



Instituto Federal de Brasília  
*Campus Estrutural*  
Curso de Licenciatura em Matemática

Caio Vieira Marques

**O USO DA PLATAFORMA GEOGEBRA PARA O ESTUDO DO CONCEITO  
PRIMITIVO E GEOMÉTRICO DE LIMITE**

Brasília  
2023

Caio Vieira Marques

**O USO DA PLATAFORMA GEOGEBRA PARA O ESTUDO DO CONCEITO  
PRIMITIVO E GEOMÉTRICO DE LIMITE**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília Campus Estrutural como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Mestre Bruno Marx de Aquino Braga

Brasília  
2023



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília**

## **ANEXO 4-FICHA DE APROVAÇÃO EM BANCA EXAMINADORA**

### **Trabalho de Conclusão de Curso**

**Discente:** Caio Vieira Marques

**Título: O USO DA PLATAFORMA GEOGEBRA PARA O ESTUDO DO CONCEITO PRIMITIVO E GEOMÉTRICO DE LIMITE**

Trabalho aprovado em: 17/07/2023.

Brasília - DF, 18 de Julho de 2023.

#### ***Banca Examinadora***

Orientador (Presidente): Me. Bruno Marx de Aquino Braga

Examinadora A (membro): Me. Everton Francisco Santiago

Examinador B (membro): Me. Antônio Costa Neto

Documento assinado eletronicamente por:

- Bruno Marx de Aquino Braga, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 18/07/2023 19:27:13.
- Everton Francisco Ferreira Santiago, PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO, em 18/07/2023 19:54:35.
- Antonio Dantas Costa Neto, COORDENADOR DE CURSO - FUC1 - ES-GRAD-LM, em 18/07/2023 20:04:52.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 18/07/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifb.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 475773

Código de Autenticação: ae765fd1b7



## **Resumo**

O ensino de limites na matemática é frequentemente acompanhado por uma série de dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Essas dificuldades podem ser atribuídas a fatores epistemológicos, ou seja, relacionados à forma como o conhecimento é adquirido e assimilado. Havendo também indícios de deficiências em relação à compreensão da matemática do ensino básico. O desenvolvimento de um recurso visual na plataforma Geogebra afim de diminuir um pouco da abstração e do rigor foi o objetivo principal deste trabalho, ir além do ensino tradicional, oferecendo uma experiência de aprendizado enriquecida e permitir que estudantes explorem os aspectos mais sutis e desafiadores da teoria, incentivando o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e significativa do cálculo.

**Palavras-chave:** Geogebra, Cálculo, Tecnologias na Educação, História do Cálculo.

## **Abstract**

The teaching of limits in mathematics is often accompanied by a series of difficulties faced by students. These difficulties can be attributed to epistemological factors, that is, related to how knowledge is acquired and assimilated. There are also indications of deficiencies in understanding basic mathematics. The main objective of this work was the development of a visual resource on the Geogebra platform in order to reduce some of the abstraction and rigor, going beyond traditional teaching methods, offering an enriched learning experience, and allowing students to explore the more subtle and challenging aspects of the theory, encouraging the development of a deeper and more meaningful understanding of calculus.

**Keywords:** Geogebra, Calculus, Technology applied in education, History of Calculus.

## Sumário

<b>1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>5</b>
<b>2 OBJETIVOS .....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 Objetivo Geral .....</b>	<b>9</b>
<b>2.1.1 Objetivos Específicos .....</b>	<b>9</b>
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>10</b>
<b>3.1 O ensino do Cálculo .....</b>	<b>11</b>
<b>3.2 O ensino de Limite .....</b>	<b>14</b>
<b>3.3. A ferramenta Geogebra .....</b>	<b>18</b>
<b>4 METODOLOGIA E MATERIAL .....</b>	<b>20</b>
<b>4.1 O material .....</b>	<b>21</b>
<b>5 Considerações Finais .....</b>	<b>26</b>
<b>6 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>27</b>

## 1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O cálculo moderno foi introduzido como o cálculo de infinitesimais, de forma independente, em diferentes locais e anos do século XVII por dois dos matemáticos mais famosos da história, Sir Isaac Newton e o matemático e filósofo Gottfried Leibniz. Enquanto Leibniz considerava o cálculo algo mais analítico, para Newton, o cálculo tinha natureza geométrica, em suas pesquisas ambos forneceram métodos minuciosos, fazendo uso de notações, regras definidas e por fim, notaram que os processos de diferenciar e integrar eram mutuamente inversos. Deste modo o ensino do cálculo diverge em duas vertentes, o Cálculo Diferencial e Integral, a primeira vertente estuda como as grandezas variam e como encontrar a taxa de variação entre essas grandezas e a outra compõe-se do estudo da integração e como pode ser aplicada para encontrar áreas e volume sob curvas no plano cartesiano em diferentes dimensões. No entanto, esses métodos ainda não possuíam o rigor matemático necessário, este que só foi desenvolvido no século XIX. Esta falta de rigor acarretou vários debates acerca dos aspectos do Cálculo.

Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente para os diferenciais de ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle (1652-1719), podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual à parte, pois uma grandeza  $x$  somada ao seu diferencial  $dx$  era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais eram manipulados diferentemente, conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon (1654-1722), com base no método Newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porém, não satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada. (BRITO; CARDOSO, 1997, p.138).

O porquê disso? Os ramos da matemática foram desenvolvidos para lidar com diferentes situações problema. As geometrias plana e espacial, por exemplo, nos permitem realizar o estudo de áreas, perímetros, ângulos e volumes de certas figuras ou a estatística que utiliza ferramentas e conceitos matemáticos para coletar, organizar, analisar e interpretar dados, porém antes destes ramos serem definidos vários experimentos ocorrem, por vezes levando a resultados corretos e, por vezes, não levando a resultado algum. Com a criação da ciência moderna no século XVII e sua crescente expansão, várias destas situações problemas que atormentavam a comunidade científica no período mencionado eram apontadas por físicos e astrônomos que também eram os mesmos matemáticos que as solucionaram.

O cálculo, inicialmente, fora criado para resolver problemas importantes da física, possibilitando lidar com velocidades e distâncias, tangentes e áreas, mas como toda criação nem toda possibilidade de uso é prevista pelos seus criadores.

O Cálculo, por volta de 1700, era ainda essencialmente orientado para a Geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. (BARON; BOS, 1985, p.43).

Durante os 150 anos até o desenvolvimento de uma abordagem mais rigorosa para o cálculo vários ramos do mesmo foram desenvolvidos, como as equações diferenciais e o cálculo de variações. Para os matemáticos daquele período a linguagem do cálculo como ferramenta era perfeita para resolver vários problemas e não havia grande preocupação em fundamentar suas bases. “A falta de rigor imputada aos matemáticos do século XVIII provém sobretudo, das dificuldades por eles enfrentadas em definir de maneira precisa as noções básicas do Cálculo, das quais, todavia, tinham muitas vezes uma boa concepção intuitiva.” (DIEUDONNÉ Apud ÁVILA, 1993, p.22).

Segundo artigo escrito para a *Scientific American* em 2014, o matemático e historiador Amir Alexander explorou o seguinte ponto de vista: “Os pioneiros do cálculo infinitesimal sabiam muito bem que sua abordagem se baseava em fundamentos lógicos precários, mas no geral não se importavam. Desde que seu método levasse a resultados corretos, concordava-se que deveria ser fundamentalmente sólido”. Esta abordagem reflete o momento histórico no qual o cálculo foi concebido. Durante o período de sua formulação, os matemáticos estavam desbravando novas fronteiras e desvendando conceitos revolucionários como mencionado anteriormente.

Do ponto de vista apresentado até agora dá-se a entender que os matemáticos deste período cometiam equívocos frequentemente devido à falta de rigor matemático, mas Grabiner (1983) explica que existiam dois motivos pelos quais isso não ocorria:

O primeiro motivo é que ao lidar com variáveis reais, funções de uma variável, séries de potência, e funções que surgiam de problemas da física, erros não aconteciam com frequência. O segundo motivo era que matemáticos como Euler e Laplace tinham um conhecimento profundo em relação às propriedades básicas dos conceitos relacionados ao cálculo, os tornando capazes de escolher métodos efetivos e evitar armadilhas. O único "erro" que cometeram foi o de usar métodos que chocaram matemáticos de gerações futuras que cresceram com o rigor matemático do século XIX. (GRABINER, 1983, p. 188).

Foi apenas no início do século XIX que uma abordagem mais lógica e formal, porém puramente verbal apareceu nos trabalhos do matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1867):

Chamamos quantidade variável aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente diferem deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado limite de todos os outros. (BARON, 1985c, p. 46).

Uma abordagem não muito diferente de um de seus predecessores, porém Cauchy foi o primeiro a usar desigualdades em suas provas, como menciona Judith V. Grabiner, autora do livro *“As Origens do Cálculo Rigoroso de Cauchy”*. Grabiner (1983) também explica que:

As bases lógicas e formais do cálculo não são nada intuitivas - ao contrário, na verdade. O cálculo é uma disciplina que trabalha com velocidades e distâncias, com tangentes e áreas - não com desigualdades. Quando Newton e Leibniz criaram o cálculo no final do século XVII, eles não se valeram de demonstrações delta-épsilon. (GRABINER, 1983, p. 185).

A menção do termo “intuitiva” nas palavras de Grabiner é comumente usada para descrever abordagens axiomáticas, mas ao verificarmos o significado deste termo, quando algo é considerado intuitivo, significa que é fácil de compreender, utilizar ou aprender sem necessidade de instruções complexas, ou grande esforço mental. Subentende-se que essas abordagens devem fazer sentido de imediato e que quem as lê possui um conhecimento prévio ou uma compreensão inata do assunto em pauta. No livro *“Particularidades da constituição das Noções de Infinito na história e na educação matemática”* Kill (2021) aborda que “As teorias matemáticas, por vezes, não seguem o caminho que o senso intuitivo orienta. Na teoria cantoriana sobre o infinito, são fartos os exemplos nos quais a intuição é ludibriada, em virtude do caráter surreal dos resultados alcançados.” Além disso, Reis (2001) ressalta que “A intuição é um elemento fundamental em qualquer situação de ensino.”

[...] o termo intuição será utilizado geralmente como equivalente a 'conhecimento intuitivo'; em outras palavras não como uma fonte, não como um termo, mas sim como um tipo de cognição. Admite-se intuitivamente que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, que todo número terá um sucessor, que o inteiro é maior que cada uma de suas partes, que um corpo irá cair quando não estiver apoiado. (FISCHBEIN, 1987, p.13).

Acreditamos que ao ensinar matemática, é importante que o professor considere a intuição dos estudantes e procure estratégias para aprimorá-la e conduzi-la de forma adequada. Porém, é fundamental reconhecer que, em algumas situações, a intuição pode não

ser a única orientação confiável, principalmente quando lidamos com conceitos complexos ou resultados axiomáticos. Nessas circunstâncias, a percepção intuitiva pode parecer enganosa ou restrita e desta forma buscamos entender quais eram as dificuldades para se assimilar os conceitos presentes na definição de limite e como a ferramenta Geogebra poderia auxiliar o aprendizado.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1. OBJETIVO GERAL**

Criação de um objeto educacional baseado na plataforma Geogebra que possibilite ao discente a construção de conhecimentos específicos da definição de Limite, além das noções intuitivas e exploratórias.

### **2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Análise dos pré-requisitos necessários para que o conceito de Limite seja compreendido pelos alunos de Cálculo;
- Análise das dificuldades de natureza epistemológica na compreensão do Cálculo;
- Demonstrar as potencialidades da plataforma Geogebra e estratégias que podem ser adotadas por professores para auxiliar os discentes no processo de aprendizagem da definição de limite.

### 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em um evento no qual tivemos a oportunidade de participar durante a graduação, pois ali apresentaríamos um trabalho que envolvia o uso de um aplicativo de autoria nossa para o ensino de geometria plana e espacial, um estudante que passava próximo ao nosso estande se interessou pelas figuras expostas e, após receber uma explicação um tanto desajeitada sobre o projeto em questão, com o rosto ainda exibindo uma expressão confusa ele disse: "Na matemática há um padrão em tudo... porém compreendê-lo... esse é o verdadeiro desafio, né?"

Uma particularidade da maioria das pesquisas relacionadas às dificuldades da compreensão do Cálculo desde Reis (2001) até Ferreira (2021), o professor emérito de Pensamento Matemático na Universidade de Warwick e editor do livro "*Advanced Mathematical Thinking*", David Tall, é mencionado frequentemente.

O livro mencionado é dividido em sete capítulos:

I - A psicologia do Pensamento Matemático Avançado; II - O processo do Pensamento Matemático Avançado; III - Criatividade Matemática; IV - Demonstração Matemática V - O papel das definições no ensino e aprendizado de matemática; VI - O papel de entidades conceituais e seus símbolos na construção de conceitos matemáticos avançados; VII - Abstração Reflexiva no Pensamento Matemático avançado.

O pensamento matemático avançado é caracterizado por processos mentais complexos, criatividade e a habilidade de construir demonstrações e pensar de maneira abstrata. O livro aborda ainda o desenvolvimento cognitivo, as dificuldades encontradas pelos estudantes ao lidar com axiomas e a utilização do computador no ensino e aprendizado desses temas.

A obra possui três focos centrais: 1) a natureza do pensamento matemático avançado, cujos tópicos incluem os processos envolvidos na concepção do pensamento matemático avançado, a criatividade matemática e a prova matemática; 2) a teoria cognitiva do pensamento matemático avançado, cujos tópicos incluem o papel das definições, o papel dos símbolos e a abstração reflexiva; 3) a pesquisa envolvendo o ensino e a aprendizagem do pensamento matemático avançado, cujos tópicos incluem o desenvolvimento cognitivo e dificuldades conceituais relacionadas a funções, limites, análise, infinito, prova e ainda, o uso do computador. (REIS, 2001, p.45 - 46).

Segundo Ferreira (2021), representações simbólicas e mentais são mecanismos fundamentais para expressar, transmitir e processar o conhecimento. Elas estão relacionadas à

conexão entre sinais e seus significados, à criação de representações mentais através da visualização e ao uso de objetos concretos externos para expressar e comunicar essas representações mentais.

Partindo da ideia do uso intuitivo da visualização, da manipulação e interação com objetos e o uso do computador, refletimos sobre as vantagens e desvantagens de se encontrar um limite graficamente e sobre como esse pode ser um recurso precioso para ajudar os estudantes que estão ingressando na graduação a entender a definição de limite no cálculo.

A transição do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma mudança significativa: a transição de descrever para definir, de convencer para provar de maneira lógica com base nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva observada durante a luta inicial dos estudantes universitários com abstrações formais, conforme eles lidam com o primeiro ano da universidade. É a transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir mediante deduções a partir de definições formais. (TALL, 1991, p.20, tradução nossa).

### **3.1. O ENSINO DO CÁLCULO**

Consideramos que em Cálculo se espera que o discente aprenda a calcular e interpretar o comportamento de funções à medida que se aproximam do infinito, a relação entre o limite, a derivada e a integral, estes sendo os pilares para o teorema fundamental do cálculo, que é estudado de forma mais aprofundada ao decorrer da graduação. O Cálculo, uma disciplina indispensável para o desenvolvimento do estudante de exatas no ensino superior, seja licenciatura, bacharelado ou nos cursos das áreas de física, química, engenharia, economia e ciência da computação. Todavia, “A transição da Matemática escolar para a Matemática superior envolve alguns estrangulamentos por conta das especificidades de cada uma. Mesmo para aqueles que se adaptam mais facilmente, os pontos cegos são persistentes.” (KILL, 2021, p.215). Estes pontos cegos fazem alusão a habilidade do estudante de entender e vislumbrar o que é descrito em uma teoria matemática.

Em sua pesquisa Hardy (2009) que aborda as percepções dos estudantes sobre o ensino de limites na componente de cálculo nos cursos superiores, aponta que alguns dos estudantes entrevistados relataram dificuldade em compreender e aplicar técnicas matemáticas em problemas mais complexos. Iglioni (2009) destaca que “o processo de ensino aprendizagem no ensino superior é especialmente intrincado por haver, por parte de muitos professores, algumas expectativas, em geral, não correspondidas, sobre o conhecimento

prévio dos estudantes.” Estas expectativas, quando não atendidas, geram frustração, desmotivação e baixo desempenho por parte dos discentes, levando a altas taxas de reprovação e desistência.

Uma das razões pelas quais o ensino do cálculo está em desordem é que os conceitos que matemáticos especialistas consideram intuitivos não são “intuitivos” para os alunos. [...] Pesquisas em educação matemática mostram que as ideias dos alunos sobre muitos conceitos não atendem as expectativas. (TALL, 1991 p.5).

Essas lacunas deixadas pelo ensino básico preocupam pesquisadores há anos, segundo Belingoff e Gouvêa (2008), o matemático Euler (1707 - 1783) demonstrava preocupações quanto à aprendizagem do cálculo de séculos atrás e salientou a ideia de uma componente introdutória ou preparatória. Recentemente Fontes e Gontijo (2022) conduziram um estudo acerca do ensino e da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na educação superior brasileira e abordaram as altas taxas de reprovação e evasão ainda recorrentes, além de uma análise de alguns livros usados na componente e das dificuldades encontradas pelos estudantes.

O rigor no ensino de Cálculo [...] prevaleceu com o surgimento do curso de matemática no Brasil na década de 1930, modelo que foi criticado ao longo do tempo e que resultou em diversas reformas no ensino. Tais reformas não foram suficientes para resolver os problemas de aprendizagem dessa disciplina, que apresenta altos índices de reprovação e evasão nos cursos brasileiros. (FONTES; GONTIJO, 2022, p.176).

A falta de uma base sólida dos conceitos matemáticos dos estudantes que estão na transição do ensino médio para o ensino superior, como apontado por Alvarenga, Dorr e Vieira (2016), essas lacunas agravam os problemas de compreensão dos conceitos apresentados no Cálculo e, no desenrolar do curso, podem se tornar o motivo para a reprovação do estudante. Para tentar solucionar esses obstáculos epistemológicos, as instituições de ensino buscaram implementar estratégias como a inclusão de disciplinas de revisão, tais como fundamentos de matemática ou pré-cálculo.

Assim, diante de tais evidências, muitas instituições de Ensino Superior passam a oferecer cursos de nivelamento (denominados na literatura de Pré-Cálculo, Cálculo Zero ou Introdução ao Cálculo) nos quais conteúdos da educação básica são revisados ou introduzidos a alunos ingressantes [...] os primeiros registros sobre a oferta de cursos de nivelamento como medida paliativa para o problema da reprovação em Cálculo no Brasil ocorreram por volta da década de 70, comprovando que este não é um problema recente. Atualmente, a oferta dos referidos cursos ainda perdura em diversas instituições. (ZARPELON, 2016, p.38).

Ademais, o Cálculo é em alguns momentos uma disciplina teórica e em outros, prática, exigindo do aluno uma capacidade de pensamento lógico e abstrato e uma boa compreensão e interpretação de textos. Compreender e demonstrar, são habilidades que

devem ser dominadas pelo discente ao decorrer do curso de Licenciatura, mas as bases para esses conhecimentos devem ser adquiridas no ensino básico.

Muitas dificuldades de aprendizagem estão relacionadas ao nível de proficiência no uso da linguagem escrita, no desenvolvimento da capacidade de expressão e de compreensão da Matemática, nas dificuldades de apropriação conceitual e no desenvolvimento de habilidades previstas para a Educação Básica, entre outros aspectos. (SCHIMER; TAUCHEN, 2022, p.2).

O programa monitoria, é uma das estratégias adotadas pelas instituições de ensino onde um ex-estudante da componente participa de uma seleção e, se selecionado, recebe uma bolsa para esclarecer as dúvidas dos estudantes e orientá-los nas atividades acadêmicas sob a supervisão do professor da disciplina, programa este que tivemos a oportunidade de fazer parte durante dois semestres da graduação. O estudo de Zarpelon (2016) ressalta a importância dessas intervenções para superar as dificuldades encontradas na disciplina de Cálculo I. Além de mencionar que “a maioria dos estudantes que não tiveram sucesso na disciplina não participavam ou participavam de forma tímida dessas iniciativas.”

Outras iniciativas para evitar o fracasso dos estudantes no ensino de Cálculo, envolvem a busca por metodologias ativas por parte dos docentes com o intuito de aumentar o engajamento e a motivação para aprender dos alunos. Tornando-se agentes ativos na construção do conhecimento, por meio de discussões, resolução de problemas, trabalhos em grupo, usos de tecnologias e outras atividades que estimulam o pensamento crítico e a reflexão.

Uma proposta para a melhoria no processo de ensino e aprendizagem em Cálculo são mudanças metodológicas, como, por exemplo, o uso de metodologias ativas, que favorecem a aprendizagem dos estudantes e contribuem com o envolvimento dos sujeitos na realização das atividades e estimulando a sua autonomia [...] Planejar as atividades a serem executadas, baseadas na realidade da turma, analisar e refletir sobre os resultados obtidos à luz da teoria, são os caminhos para aprimorar o processo de ensinar, de modo a favorecer a aprendizagem. (FONTES; GONTIJO, 2022, p.176).

Durante a experiência como monitor, pode-se averiguar que dos poucos alunos participantes, grande parte deles tinham facilidade na resolução de problemas após entenderem a usar a ferramenta, onde a repetição e a memorização são as habilidades mais utilizadas. Pode-se notar também que ao serem apresentados a uma nova definição ou teorema, os discentes normalmente solicitam uma aplicação ou exercício resolvido, de modo que eles possam usar como fórmula para resolver outros exercícios, mas não necessariamente significa que aquela definição ou teorema foram compreendidos.

Estudantes são provenientes de um sistema educacional onde o ensino de Matemática está principalmente centrado em cálculos e na manipulação de símbolos, bem como na exploração de conceitos a partir de suas propriedades. A análise formal passa a requerer dos alunos um trabalho com definições que envolvem quantificadores múltiplos e lógica proposicional. Estudantes podem fazê-lo como se estivessem iniciando uma construção nova, compartimentalizada das imagens prévias deixando a reconciliação com as experiências anteriores para depois, ou, partindo do conhecimento prévio, reconstruindo-o. (PINTO, 2001, p.125).

É perceptível que as dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo são amplamente reconhecidas e que os obstáculos que afetam tanto a compreensão conceitual quanto a aplicação prática deste conteúdo estão sedimentados na história da Matemática. Os autores mencionados anteriormente questionam a abordagem tradicional, que costuma apresentar os enunciados matemáticos de forma linearizada, enquanto outros defendem o desenvolvimento de abordagens mais flexíveis e adaptativas do processo de ensino-aprendizagem, visando permitir que os estudantes avancem em seu próprio ritmo. Tais abordagens geralmente envolvem o uso de novos métodos de ensino, tecnologias e materiais concebidos para atender de forma mais adequada às necessidades dos alunos contemporâneos.

### 3.2. O ENSINO DE LIMITE

Compreender a definição de limites em cálculo pode ser desafiador, especialmente ao tentar entender os argumentos presentes nessa definição. Esses argumentos especificam as condições nas quais uma função se aproxima de um valor específico à medida que os valores de entrada se aproximam cada vez mais de um ponto dado. Esses argumentos envolvem o uso de duas variáveis,  $\varepsilon$  (épsilon) e  $\delta$  (delta), as quais são utilizadas para definir a tolerância ou erro permitido no valor da função, assim como a distância permitida entre os valores de entrada e o referido ponto. “Quando apresentamos o conceito de limite, utilizando a definição formal, não há como negar a complexidade que essa notação apresenta e, principalmente, o que o aluno necessita para compreendê-la.” (ABREU, 2011, p.28).

Lima (2006) descreve a definição de limite em seu livro *“Análise real volume 1. Funções de uma variável”* da seguinte forma: “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  quer dizer que se pode tornar  $f(x)$  tão próximo de  $L$  quanto se queira desde que se tome  $x \in X$  suficientemente próximo, porém diferente, de  $a$ ”. Em outras palavras, ao analisar o limite de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$ , não levamos em consideração o caso  $x = a$ . Nosso interesse reside em

examinar o comportamento de  $f(x)$  para valores próximos de  $a$ . A função  $f$  pode nem mesmo estar definida para  $x = a$ . A rigor:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Esta definição é apresentada aos alunos de Cálculo 1 tradicionalmente de modo a iniciar-se o tópico de Limites, porém devido ao tempo e a quantidade de tópicos presentes na disciplina, a definição é apresentada, exemplos são dados e talvez seja aplicada na primeira avaliação do curso. Como descrito por Reis (2001) “[...] após um eventual capítulo somente de teoria e cálculo de limites, todos os limites são calculados por continuidade, isto é, através da substituição do ponto na função. Logo, a questão dos limites deve ser desviada e o curso deve seguir direto rumo às derivadas, integrais e suas aplicações.” Entender o uso desses argumentos para comprovar a existência de um limite pode ser um desafio, pois requer um alto nível de precisão e atenção aos detalhes. Ter uma intuição clara sobre o significado de uma função se aproximando cada vez mais de um ponto específico pode ser um conceito difícil de se compreender. Celestino (2011) ressalta “O símbolo  $\lim$ , usado quando escrevemos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , na própria leitura dessa sentença, traz aos alunos dificuldades em perceber que o “limite é” e a “função se aproxima”, em geral, leem o limite se aproxima.” Swokowski (1999) também aborda em seu livro “*Cálculo com Geometria Analítica*” o mesmo problema em relação à menção de aproximações na definição, ele diz que:

No desenvolvimento do cálculo no século XVIII, o conceito de limite foi tratado intuitivamente, [...], onde supomos que o valor de  $f(x)$  tende para um certo número  $L$  quando  $x$  tende para um número  $a$ . Ou seja, quanto mais próximo de  $L$  estiver o valor de  $f(x)$ , mais próximo de  $a$  estará  $x$ . O problema desta definição está na palavra próximo. (SWOKOWSKI, 1999, p.49).

Tall e Vinner (1981) relatam em sua pesquisa que ao abordar a definição de limite de uma função, os discentes têm uma percepção de dinâmica, onde o processo de aproximação do ponto  $a$  da sensação de movimento e relatam que após um experimento no qual os discentes foram solicitados a explicar o que significava “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ ” foi revelado que a maioria dos discentes não sucedera em apresentar uma resposta concisa, porém mesmo que confusas as respostas ainda se assimilavam a noção de limite.

A ideia de limite envolve o gradual avanço em direção a um valor específico. No entanto, associar esse conceito à noção de movimento físico ou aproximação se prova um obstáculo. Isso acontece porque a definição formal de limite é estática e não leva em conta o

processo dinâmico de aproximação. Ao usarmos expressões como "tão perto quanto se queira" ou "se aproxima cada vez mais", descrevemos uma ideia de movimento ou processo contínuo. Cetin (2009) argumenta em seu trabalho que “é comum que o estudante decore a definição de limites, porém sem procurar entendê-la, já que o uso dos procedimentos aparenta-se mais prático para achar o limite de uma função.” Situação similar também aparece como depoimento de um professor de Cálculo 1 no trabalho de Reis (2001):

[...] tava todo mundo decorando fórmulas para achar o delta quando era dado o épsilon da função tal [...] naquele tempo as provas eram sem consulta e eles estavam decorando fórmulas e colando fórmulas para achar o delta [...] Ou seja, eles estavam fazendo aquilo sem a menor compreensão [...] Apesar de todos os roteiros que a gente fazia para ver se eles entendiam [...] talvez um terço dos alunos das melhores turmas entendia, mas o resto não entendia nada. (REIS, 2001, p.179-180).

Ao mesmo tempo, em que aplicar a definição de limites para resolver problemas requer uma combinação de habilidades matemáticas e raciocínio lógico. Ainda segundo Gonçalves e Zunchi (2003) “Ao formalizar o conceito de limites, os obstáculos aumentam, pois neste momento, o aluno se depara com a formalização da linguagem matemática, a qual muitas vezes ele não entende. A falta de uma base em matemática básica torna-se evidente, ao lidar com conceitos de funções modulares.” A fala destes autores corrobora a ideia de que a grande maioria dos estudantes podem encontrar desafios ao formularem seus argumentos para demonstrar a existência de um determinado limite ou ao manipular expressões algébricas para encontrar o valor do limite.

[...] as dificuldades de aprendizagem relacionadas a operação de limite estão associadas muito mais às suas dificuldades em manipulações algébricas (fatoração de polinômios, relações trigonométricas, simplificações algébricas, “produtos notáveis”, etc.) do que à sua interpretação analítica. Assim, no contexto do ensino de Cálculo, pode-se dizer que a noção de limite de funções está mais caracterizada, portanto, como uma operação algébrica do que com uma operação analítica. Essa “algebrização exacerbada da operação de limite caracteriza bem o que queremos dizer com a “prevalência da técnica sobre o significado.” (REZENDE, 2003, p. 13).

Para compreender verdadeiramente a definição formal de limite, é preciso ter certas "concepções de matemática", que muitas vezes parecem ser um conceito misterioso.

Concepções de matemática: ‘são as crenças conscientes ou subconscientes, conceitos, regras, imagens mentais e preferências concernentes à disciplina de matemática. Essas crenças, conceitos, visões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia matemática.’ (THOMPSON, 1992, p. 130).

É difícil determinar quando isso é adquirido pelo indivíduo e se torna ainda mais desafiador quando tenta-se transmiti-lo para outras pessoas.

Convencer a si envolve ter uma ideia de por que uma afirmação pode ser verdadeira, mas convencer um amigo requer que os argumentos sejam organizados

de forma mais coerente. Convencer um inimigo significa que o argumento agora deve ser analisado e refinado para poder resistir ao teste da crítica. Isso é o mais próximo que o Pensamento Matemático chega à noção de prova. (TALL, 1991, p.20, tradução nossa).

Por experiência, ao ler uma demonstração ou exemplo resolvido em um livro e tentar compreender cada etapa individualmente, tudo parece um pouco arbitrário e frequentemente nos vemos acometidos com um sentimento de estar à deriva, pois os termos e conceitos utilizados pelos que resolveram os problemas parecem estar desconectados do assunto que pensávamos estar aprendendo. Em algum momento, parece que estamos apenas manipulando símbolos, como um tipo perverso de palavras-cruzadas.

Na Matemática, o potencial encantamento surge mediante o entendimento dos resultados e das relações. Alunos à margem da linguagem utilizada pelo livro ou pelo professor tornam-se espectadores de uma sinfonia surda, cenário de um espetáculo sem sentido em meio a um silêncio amedrontador. (KILL, 2021, p.216).

No trabalho de Tall e Vinner (1981) é discutido como cada indivíduo pode gerar uma imagem conceitual única do que lhe é apresentado como definição. Essa forma de abordagem reconhece que, apesar de ser comumente vista como uma disciplina exata, a matemática também pode ser interpretada e compreendida de maneira subjetiva.

A imagem conceitual diz respeito ao aspecto cognitivo sobre o qual o aluno constrói este conhecimento. Sobre este aspecto é importante levarmos em conta a particularidade de cada aluno na forma como ele constrói este conhecimento. Isto se dá, às vezes de forma equivocada, a despeito de qualquer análise formal que se tenha construído durante a aula. (ABREU, 2011, p.15).

Percebe-se que as dificuldades em desenvolver a habilidade para compreender os argumentos lógicos e abstratos presentes na definição de limite deve-se a falta de fundamentação do que é aprendido no ensino básico, esta responsabilidade recai não somente sobre os docentes do ensino superior, mas também sobre os discentes. O docente deve investigar as dificuldades de seus alunos e oferecer metodologias diferentes que possam amenizar o rigor do conteúdo, por outro lado, o discente deve reconhecer as áreas em que possui dificuldades e como preencher possíveis lacunas em seu conhecimento, para Lima e Silva (2012) “[...] compreender os significados dos conceitos fundamentais deste ramo do conhecimento, as ideias que estiveram em sua gênese, e que soubessem utilizar aquilo que haviam estudado, por meio de técnicas operatórias, como ferramentas para a resolução de problemas.” Ainda segundo Bairral e Lobos (2019) “O estudo de Limite desenvolve processos importantes do pensamento matemático, tais como a delimitação e o estudo de intervalos, a análise de máximos e de mínimos, a identificação do ponto de acumulação, a aproximação e a lateralidade”. Porém, entender ou não o que são os  $\epsilon$ 's e  $\delta$ 's na definição não

se prova problema suficiente para que o aluno consiga achar os limites de uma função. Conforme a análise de Kill (2021) sobre um relato acerca do processo de compreensão dos limites em cálculo, “a ausência de significado das expressões introduzidas por Weierstrass (1815-1897), para fundamentar as noções de cálculo, não foi impedimento para obtenção de resultados. Para esses casos, parece imperar a repetição e a memorização.”

A partir destas reflexões sobre os problemas epistemológicos encontrados no ensino de cálculo, particularmente no ensino de limites, este trabalho teve como objetivo a criação de um material didático interativo que em sua estrutura possui explicações detalhadas com recursos visuais acerca das noções teóricas de limites e dos conceitos matemáticos necessários para sua compreensão. A ferramenta também inclui exercícios e atividades de autoavaliação para que os estudantes possam, através da resolução de problemas, entender a importância das noções apresentadas. Visando oferecer um recurso que vá além do que é apresentado nos currículos tradicionais para enriquecer a experiência de aprendizado, permitindo que eles mergulhem nos aspectos mais sutis e desafiadores da teoria do limite.

### **3.3. A FERRAMENTA GEOGEBRA**

O GeoGebra é uma plataforma matemática gratuita e de código aberto utilizada para o ensino e aprendizado da matemática. É direcionado a estudantes e professores de todos os níveis e pode ser utilizado em uma variedade de atividades, como o estudo de gráficos, geometria, álgebra e cálculo. Através de sua interface interativa, os usuários podem manipular objetos na tela e visualizar os resultados em tempo real, o que o torna útil na exploração de conceitos matemáticos e na resolução de problemas. Para Kripka (2018) a utilização de recursos tecnológicos digitais nas áreas da matemática auxiliam na manipulação de dados, prevenindo erros de cálculo e agilizando a obtenção de soluções numéricas. Além de auxiliar na interpretação de problemas por meio de representações visuais, possuem interfaces amigáveis e de fácil utilização. Esses recursos tecnológicos possibilitam resolver problemas de forma interativa e permitem representações visuais, o que favorece a compreensão dos problemas estudados. A necessidade de explorar os recursos da informática nas aulas de Matemática tem propiciado transformações no ambiente educacional que incluem, a modificação dos processos de ensino e aprendizagem, a abordagem diferenciada de conceitos matemáticos. (RICHIT, 2005, p.34).

Marin (2009) e Iglioni (2009) constataram em suas pesquisas a existência de inúmeros trabalhos e investigações onde era evidente o uso de temáticas similares apresentando também a preocupação sobre a componente de cálculo e o desempenho dos discentes nas instituições de ensino superior em todo o mundo.

A utilização do GeoGebra traz dinamicidade ao processo, diferentemente de quando utilizamos apenas o caderno, no qual os gráficos são estáticos. A exploração dos aspectos geométricos é muito requerida nos trabalhos e manipular as ferramentas do software permite uma maior compreensão de tais características. Quando o professor deseja exibir uma quantidade maior de exemplos, é demandado bastante tempo de aula. Entretanto, o GeoGebra permite uma gama articulada de exemplos e conteúdos, sem requerer tanto tempo [...] Com o uso de novas tecnologias de informática, entre elas softwares matemáticos e aplicativos matemáticos, os docentes e estudantes encontram nestes, ferramentas que permitem melhorar os processos de ensino e aprendizagem de forma eficaz nesta área de conhecimento. (RIOS; IDROBO, 2017, p. 85 - 99).

Durante a concepção do material que será apresentado a seguir, pode-se notar as seguintes qualidades do Geogebra no que diz respeito ao ensino de limites:

**I - Visualização de funções:** Os recursos de gráfico do GeoGebra possibilitam que os estudantes plotem funções e investiguem seu comportamento e o conceito de aproximação.

**II - Experimentação com diferentes valores e funções:** A interação proporcionada pela interface do GeoGebra é notável e possibilita que os estudantes modifiquem tanto as funções quanto os valores das variáveis de entrada e auxilia na observação destas alterações em tempo real e seus resultados.

**III - Criação de demonstrações interativas:** As capacidades de *script* e programação do GeoGebra podem ser usadas para criar demonstrações interativas, que por sua vez, por usarem lógica, muito se assemelham com condições presentes em sistemas para demonstrações axiomáticas.

Com o uso do Geogebra e a combinação entre percepção e análise para auxiliar e fortalecer a compreensão da definição de limites, esperamos que os estudantes que acessem o material busquem visualizar, investigar e desenvolver concepções matemáticas que não possuíam anteriormente.

#### 4. METODOLOGIA

Este trabalho possui caráter investigativo visando contribuir para o aperfeiçoamento de práticas docentes no processo educativo vinculando o trabalho docente com a plataforma Geogebra no ensino superior, buscando analisar as dificuldades de compreensão encontradas na definição de limites que podem impactar a aprendizagem dos discentes e oferecer um material interativo que possa atender tais objeções, como:

[...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceito da matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da matemática; investigar abordagens de ensino que favoreçam apreensão dos conceitos, entre outros temas (IGLIORI, 2009, p. 12).

Para o presente trabalho, serão utilizadas estratégias de metodologias de desenvolvimento (*development research*) as quais diversas modalidades vêm se constituindo como referencial metodológico para pesquisas envolvendo TICs. No trabalho de Coutinho e Chaves (2001) a abordagem acerca das metodologias de desenvolvimento apresentam uma nova perspectiva no que diz respeito ao trabalho científico, bem como uma nova forma de relacionar teoria e prática. Elas visam tanto a construção de conhecimento que possa ser mais abrangente, quanto aprimorar a intervenção prática e encontrar soluções específicas para problemas. Segundo Lencastre (2009) “a *development research* ambiciona, portanto, dar contributos diretos para a melhoria dos processos educativos, medindo o impacto desses contributos”. Então a metodologia utilizada neste trabalho procura relacionar com maior relevância o vínculo entre hipótese, análise de dados, ferramentas e execução, procurando preencher lacunas deixadas por investigações convencionais (exclusivamente qualitativa ou exclusivamente quantitativa), de modo a desenvolver um material instrutivo científico. “Investigação básica ou fundamental (que visa fundamentar teorias e aumentar o conhecimento dentro de um dado domínio científico) e a aplicada (investigação que visa sobretudo solucionar problemas de um indivíduo, grupo ou da sociedade em geral)”. (COUTINHO; CHAVES, 2001, p. 897)

Particularmente sobre o produto proposto de forma distinta pretende-se seguir conforme a pesquisa de desenvolvimento:

**I. Investigação** – Apurar os impasses de maior impacto no ensino, na aprendizagem do público-alvo no conteúdo específico e o que pode ser usado da plataforma proposta para solucioná-los. Para Van Den Akker (1999) Mais ainda que outras abordagens metodológicas,

a investigação com fins de desenvolvimento visa dar ao mesmo tempo, contributos práticos e científicos.

**II. Embasamento Teórico** – Buscar ambientar de forma sucinta o uso da plataforma e suas funções no estudo de limites e seus conceitos para potencializar o ensino e o aprendizado, de modo a avaliar os saberes e interposições que outros investigadores tiveram tanto com o uso da plataforma proposta quanto com outras tecnologias.

**III. Testagem Empírica** – Uso de bibliografias para fundamentar a criação de questionários e auxiliar na resolução dos mesmos, além de promover relação direta entre axiomas, definições, o componente algorítmico e a intuição matemática, visto que, serão usados para avaliar tanto o uso da plataforma, quanto o desempenho dos discentes.

**IV. Documentação e Reflexão acerca do processo e Resultados** – Nesta parte será descrito o que pode-se tomar para investigações futuras acerca do desenvolvimento do produto dentro da plataforma Geogebra, da avaliação e implementação. Esta descreve a conclusão da proposta e do processo.

As diferenças entre as metodologias de desenvolvimento e as abordagens empíricas tradicionais situam-se mais ao nível das finalidades da investigação (nível filosófico e epistemológico do que ao nível dos métodos propriamente ditos: “os métodos da investigação de desenvolvimento não são necessariamente diferentes de outras abordagens de investigação educativa” (VAN DEN AKKER. 1999, p.9).

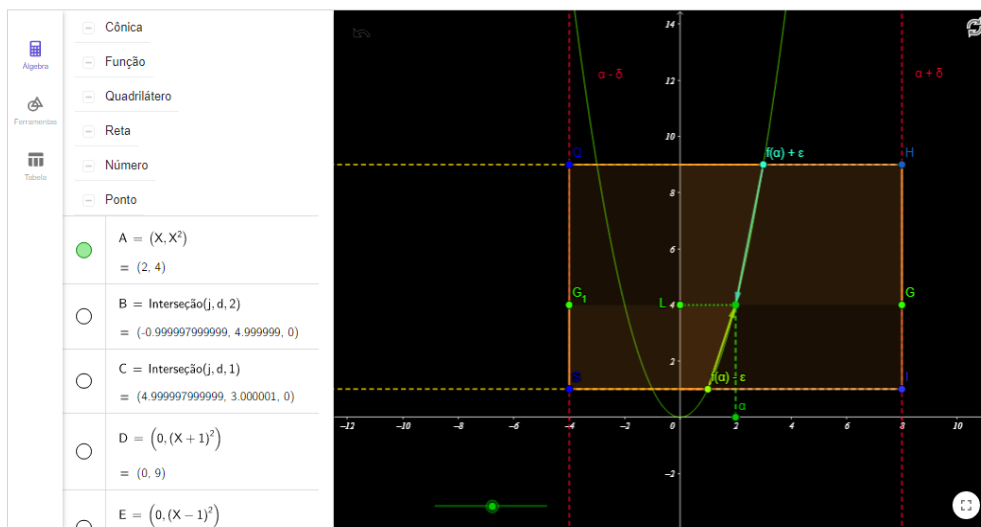
O uso e implementação da plataforma e do produto não se trata apenas do uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, mas também do desenvolvimento de uma estratégia de ensino, uma intervenção, é pensar em uma possível solução para os desafios e problemas das práticas existentes e motivar investigações futuras, refutações e criação de problemas matemáticos acerca das realidades enfrentadas pelos estudantes sendo estas, sociais ou tecnológicas. Cabe aos pesquisadores da educação debruçar sobre as reais necessidades dos jovens de hoje e sobre os saberes que possam interessar a eles. (IGLIORI, 2009, p.12).

#### **4.1. O MATERIAL**

Em nossas atividades, não exigimos que o estudante demonstre a rigor se o limite da função apresentada de fato existe, pois as demonstrações já se encontram no material, mas

sim solicitamos que o mesmo manipule as animações presentes no recurso ggbook<sup>1</sup> do Geogebra e descreva a partir de suas conclusões o que pode ser entendido. Procuramos desenvolver nas atividades aspectos que envolvam a intuição, percepção e a criatividade dos alunos. O recurso possui quatro curtos capítulos, sendo o primeiro dedicado a apresentação do material e uma breve explicação de como o professor pode utilizá-lo como material de apoio. A seguir, temos alguns exemplos do conteúdo deste ggbook e para praticidade do leitor deixamos as imagens como *hiperlinks* para o material.

Figura 1 - Definição de Limites representada graficamente no Geogebra.

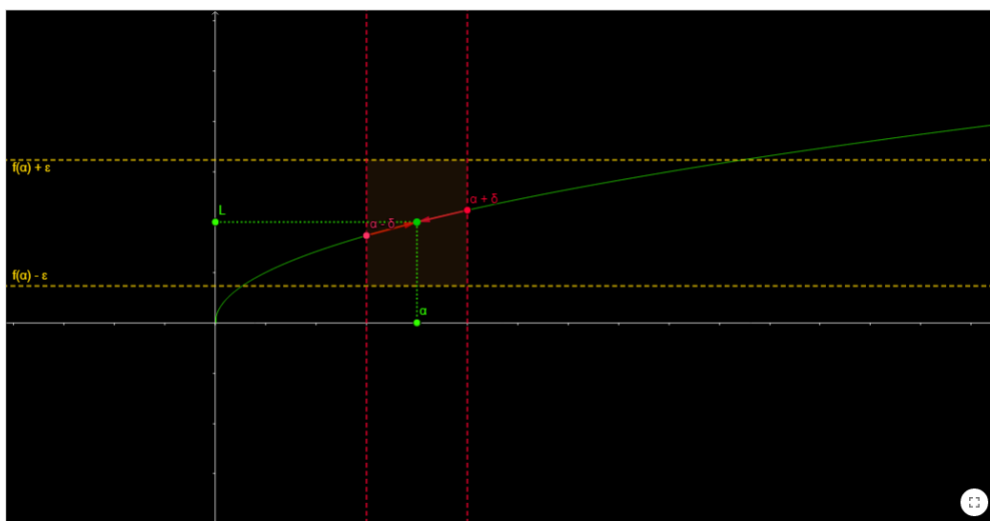


Fonte: Elaborado pelo autor.

No segundo capítulo, as primeiras construções após definirmos o que é um limite, solicitamos ao estudante que manipule os pontos de modo que o mesmo possa perceber que todos os valores na intersecção em laranja são os intervalos presentes na definição.

<sup>1</sup> Disponível em : <<https://www.geogebra.org/m/gg8ezq9x>>

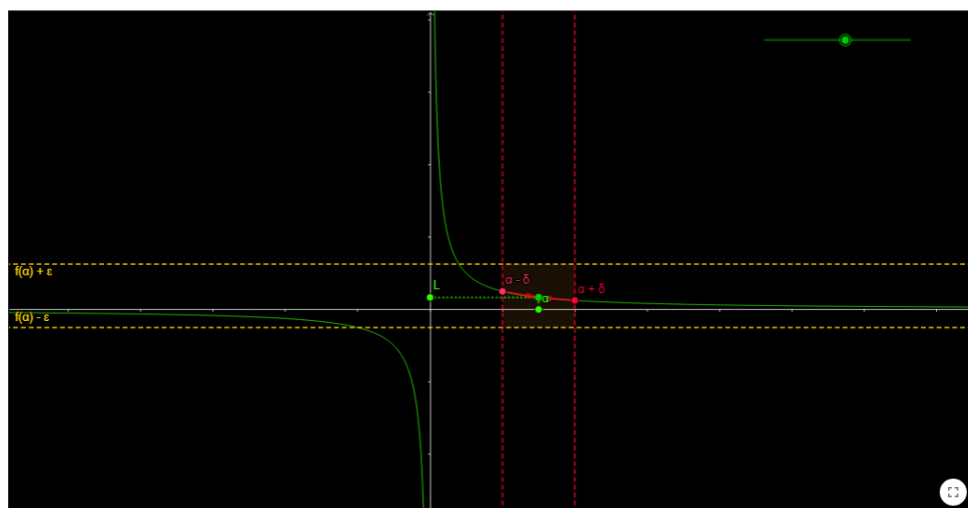
Figura 2 - Representação da demonstração da continuidade da  $f(x) = \sqrt{x}$  no gráfico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No terceiro capítulo trabalhamos a definição de continuidade de uma função em seu domínio, e solicitamos do aluno que através da visualização das aproximações presentes na construção, ele explique o que é uma função contínua.

Figura 3 - Representação da ideia de limite e descontinuidade.



Fonte: Elaborado pelo autor.



No quarto capítulo do ggbook são apresentados os limites fundamentais, iniciando-se pelo Limite Trigonométrico fundamental e sua demonstração. Neste capítulo não há atividades, mas a opção de manipulação e visualização continuam disponíveis. É um momento para que o estudante possa explorar livremente o material e tirar suas conclusões acerca destas demonstrações.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo que a definição de limite, por sua natureza, exija um alto nível de rigor e precisão, ela também envolve aspectos intuitivos e criativos. Explorar estes aspectos pode oferecer uma base rica para que o estudante tenha sucesso no curso de licenciatura. No que diz respeito ao ensino de cálculo, a lógica matemática geralmente não recebe grande destaque. No entanto, a presença do estudo de funções modulares na definição de limites e o uso da desigualdade triangular no limite trigonométrico fundamental mostram que a lógica, ainda que não seja o foco principal, desempenha um papel importante no cálculo. Felizmente ao desfecho do curso de licenciatura, quando retornamos para revisar um material no qual tivemos dificuldades anteriormente, com intuito de construir o material aqui apresentado, quase que sem perceber, após refletirmos sobre o que realmente significa entender matemática e adquirir certas concepções que antes eram quase que impossíveis de se entender, nos questionamos como tal conteúdo que agora parece ser simples já nos trouxe tantas dificuldades e como nos portamos ao sermos abordados com questionamentos similares quando estivermos desempenhando o papel de professor.

## 6. REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em cálculo I. Disponível em:

<[https://repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2449/1/DISSERTAÇÃO\\_DiscutindoAlgumasRelações.pdf](https://repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2449/1/DISSERTAÇÃO_DiscutindoAlgumasRelações.pdf)>. Acesso em: Maio de 2023.

ALVARENGA, K. B.; DORR, R. C.; VIEIRA, V. D. O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. Revista Brasileira de Ensino Superior, v. 2, n. 4, p. 46-57, out-dez. 2016.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Introdução à análise matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1993.

BAIRRAL, M. A.; LOBO, R. D. Uso do GeoGebra em Cálculo Diferencial e Integral: Um mapeamento sobre a aprendizagem de Limite. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/50159>>. Acesso em: Abril de 2023.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. ( 1985 ). Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Universidade de Brasília.

BELINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. A. Matemática através dos tempos. São Paulo: Ed. Blucher, 2008.

BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. ( 1997 ). Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do Cálculo Diferencial: reflexões metodológicas. Zetetiké, 5 ( 7 ) 129-144.

CELESTINO, M. R. Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior. Disponível em: <<https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/11336>>. Acesso em: Março de 2023.

CETIN, N. The performance of undergraduate students in the limit concept. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207390802568119>. Acesso em: Abril de 2023.

DIEUDONNÉ, JEAN. “Abrégé d’histoire Des Mathématiques: 1700-1900.” Hermann EBooks, Jan. 1978.

FERREIRA, R. D. Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de ciências exatas. Disponível em: <<https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/24646/1/Ronaldo%20Dias%20Ferreira.pdf>>. Acesso em: Março de 2023.

FISCHBEIN, E. Intuición in science and mathematics: an educational approach. Dordrecht, Holanda: D. Reidel, 1987.

FONTES, L. S.; GONTIJO, C. H. O ensino de cálculo nas universidades brasileiras e a compreensão do conceito de limite. Disponível em: <<https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4242>>. Acesso em: Abril de 2023.

GRABINER, J. V. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2975545>>. Acesso em: Março de 2023.

IGLIORI, S. B. C. (2009) Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os 10 números reais. In FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 11 – 26.

KILL, TERCIO GIRELLI. Particularidades da constituição das noções de infinito na história e na educação matemática/ Tercio Girelli Kill. - 1.ed. - Curitiba: Appris, 2021. 269p.; 21cm - (Educação, tecnologias e transdisciplinaridades).

KRIPKA, R. M. L. Uso de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de álgebra linear na perspectiva das teorias da aprendizagem significativa e dos registros de representação semiótica. Disponível em: <[https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/8057/2/Tese-Rosana\\_Maria\\_%20Luvzute\\_Kripka\\_2018-homologada.pdf](https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/8057/2/Tese-Rosana_Maria_%20Luvzute_Kripka_2018-homologada.pdf)>. Acesso em: Abril de 2023.

LIMA, E. L. Curso de análise. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. Análise real volume 1. Funções de uma variável. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006

LIMA, Gabriel Loureiro De; SILVA, Benedito Antônio Da. O Ensino do Cálculo na Graduação em Matemática: Considerações Baseadas No Caso da USP. In: Anais do v seminário internacional de pesquisa em educação matemática 2012, Petrópolis. Anais [...]. Petrópolis p. 1-18.

PINTO, M. M. F. Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise. In: LACHINI, J.: LAUDARES, J. B. (Orgs.) Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 123-145, 2001.

REIS, F. S. A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Campinas (Unicamp), Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese (doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RIOS, M. A.; IDROBO, Vivas S. J. (2017). Análisis comparativo de software matemático para la formación de competencias de aprendizaje en cálculo diferencial. Plumila Educativa, 19(1), 98-113. Disponível em: <<https://doi.org/10.30554/plumillaedu.19.2476.2017>>. Acesso em: 18 de Maio de 2023.

SCHIRMER, S. N.; TAUCHEN, G. O curso de Pré-Cálculo como estratégia de permanência e de conclusão da Graduação: percepções dos estudantes. Disponível em: <https://revistas.uam.es/reps/article/view/14531>. Acesso em: Junho de 2023.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com Geometria Analítica. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

TALL, D; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Disponível em: <[http://www.im.ufrj.br/~claudia/cursos-2010-1/artigo\\_Tall\\_Vinner.pdf](http://www.im.ufrj.br/~claudia/cursos-2010-1/artigo_Tall_Vinner.pdf)>. Acesso em: Fevereiro de 2023.

TALL, D. O. ( Ed. ) ( 1991 ). Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher.

TALL, D. O. ( 1991 ). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Advanced Mathematical Thinking, Capítulo 1, 3-21. Londres: Kluwer Academic Publisher.

TALL, D. O.; VINNER, S. ( 1981 ). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

THOMPSON, A. G. "Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research". In: GROUWS, D. A. (ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York, NCTM, MacMillan, 1992. p. 127-146.

VAN DEN AKKER, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. In J. Akker, van den, R. Branch et al. (Eds.) Design Approaches and Tools in Education and Training. Netherlands: Kluwer Academic Publisher. 1-14. Disponível em: <Van der Akker Ch1.pdf (heybradfords.com)>. Acesso em: 4 de Junho de 2023.

ZAPERLON, E. Análise do desempenho de alunos calouros de engenharia na disciplina de cálculo diferencial e integral I: um estudo de caso na UTFPR. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2489>>. Acesso em: Fevereiro de 2023.

# Documento Digitalizado Público

## Trabalho de Conclusão de Curso- Caio Marques

**Assunto:** Trabalho de Conclusão de Curso- Caio Marques  
**Assinado por:** Antonio Neto  
**Tipo do Documento:** Trabalho de Conclusão de Curso - TCC  
**Situação:** Finalizado  
**Nível de Acesso:** Público  
**Tipo do Conferência:** Documento Original

Documento assinado eletronicamente por:

- **Antonio Dantas Costa Neto**, COORDENADOR DE CURSO - FUC1 - ES-GRAD-LM, em 19/09/2023 18:49:24.

Este documento foi armazenado no SUAP em 19/09/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

**Código Verificador:** 506354

**Código de Autenticação:** 3a85dc9373

