, a busca por autovalores e autovetores se reduz a um problema algébrico clássico. Para uma matriz T associada ao operador \hat{T} , os autovalores são determinados resolvendo a equação característica

$$\det(T - \lambda I) = 0, \quad (3.14)$$

onde I é a matriz identidade de mesma dimensão que T . A condição de determinante nulo garante que o operador $(T - \lambda I)$ não seja invertível, possibilitando a existência de soluções não triviais para o sistema

$$(T - \lambda I)|v\rangle = 0. \quad (3.15)$$

Essa equação define um sistema linear homogêneo, cujas soluções correspondem aos autovetores associados ao autovalor λ . O conjunto de todos os autovetores (combinados linearmente) associados a um mesmo autovalor forma o autoespaço correspondente. Em muitos casos — especialmente quando o operador \hat{T} é hermitiano — os autovalores são reais, e os autovetores podem ser escolhidos de forma ortonormal, o que é fundamental em aplicações como a mecânica quântica e o processamento de sinais (Boldrini, 1984).

3.0.4 Equação de Schrödinger

(3.16)

No capítulo anterior nos deparamos com o fator determinístico da mecânica hamiltoniana, que tem como um de seus objetivos determinar a posição da partícula para qualquer instante de tempo, isto é, encontrar, em uma dimensão, $x(t)$. A mecânica quântica aborda esse mesmo problema de modo distinto. O estado físico de uma partícula é descrito por um vetor de estado $|\Psi\rangle$, pertencente a um espaço vetorial abstrato denominado espaço de Hilbert. Esse vetor contém toda a informação física acessível sobre o sistema.

Para acessar essa informação de forma operacional, é comum projetar o vetor de estado $|\Psi\rangle$ em uma base específica. No caso da base dos autovalores do operador posição \hat{x} , representada por $\{|x\rangle\}$, obtemos a função de onda no espaço da posição, isto é

$$\Psi(x,t) = \langle x | \Psi(t) \rangle. \quad (3.17)$$

A função $\Psi(x,t)$ é chamada de função de onda e contém todas as informações físicas do sistema na base da posição. Sua interpretação probabilística é uma das características centrais da mecânica quântica, de modo que, o módulo ao quadrado da função de onda, $|\Psi(x,t)|^2 dx$, representa a densidade de probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre x e $x + dx$, no instante de tempo t . Desta forma, a probabilidade de encontrar a partícula em um intervalo $[a,b]$ é

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx. \quad (3.18)$$

Além disso, é possível calcular o valor esperado de qualquer observável \hat{A} , por meio de

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \hat{A} \Psi(x,t) dx. \quad (3.19)$$

Este valor representa a média dos resultados que seriam obtidos em várias medições do observável \hat{A} em um sistema preparado repetidamente no mesmo estado $|\Psi\rangle$. Por exemplo, o valor esperado da posição $\langle x \rangle$ nos informa onde, em média, a partícula é encontrada.

Os observáveis físicos são representados por operadores hermitianos. O operador posição \hat{x} e o operador momento \hat{p} são definidos por meio do princípio da correspondência, quando atuam no espaço da posição, por (Sakurai, 1989)

$$\hat{x} \rightarrow x \quad (3.20)$$

e

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (3.21)$$

Tais definições garantem que o operador momento seja o gerador das transformações de translação no espaço (Tipler, 2000). A relação de comutação entre esses operadores é expressa por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (3.22)$$

A Eq. (3.22) estabelece uma limitação intrínseca ao conhecimento simultâneo das grandezas posição e momento, conforme formalizado no princípio da incerteza de Heisenberg, que será abordado no próximo tópico.

A evolução temporal do estado quântico é regida pela equação de Schrödinger, formulada por Erwin Schrödinger em 1925 (Tipler, 2000). Essa equação desempenha um papel análogo à segunda lei de Newton na mecânica clássica, pois determina como o estado de um sistema evolui com o tempo, dadas suas condições iniciais (Einsberg, 1979). Sua forma geral na mecânica quântica é regida pela equação de autovalores,

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (3.23)$$

$$K + U|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (3.24)$$

Onde, \hat{H} é o operador hamiltoniano do sistema, que representa a energia total. Ao projetar a Eq.(3.24) na base da posição, obtemos a forma diferencial da equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (3.25)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (3.26)$$

em que $V(x)$ é o potencial que atua sobre a partícula, E são os autovalores associados, e $\Psi(x)$ são os autovetores ou estados estacionários, que carregam informações do sistema.

No contexto do oscilador harmônico quântico, a equação de Schrödinger assume uma forma específica, cuja solução fornece as funções de onda associadas a esse sistema físico. Tais funções revelam como a partícula se distribui espacialmente dentro do potencial, sendo possível, a partir de $|\Psi(x)|^2$, interpretar regiões onde a partícula tem maior ou menor probabilidade de ser encontrada. A análise desses estados será explorada nos capítulos seguintes.

3.0.5 Princípio da incerteza

Na mecânica quântica, a descrição dos sistemas físicos é intrinsecamente probabilística. Ao contrário da mecânica clássica, onde é possível conhecer exatamente a posição e o momento de uma partícula em qualquer instante, no formalismo quântico, essas grandezas são associadas a operadores e seus valores medidos apresentam dispersões (Griffiths, 2018). Sua demonstração rigorosa parte do formalismo de operadores hermitianos e da definição estatística de desvio padrão associada a um observável.

Dado um operador \hat{A} , o desvio padrão σ_A é definido por

$$\sigma_A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}. \quad (3.27)$$

A Eq.(3.27) quantifica a dispersão dos resultados possíveis em medidas da grandeza física A , realizadas em um grande número de sistemas idênticos preparados no mesmo estado $|\psi\rangle$.

A dedução do princípio da incerteza generalizado faz uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, um teorema fundamental da álgebra linear (Boldrini, 1984). Esse teorema afirma que, para quaisquer dois vetores normalizáveis $|f\rangle$ e $|g\rangle$ em um espaço de Hilbert, equivale a desigualdade

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle, \quad (3.28)$$

garantindo que o módulo do produto interno entre dois vetores é sempre menor ou igual ao produto de suas normas (Griffiths, 2018).

Aplicando tal desigualdade ao contexto quântico, obtemos

$$\sigma_A\sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|, \quad (3.29)$$

que representa o princípio da incerteza generalizado e evidencia a impossibilidade de determinar com precisão simultânea as grandezas A e B , este fato está relacionado à não comutatividade entre seus operadores. Para a posição \hat{x} e momento \hat{p} , os quais o comutador é $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, de modo que ao substituir esse resultado na Eq. (3.29), obtém-se a forma canônica do princípio da incerteza,

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.30)$$

No caso específico do oscilador harmônico, esse limite inferior do produto $\sigma_x\sigma_p$ reflete a presença de flutuações quânticas mesmo na ausência de excitação externa.

No próximo capítulo, aplicaremos o formalismo da mecânica quântica previamente revisado para resolver o oscilador harmônico. Utilizando operadores, funções de onda e a equação de Schrödinger, construiremos uma descrição do sistema no contexto quântico.

4 Oscilador Quântico

Neste capítulo, abordaremos a formulação quântica do oscilador harmônico. Para isso, partiremos do hamiltoniano do oscilador harmônico clássico, previamente discutido na Eq. (2.19), e procederemos à sua quantização, promovendo as variáveis clássicas x e p à categoria de operadores, isto é, $x \rightarrow \hat{x}$ e $p_x \rightarrow \hat{p}_x$. Com isso, reescreveremos o Hamiltoniano na linguagem da mecânica quântica, isto é

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (4.1)$$

Por fim, adotaremos o hamiltoniano em termos de outros operadores, sendo eles \hat{a}^\dagger , o operador criação e \hat{a} , o operador destruição.

O aspecto central está na forma como certos operadores são combinados de maneira sutil, revelando propriedades úteis para a resolução do problema. Para tornar isso mais evidente, podemos considerar um par de operadores que facilite os cálculos. Caso comutassem entre si, por exemplo, seria possível reescrever a expressão $(\hat{p}^2 + \hat{x}^2)$ como o produto $(\hat{x} - i\hat{p})(\hat{x} + i\hat{p})$, o que simplificaria significativamente o tratamento matemático, mas não é possível tratá-lo dessa forma.

Para contornar essa limitação, introduzem-se operadores que, embora não resultem exatamente na expressão $(\hat{p}^2 + \hat{x}^2)$, possibilitam uma reformulação mais conveniente dessa combinação de operadores, definidos como

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (4.2)$$

e

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right). \quad (4.3)$$

A partir dessas expressões, é possível reescrever os operadores \hat{x} e \hat{p} como

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (4.4)$$

e

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (4.5)$$

Substituindo a Eq. (4.4) e a Eq. (4.5) na Eq. (4.1), temos

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right)^2, \quad (4.6)$$

que nos leva a

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 + \frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2. \quad (4.7)$$

Note que os quadrados podem ser expandidos na forma

$$(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 = \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^2 \quad (4.8)$$

e

$$(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 = \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}. \quad (4.9)$$

Ao substituir essas expansões na Eq. (4.7), temos

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^2) + \frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}), \quad (4.10)$$

e, ao agrupar os termos semelhantes, ficamos com

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{4}(-\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger) + \frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger). \quad (4.11)$$

Assim, o hamiltoniano se reduz a

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger). \quad (4.12)$$

Utilizando a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, a Eq. (4.12) pode ser escrita na forma

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.13)$$

Essa forma é especialmente útil porque o operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, possui autovalores inteiros que caracterizam os estados de energia do sistema, isto é

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.14)$$

de forma que

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (4.15)$$

onde \hat{N} será chamado de operador número.

As relações de comutação entre os operadores \hat{N} , \hat{a} e \hat{a}^\dagger são tais que

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] \quad (4.16)$$

e

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a}^\dagger. \quad (4.17)$$

Como todo operador comuta com ele mesmo, chegamos a

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}. \quad (4.18)$$

Prosseguimos de forma análoga para o operador \hat{a}^\dagger ,

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] \quad (4.19)$$

e

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \quad (4.20)$$

por fim,

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (4.21)$$

Como \hat{H} é função linear de \hat{N} , ambos compartilham o mesmo autoestado. Assim, podemos definir

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (4.22)$$

de maneira que,

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle, \quad (4.23)$$

o que nos leva ao espectro discreto da energia, dado por

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.24)$$

A partir dessa relação, iremos abordar determinadas propriedades para o hamiltoniano dado pela Eq. (4.23).

i) $n \geq 0$. Consideramos a norma do estado obtido pela aplicação do operador \hat{a} sobre $|n\rangle$,

$$\|\hat{a} |n\rangle\|^2 \geq 0 \quad (4.25)$$

ao aplicar \hat{a} a $|n\rangle$, obtemos um novo estado cuja norma ao quadrado deve ser não negativa, conforme estabelecido na Eq. (4.25). Isso implica que o valor esperado do operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ deve ser nulo ou positivo, isto é

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \geq 0, \quad (4.26)$$

ou seja,

$$\langle n | \hat{N} | n \rangle \geq 0. \quad (4.27)$$

Utilizando a Eq. (4.22) encontramos

$$\langle n|n\rangle \geq 0 \quad (4.28)$$

ou ainda,

$$n\langle n|n\rangle \geq 0. \quad (4.29)$$

A expressão $\langle n|n\rangle$ é positiva por tratar-se do produto interno do estado $|n\rangle$ com ele próprio, que resulta na sua norma ao quadrado, que é sempre um número real positivo. Considerando que temos um estado com bases ortonormais, de forma que $\langle n|n\rangle = 1$, concluímos que

$$n \geq 0. \quad (4.30)$$

Independente das soluções, podemos então observar que os autoestados do hamiltoniano são todos compostos por um $n \geq 0$. Conseqüentemente, as energias dos estados são sempre positivas.

ii) Para o operador \hat{a}^\dagger , podemos escrever

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger |n\rangle = ([\hat{N}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger \hat{N}) |n\rangle. \quad (4.31)$$

Utilizando a relação dada pela Eq. (4.21), chegamos a

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger |n\rangle = (\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{N}) |n\rangle, \quad (4.32)$$

e, por fim,

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger |n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger |n\rangle. \quad (4.33)$$

A Eq. (4.33) confirma que $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ é um autovetor de \hat{N} , mas com autovalor $n+1$. Ou seja, ao aplicar \hat{a}^\dagger em um estado $|n\rangle$, o número quântico n aumenta uma unidade, daí o termo operador criação.

iii) Para o operador \hat{a} utilizamos a identidade algébrica baseada na propriedade comutadora, isto é

$$\hat{N}\hat{a} |n\rangle = ([\hat{N}, \hat{a}] + \hat{a}\hat{N}) |n\rangle, \quad (4.34)$$

partindo do resultado anterior aplicamos a Eq. (4.18) ao estado $|n\rangle$

$$\hat{N}\hat{a} |n\rangle = (-\hat{a} + \hat{a}\hat{N}) |n\rangle. \quad (4.35)$$

Como o estado $|n\rangle$ é autovetor de \hat{N} , com autovalor n , conforme a Eq. (4.22), podemos escrever

$$\hat{N}\hat{a} | n \rangle = (n - 1)\hat{a} | n \rangle. \quad (4.36)$$

Conclui-se que $\hat{a}^\dagger | n \rangle$ e $\hat{a} | n \rangle$ são autovetores de \hat{N} , com autovalores $(n + 1)$ e $(n - 1)$, respectivamente. Desta forma, podemos escrever

$$\hat{a}^\dagger | n \rangle = c | n + 1 \rangle \quad (4.37)$$

onde c é uma constante a ser determinada, chamada constante de normalização. Como os estados $|n\rangle$ são normalizados, podemos multiplicar a Eq. (4.37) por $\langle n|\hat{a}$, à esquerda, de modo que

$$\langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger | n \rangle = \langle n + 1 | c^* c | n + 1 \rangle = |c|^2 \langle n + 1 | n + 1 \rangle = |c|^2. \quad (4.38)$$

Além disto, sabemos que $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{N} + 1$, o que nos leva a

$$\langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger + 1 | n \rangle = |c|^2, \quad (4.39)$$

ou seja, utilizando a Eq. (4.15), encontramos

$$\langle n | \hat{N} + 1 | n \rangle = |c|^2. \quad (4.40)$$

Ao aplicar a Eq. (4.22), chegamos a

$$(n + 1)\langle n | n \rangle = |c|^2, \quad (4.41)$$

que, utilizando a condição de normalização, concluímos que

$$c = \sqrt{n + 1}. \quad (4.42)$$

Finalmente,

$$\hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n + 1} | n + 1 \rangle. \quad (4.43)$$

Procedendo de maneira análoga, chegamos a

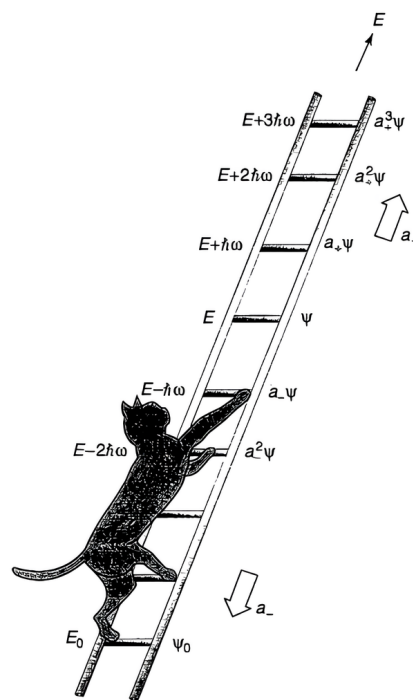
$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n - 1 \rangle. \quad (4.44)$$

Esse cálculo demonstra a forma como os operadores criação e destruição afetam os estados do oscilador harmônico quântico, mostrando que o operador \hat{a} reduz o número quântico n em 1 unidade e \hat{a}^\dagger aumenta em 1 unidade.

O objetivo é criar novas soluções com energias maiores e menores. Para isso, utilizaremos o operador \hat{a} , permitindo a redução de um quantum de energia ao sistema, e \hat{a}^\dagger , permitindo a adição de um quantum de energia. A partir do uso desses operadores temos uma prescrição para gerar todas as funções de onda que descrevem o oscilador

harmônico. Desta maneira, para gerar o autoestado $|n\rangle$ devemos simplesmente aplicar o operador criação n vezes no estado fundamental (Eisberg, Resnick [1979]). A Figura 4.1 ilustra esse processo por meio da chamada “escada de energia”, em que cada degrau representa um estado quântico com energia bem definida. O operador de criação \hat{a}^\dagger atua como se elevasse o sistema para um degrau superior, acrescentando um quantum de energia $\hbar\omega$, enquanto o operador de destruição \hat{a} atua no sentido oposto, reduzindo a energia em um quantum. Assim, o movimento do “gato” na figura simboliza o papel desses operadores na transição entre estados energéticos discretos do oscilador harmônico quântico, tornando visual a ideia abstrata da quantização

Figura 4.1 – Escada de energia (operadores).



Fonte: Griffiths, [2018].

Isso não significa que, ao aplicarmos consecutivamente o operador de destruição \hat{a} sobre os estados $|n\rangle$, poderemos alcançar energias menores que $\frac{1}{2}\hbar\omega$. De forma que podemos chamar o degrau mais baixo de energia como ψ_0 , sendo essa uma espécie de “condição de contorno”. Esse nível fundamental de energia é caracterizado por

$$\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0. \quad (4.45)$$

A equação acima expressa a condição de autovalor para o estado fundamental, em que o operador \hat{H} atua sobre ψ_0 , retornando como resultado o produto da energia E_0 e a própria função de onda.

Por último, vamos encontrar a função de onda para o oscilador quântico. Para isso, partimos do estado fundamental. O estado fundamental do oscilador harmônico quântico é aquele que é aniquilado pelo operador destruição \hat{a} , ou seja, é o estado que satisfaz a

condição $\hat{a}\psi = 0$, onde ψ representa a função de onda associada ao menor nível de energia do sistema, sendo

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (4.46)$$

Utilizando a forma explícita da Eq. (4.2) e aplicando-a ao estado fundamental, obtemos

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) |0\rangle = 0, \quad (4.47)$$

e, dividindo ambos lados por $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$, temos

$$\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) |0\rangle = 0. \quad (4.48)$$

Ao fazermos a projeção do vetor de estado $|0\rangle$ no espaço da posição, e utilizando as Eqs. (3.20) e (3.21), onde $\langle x|0\rangle$ é interpretado como a função de onda $\psi_0(x)$, e o operador \hat{p} é substituído pela Eq. (4.5), de forma que

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) = 0. \quad (4.49)$$

Temos então uma equação diferencial de primeira ordem. Para resolvê-la, começamos organizando os termos, separando as variáveis, de modo que

$$\frac{1}{\psi_0(x)} \frac{d\psi_0(x)}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x. \quad (4.50)$$

Ao integrar ambos lados, podemos escrever

$$\int \frac{1}{\psi_0(x)} \frac{d\psi_0(x)}{dx} dx = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx, \quad (4.51)$$

que tem como resultado

$$\ln[\psi_0(x)] = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + c. \quad (4.52)$$

Finalmente, utilizando a definição da função exponencial, encontramos a função de onda do estado fundamental dada por

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad (4.53)$$

onde A é uma constante que pode ser determinada utilizando a condição de normalização. Assim, a função de onda do estado fundamental é caracterizada por uma distribuição gaussiana.

O próximo passo é obter a constante de normalização A . Para isso a função de onda precisa ser normalizada, ou seja, a probabilidade de encontrar a partícula sobre todas as posições possíveis deve ser igual a 1, isto é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1. \quad (4.54)$$

Como ψ_0 é uma função real, seu complexo conjugado ψ_0^* é igual a ela mesma, tornando a expressão do módulo ao quadrado equivalente à expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2(x)dx = 1. \quad (4.55)$$

A função de onda ψ_0 tem a forma $Ae^{-\alpha x^2}$, onde α é uma constante. Assim,

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = 1, \quad (4.56)$$

Comparando com o resultado da integração gaussiana (Eisberg, 1979), dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}. \quad (4.57)$$

concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} dx = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}, \quad (4.58)$$

ou seja, a constante que normaliza o estado fundamental do oscilador harmônico é dada por

$$A = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.59)$$

Por fim, podemos escrever a função de onda para o oscilador harmônico quântico, no estado de mais baixa energia, isto é

$$\psi_0(x) = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (4.60)$$

Dada a forma como os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger atuam nos autovetores do operador \hat{N} , é possível construir todos os estados excitados do oscilador harmônico quântico a partir do estado fundamental $|0\rangle$. A equação que expressa essa construção é dada por

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (4.61)$$

onde n é um número inteiro não negativo que representa o nível de excitação do sistema. Essa relação mostra que os estados $|n\rangle$, chamados de estados excitados, são obtidos por sucessivas aplicações do operador \hat{a}^\dagger sobre o estado fundamental, devidamente normalizados pelo fator $A_n = 1/\sqrt{n!}$, que garante a ortonormalidade da base de autovetores (Griffiths, 2018).

Neste capítulo, foram apresentados alguns conceitos da Mecânica Quântica, utilizando a notação de Dirac e os operadores essenciais para a formulação do problema do

oscilador harmônico no contexto quântico. A resolução foi obtida redefinindo a função hamiltoniana em termos de novos operadores, permitindo a obtenção dos estados de energia do sistema.

Com essa base estabelecida, no próximo capítulo será realizada uma análise comparativa entre os osciladores harmônico clássico e quântico, com foco nas diferenças e semelhanças nos aspectos da posição e da energia.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O oscilador harmônico é um modelo crucial para física, tendo aplicações em diversas áreas. Sua descrição matemática a partir do formalismo Hamiltoniano destaca as diferenças fundamentais entre os modelos clássico e quântico. Essas diferenças refletem o contraste entre os princípios determinísticos da mecânica clássica e a estrutura probabilística da mecânica quântica.

5.1 Análise da posição entre os osciladores

Para o formalismo clássico, o hamiltoniano H de um oscilador harmônico representa a energia total do sistema, sendo a soma da energia cinética e potencial conforme mostrado na Eq. (2.15) e a evolução temporal desse sistema é regido pelas equações de Hamilton, conforme a Eq. (2.20) e Eq. (2.21). Estas equações levam a soluções harmônicas, tendo como resultado trajetórias contínuas e bem definidas no espaço de fase, além de serem funções escalares (Taylor, 2013). É importante salientar que o sistema clássico é determinístico, palavra presente em certos textos de filósofos alemães do século XIX, para expressar uma ideia de algo que já está presente, predeterminado (Lalande, 1972). Amorin (2002) define que

Se pudéssemos conhecer exatamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, seríamos capazes de prever exatamente a situação deste mesmo universo no instante subsequente. Mas mesmo quando as leis naturais já não tivessem, mais segredo para nós, só poderíamos conhecer a situação inicial aproximadamente. Se isto nos permite antecipar a situação subsequente com o mesmo grau de aproximação, ficamos satisfeitos, dizemos que o fenômeno foi previsto, que é governado por leis.

Já na mecânica quântica, o hamiltoniano H é promovido ao operador hermitiano \hat{H} que atua no espaço de Hilbert. O hamiltoniano para o sistema massa-mola é dado pela Eq. (4.1), onde \hat{x} e \hat{p} são os operadores de posição e momento, respectivamente. A hermiticidade do operador \hat{H} garante que seus autovalores que correspondem aos valores observáveis de energia sejam reais.

A evolução de um estado para a mecânica quântica é regida pela equação de Schrödinger dependente do tempo, dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \hat{H} \Psi(x,t) \quad (5.1)$$

onde $\Psi(x,t)$ representa a função de onda do sistema e \hat{H} é o operador hamiltoniano. Essa equação determina como o estado do sistema evolui no tempo, de forma análoga à segunda lei de Newton na mecânica clássica. Ao contrário do regime clássico, no qual a

posição e o momento são variáveis bem definidas, no regime quântico ela são descritas probabilisticamente pela distribuição $|\Psi(x,t)|^2$ e sem trajetórias bem definidas para o sistema.

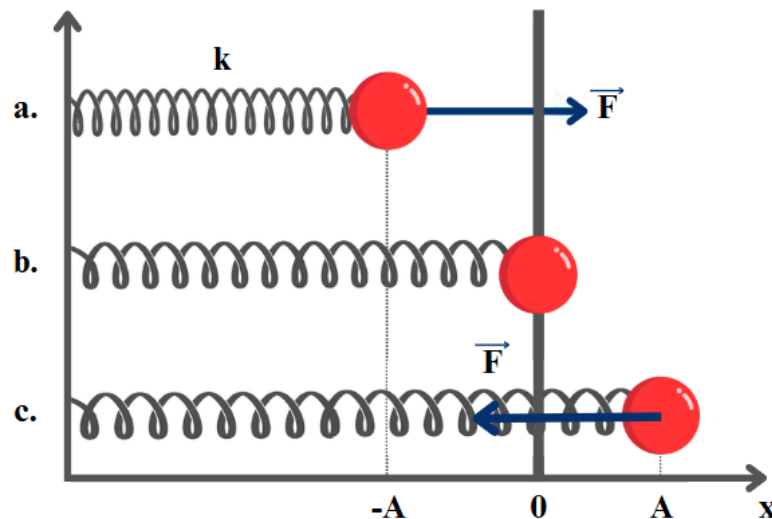
5.2 Análise energética entre os osciladores

Nessa seção será feito uma análise comparativa entre as posições e os níveis de energia do oscilador no âmbito clássico e quântico.

5.2.1 Oscilador clássico

No oscilador harmônico clássico, a descrição matemática da energia total é baseada nas energias cinética e potencial, somadas em cada instante do movimento periódico da partícula. A energia cinética é responsável por determinar o movimento relacionado a um determinado referencial, já sua energia potencial elástica surge em função da interação com a mola. Vamos definir a origem do sistema de coordenadas como um ponto de equilíbrio estável. Se a partícula sofre algum deslocamento a partir desse ponto de equilíbrio, sendo ele em qualquer sentido, temos o surgimento de uma força de caráter restaurativo, a mesma surge visando restaurar o deslocamento da partícula para sua posição inicial. Podemos analisar esse comportamento a partir da Figura 5.1,

Figura 5.1 – Análise do sistema massa-mola.



Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme a Figura 5.1 a. e a Figura 5.1 c., podemos analisar os pontos de amplitude máxima no sistema massa-mola. Perceba que nos pontos A e $-A$ a velocidade será nula e, conseqüentemente, a energia cinética, também.

Por sua vez, a deformação em ambos os casos será máxima, onde a amplitude é dada por $x = \pm A$, o que nos permite determinar a energia potencial nestes pontos, isto é,

$$U = \frac{K(\pm A)^2}{2}. \quad (5.2)$$

Por fim, podemos escrever a energia mecânica do sistema na forma

$$E_m = 0 + \frac{KA^2}{2} = \frac{KA^2}{2}. \quad (5.3)$$

Na Figura 5.1 b. o sistema possui velocidade máxima, onde toda energia potencial antes acumulada foi transformada em energia cinética, de forma que

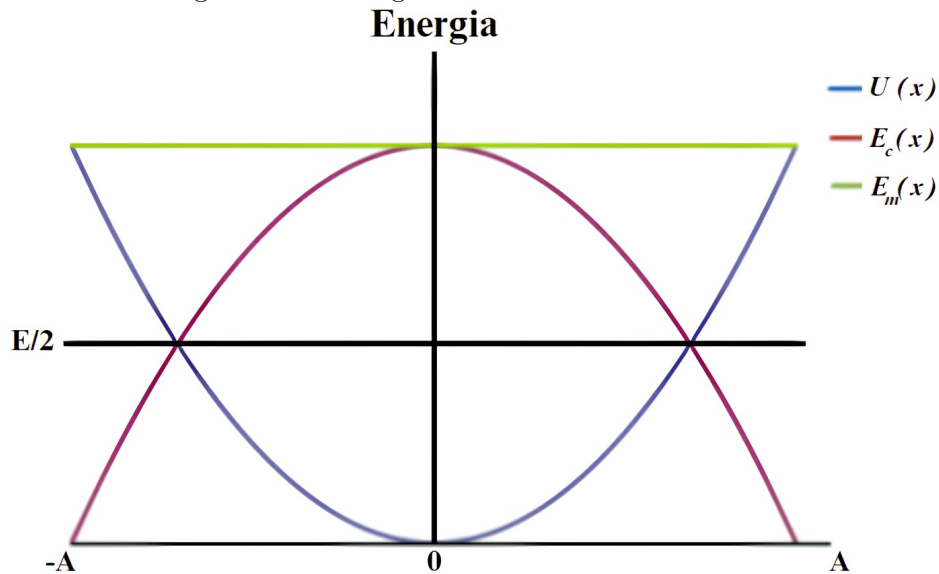
$$E_c = \frac{mv_{mx}^2}{2}. \quad (5.4)$$

Assim, a energia mecânica será dada por

$$E_m = \frac{mv_{mx}^2}{2} + 0 = \frac{mv_{mx}^2}{2}. \quad (5.5)$$

A Figura 5.2 ilustra os comportamentos das energias do oscilador em cada posição, ao longo de sua trajetória.

Figura 5.2 – Energia do sistema massa-mola.



Fonte: elaborado pelo autor.

Ao analisarmos a Figura 5.2 percebemos que apesar de possuir um valor constante, não existem restrições para os valores da energia total do oscilador, possuindo um espectro contínuo. Isso é resultado da natureza determinística do sistema, uma vez que qualquer configuração inicial de posição e velocidade resulta em qualquer valor de energia no limite de elasticidade do sistema.

Podemos analisar em específico o gráfico da energia potencial do sistema, dessa forma podemos ver como a partícula se comporta qualitativamente. Nos pontos $-A$, 0 e A temos a localização dos mínimos e máximos, no entanto, a força somente será zero na origem. Esta condição é caracterizada por

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (5.6)$$

Se a partícula analisada estiver se movendo, a mesma terá energia cinética positiva e sua energia total será necessariamente maior que a potencial. Considere que a partícula está se movendo na vizinhança do ponto de equilíbrio $x = 0$. Se acaso a partícula mover-se à direita no ponto de equilíbrio, em direção ao ponto, A , sua energia potencial irá aumentar e sua energia cinética deve, portanto, diminuir até que a partícula alcance o ponto de retorno. O mesmo ocorrerá ao considerar que a partícula esteja movendo-se para o lado esquerdo, em direção ao ponto $-A$. Os pontos de retorno são cruciais para compreender os limites do movimento oscilatório, eles delimitam o intervalo de deslocamento da partícula (Taylor, 2013).

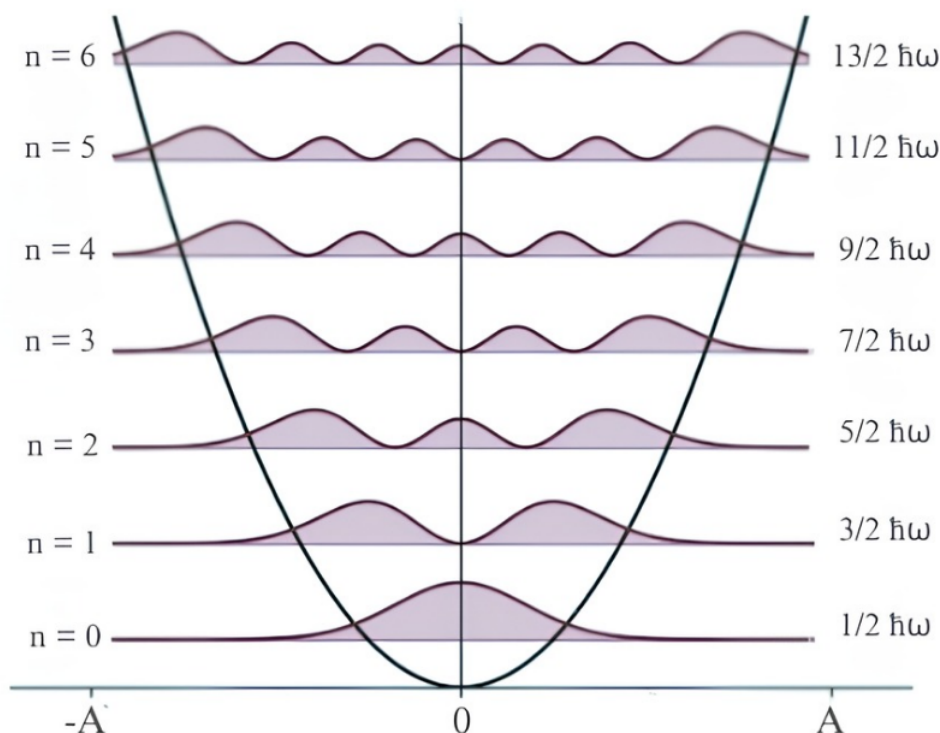
5.2.2 Oscilador quântico

No oscilador harmônico quântico, a descrição matemática da energia total também envolve contribuições da energia cinética e potencial, porém, reformulada por meio da quantização dos estados de energia e pela natureza probabilística inerente à mecânica quântica. A energia total é expressa em valores discretos, definidos por níveis energéticos específicos, conforme representado na Eq. (4.24), onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Nesse contexto, a energia cinética e a energia potencial estão associadas à dinâmica probabilística da partícula, sendo a energia potencial referente à interação elástica que delimita o confinamento oscilatório. Diferentemente do caso clássico, onde a posição da partícula é conhecida em qualquer instante, no oscilador quântico a partícula é descrita por uma função de onda, cuja densidade de probabilidade fornece informações sobre a posição e o momento.

A Eq. (4.24) reflete a natureza discreta da energia do sistema, com valores discretos e semi inteiros de $\hbar\omega$, enquanto o acréscimo de energia será feito por meio de números inteiros de $\hbar\omega$ (Morais, 2005). Cada valor de n define um estado energético específico, sendo esse estado separado do próximo por uma constante dada por $\Delta E = \hbar\omega$. Uma característica relevante na análise energética do oscilador harmônico quântico é o fato de o seu mínimo de energia ser dado por $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, como mostra a Figura 5.3.

O mínimo energético é conhecido como energia do ponto zero, ou movimento do ponto zero, tomado isoladamente esse fenômeno, no mundo clássico a energia cinética cai para zero à medida que a temperatura se aproxima do zero absoluto. Isso, por outro lado, sugere que o zero absoluto é um estado no qual não há movimento atômico ou molecular. No entanto, tal conclusão não é válida para o mundo quântico. A energia cinética não cai para zero à medida que a temperatura se aproxima do zero absoluto porque há outra contribuição para a energia cinética dos átomos e moléculas além da energia cinética térmica (George B. Arfken et. al, 1984). Isso implica que os átomos de uma molécula continuam em movimento mesmo no estado vibracional de energia mais baixo (De la Penã, 2008). Além disto, o princípio da incerteza não permite que a posição de uma

Figura 5.3 – Níveis energéticos para o oscilador quântico



Fonte: elaborado pelo autor.

partícula seja conhecida de maneira precisa. Portanto, o movimento dela não pode ser completamente anulado. Este princípio não é uma suposição extra na teoria quântica, mas sim, um resultado da interpretação estatística (Griffiths, 2018).

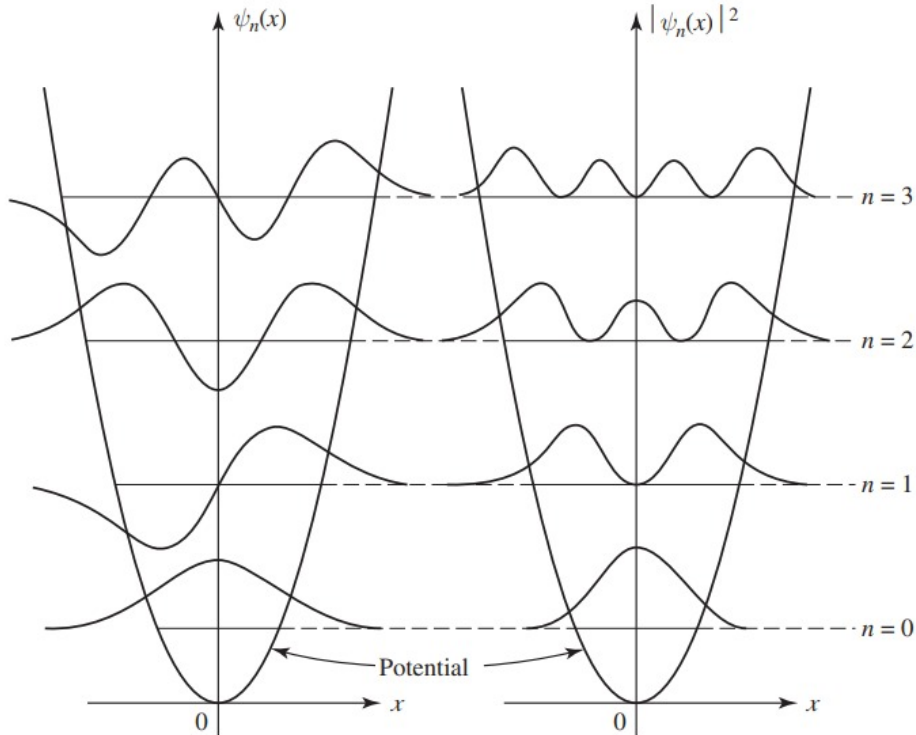
Certamente será possível avaliar a posição da partícula, no entanto, a precisão não será maior que a permitida pelo princípio. O ato de medir colapsa a função de onda em um determinado ponto, o que resultaria em um amplo intervalo de comprimentos de onda, ou seja a determinação da posição da partícula implicaria na perda de informação do momento. É importante ressaltar que esse princípio não diz respeito a qualidade dos instrumentos de medição, na verdade, mesmo que tenhamos instrumentos ideais, nunca poderíamos obter resultados com precisão maior que a relação expressa pela Eq. (3.30), de forma que, quanto mais modificarmos o sistema para haver uma melhoria na medida relacionada ao momento, mais renunciaríamos a determinação da posição (Einsberg, Resnick 1979).

No estudo do oscilador harmônico quântico, o comportamento em altos números quânticos ($n \gg 1$) evidencia o princípio da correspondência de Bohr, que estabelece a convergência entre os resultados quânticos e clássicos em limites de alta energia. Esse limite é particularmente relevante, ao conectar a mecânica quântica ao formalismo clássico, permitindo compreender a transição entre esses dois domínios.

Para compreender melhor as diferenças entre a descrição clássica e a quântica do oscilador harmônico, analisaremos a forma das funções de onda $\psi_n(x)$ e suas respectivas densidades de probabilidade $|\psi_n(x)|^2$ para diferentes estados de energia. Por fim, anali-

zaremos as representações gráficas desses estados, que nos permitirão discutir como as características quânticas se manifestam em baixos e altos níveis de excitação.

Figura 5.4 – Comportamento dos níveis energéticos



Fonte: Griffiths, 2018.

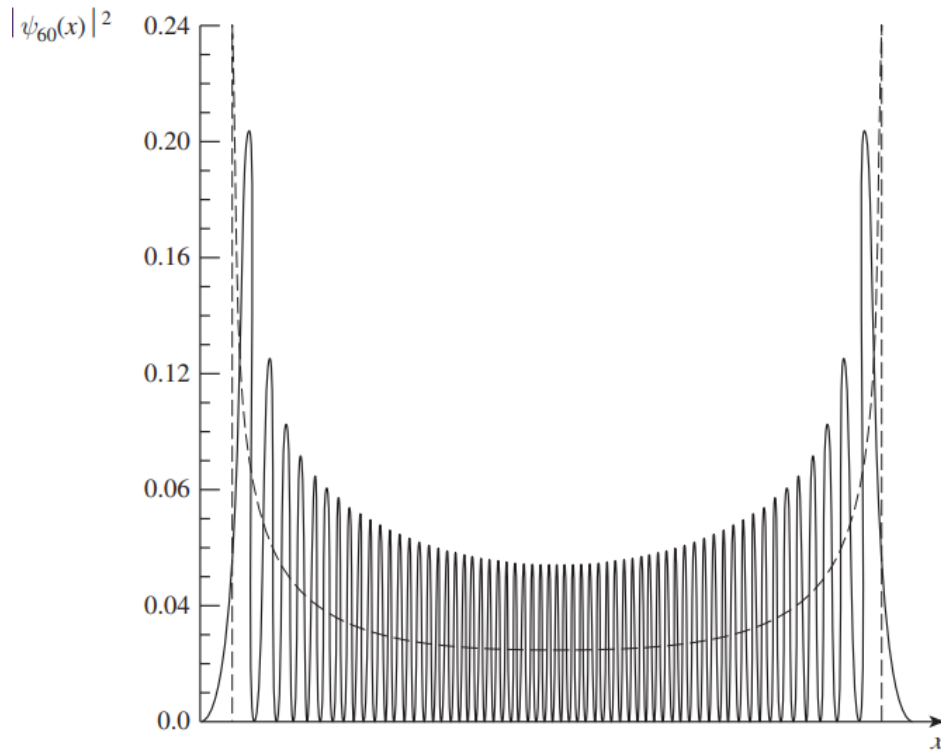
A Figura 5.4 ilustra as funções de onda e as respectivas densidades de probabilidade para os primeiros estados do oscilador harmônico quântico. Observa-se que, para $n = 0$, a densidade de probabilidade é máxima na região central, próxima à origem, o que indica maior probabilidade de encontrar a partícula nesse ponto. Em contrapartida, para o estado $n = 1$, que é um estado ímpar, a probabilidade de encontrar a partícula exatamente na origem é nula, o que evidencia uma característica exclusivamente quântica, onde a presença de nós e a exclusão de certas regiões ocorre mesmo dentro da zona classicamente permitida.

Além disso, a densidade de probabilidade não se anula nas regiões exteriores ao limite clássico, isto é, com x maior que a amplitude clássica para a energia E_n , nesse caso, a partícula possui uma chance finita de estar em regiões onde, classicamente, seria proibida.

Na Figura 5.5, o eixo vertical do gráfico representa a densidade de probabilidade $|\psi(x)|^2$, ou seja, a probabilidade por unidade de comprimento de encontrar a partícula em uma determinada posição x , representada pela linha contínua. Note que existe um aumento na densidade de probabilidade nas proximidades das posições máximas da oscilação. Isso confirma o fato de que, para altos valores de n , a distribuição de probabilidade quântica começa a se aproximar da distribuição de posição clássica, representada pela linha tracejada. Dessa forma, o valor máximo, aproximadamente 0,24, indica uma região de alta densidade

de probabilidade, enquanto valores próximos de zero representam regiões menos prováveis para detectar a partícula. Podemos concluir que para altos valores de energia, as soluções da equação de Schrödinger tornam-se menos influenciadas pelos aspectos puramente quânticos, como, por exemplo, a quantização dos níveis de energia. Consequentemente, espera-se uma maior aproximação do oscilador descrito pela mecânica quântica.

Figura 5.5 – Gráfico de $|\psi_{60}|^2$ com o distribuição clássica (curva tracejada) sobreposto.



Fonte: Griffiths, 2018.

No caso clássico, a densidade de probabilidade pode ser estimada a partir do tempo que a partícula passa em cada região do movimento. Considerando que a probabilidade é inversamente proporcional à velocidade, temos

$$P_{cl}(x) \propto \frac{1}{v(x)}. \quad (5.7)$$

Para o oscilador harmônico clássico, a velocidade em função da posição é

$$v(x) = \omega \sqrt{A^2 - x^2}, \quad (5.8)$$

onde A é a amplitude do movimento e ω é a frequência angular. Assim, a densidade de probabilidade clássica assume a forma

$$P_{cl}(x) \propto \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad (5.9)$$

mostrando que, no modelo clássico, a partícula é mais provável de ser encontrada nas proximidades dos pontos de inversão da trajetória.

Dessa forma, através da análise comparativa entre o oscilador clássico e quântico podemos perceber as principais semelhanças e divergências entre os modelos, de forma que ambos combinam em uma equação diferencial de segunda ordem e divergência como a diferença entre os níveis energéticos.

No capítulo seguinte, apresentaremos as considerações finais deste trabalho. Serão discutidas as contribuições do estudo sobre o oscilador harmônico clássico e quântico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi realizada uma análise detalhada sobre os osciladores harmônicos clássico e quântico, destacando suas semelhanças e diferenças tanto do ponto de vista matemático quanto conceitual. A partir do levantamento bibliográfico e do estudo teórico, observou-se que o oscilador harmônico se estabelece como um modelo fundamental na física, sendo amplamente utilizado para descrever sistemas que apresentam comportamento oscilatório, desde massas acopladas a molas até vibrações moleculares e circuitos elétricos.

A formulação clássica, baseada na segunda lei de Newton ou no formalismo de Lagrange, ou no de Hamilton, permite descrever com precisão a evolução temporal do sistema, enquanto a abordagem quântica introduz conceitos únicos, como a quantização da energia e a existência de um estado fundamental com energia distinta de zero. Esse aspecto, em particular, representa uma ruptura com a intuição clássica, evidenciando a necessidade de uma nova interpretação para a compreensão de sistemas microscópicos. Além disso, a notação de Dirac, empregada na descrição quântica, demonstrou-se uma ferramenta poderosa para a análise dos estados do sistema.

Ao longo do estudo, também foram analisadas aplicações do oscilador harmônico em diferentes contextos da física, como no eletromagnetismo, na mecânica estatística e na física de partículas, reforçando sua relevância tanto teórica quanto experimental. A comparação entre os modelos clássico e quântico permitiu não somente compreender a transição entre os dois regimes, mas também fornecer subsídios para uma abordagem didática que favoreça o ensino e a aprendizagem desses conceitos em diferentes níveis educacionais.

Dessa forma, este trabalho contribui para uma melhor compreensão dos osciladores harmônicos, enfatizando sua importância como modelo fundamental na física. Além disso, ao explorar as conexões entre a mecânica clássica e a quântica, possibilita reflexões mais amplas sobre a natureza das teorias físicas e suas limitações, incentivando futuras investigações sobre o tema.

REFERÊNCIAS

- AMORIM, Marcelo. Caos em sistemas mecânicos. **Anais do primeiro congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações**, p. 1 – 27, 2002.
- ARFKEN, George; GRIFFING, David; PRIEST, Kelly. **University Physics**. [S.l.]: Academic Press, 1984.
- BLOCH, Sylvan Charles. **Introduction to Classical and Quantum Harmonic Oscillators**. Flórida: Wiley–Blackwell, 1997.
- BOLDRINI, José. et al. **Álgebra Linear**. [S.l.]: Harbra, 1984.
- CARDOSO, Wyndam Baxter. et al. O formalismo de hamilton-lagrange. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, p. 9, 2020.
- CARVALHO, Marcelo Henriques. Vetores e geometria analítica. **Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**, 2009.
- DE LA PENÃ, Luis. et al. Statistical consequences of the zero-point energy of the harmonic oscillator. **American Journal of Physics**, 2008.
- DIRAC, Paul Adrien Maurice. **The principles of quantum mechanics**. London: Univercity Prese, Oxford, 1948.
- EINBERG, Robert; RESNICK, Robert. **Física quântica: átomos moléculas, sólidos, núcleos e partículas**. [S.l.]: GEN LTC, 1979.
- GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles; SAFKO, John. **Mechanics Goldstein Classical**. [S.l.]: Universitat Barcelona, 1950.
- GRIFFITHS, David; SCHROETER, Darrell. **Introduction to quantum mechanics**. Cambridge: University Printing House, 2018. Third edition.
- LAGE, Eduardo. Pêndulo simples. **Universidade do Porto**, 2019.
- LALANDE, Andre. **Vocabulaire technique et critique de la philosophie**. Paris: French European Pubns, 1972.
- MAMANI, Carlos Ronal. Espectro absolutamente contínuo do operador laplaciano. **Universidade Federal de São Carlos**, 2014.
- MORAIS, Carlos Mesquita. Escalas de medida, estatística descritiva e inferência estatística. **Instituto Politécnico de Bragança**, p. 1 – 30, 2005.
- PESSOA, João Ricardo. Formalismo de hamilton-jacobi aplicado a teorias de campos topológicas. **Universidade Federal da Bahia**, p. 120, 2016.
- SAKURAI, Jun John. **Modern quantum mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.
- SHANKAR, Ramamurti. **Principles of Quantum Mechanics**. [S.l.]: Yale University, 1980.

SYMON, Keith. **Mechanics**. London, England: Addison-Wesley Publishing Company, INC, 1953.

TAYLOR, John. **Mecânica Clássica**. [S.l.]: Bookman, 2013.

TELES, Renato de Sa. Bilhares. aspectos clássicos e quânticos. **Universidade Estadual de Campinas**, 2012.

THORNTON, Stephen; MARION, Jerry. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. EUA: Cengage Learning, 2011.

TIPLER, Paul. **Física moderna: mecânica quântica, relatividade e a estrutura da matéria**. [S.l.]: LTC, 2000.