

Instituto Federal de Brasília
Campus Estrutural
Licenciatura em Matemática

JOSUÉ DA COSTA OLIVEIRA

MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE: Uma abordagem introdutória para a Licenciatura em Matemática

Brasília
2025

JOSUÉ DA COSTA OLIVEIRA

MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE: Uma abordagem introdutória para a Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática do Instituto Federal de Brasília, *Campus* Estrutural como parte da exigência para obtenção do título de licenciado.

Orientador: Doutor Wembesom Mendes Soares

Brasília
2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

FICHA DE APROVAÇÃO EM BANCA EXAMINADORA

Trabalho de Conclusão de Curso

Discente: **Josué da Costa Oliveira**.

Título**: Medida e Integração de Lebesgue: Uma abordagem introdutória para a Licenciatura em Matemática.**

Trabalho aprovado em: **10/2/2025**.

Brasília - DF, **13** de **Fevereiro** de 2**025**.

Banca Examinadora

Orientador (Presidente): **Dr. Wembesom Mendes Soares**

Examinador A (membro): **Dr Vinícius Facó Vieira Ventura**

Examinadora B (membra): **Ma Adriana Barbosa de Souza**

Documento assinado eletronicamente por:

- **Wembesom Mendes Soares**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 13/02/2025 15:34:02.
- **Vinicius Faco Ventura Vieira** , **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 13/02/2025 17:05:58.
- **Adriana Barbosa de Souza**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 14/02/2025 12:03:35.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 13/02/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifb.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 598253
Código de Autenticação: f40a09a3f3

RESUMO

Entre os cursos de Licenciatura em Matemática é comum que abordem-se disciplinas de matemática mais complexas, tais quais a Álgebra Abstrata, a Teoria dos Números e a Análise Real. Há convicção da importância do conhecimento matemático para tal curso. Contudo, não por isso omitem-se os conteúdos de alguma forma mais voltados ao conhecimento puro ou aplicado da matemática. A integral de Riemann é amplamente trabalhada, compreendemos a importância do domínio da linguagem matemática e, inclusive pelas disciplinas já citadas, da adaptação a teoremas, proposições, lemas... bem como a relevância da habilidade de demonstração destes. Neste sentido, buscou-se a feitura de um material didático, objetivando um produto educacional conduzindo o estudo dos conteúdos de Teoria da Medida e Integral de Lebesgue para realização da pesquisa, entendendo seu valor histórico e complementar aos conhecimentos esperados, bem como em concordância aos objetivos para o egresso do curso, diante do Projeto Pedagógico do Curso do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Brasília. De todo modo, pretende-se que este seja um material introdutório a esses conteúdos citados, de maneira que seja acessível, inclusive, a estudantes da licenciatura em matemática. Por isso, tornou-se indispensável a argumentação acerca da justificativa de sua construção, arguindo sobre a relevância do conteúdo e como ele pode incrementar a formação do licenciando, não como conteúdo estritamente necessário à formação, mas como complemento para esta. A Integral de Lebesgue possibilita integrar uma gama maior de funções em comparação com a Integral de Riemann, esta de comum aprendizado nos cursos de licenciatura em matemática. Essencial para seu estudo, torna-se indispensável o estudo da Teoria da Medida, que também será abordada nesta monografia. Assim, no material produzido, sobre esses conteúdos visitando a Teoria da Medida, passamos desde as ideias gerais sobre medida para álgebras, σ-álgebras, espaços mensuráveis, até medida exterior e medida de Lebesgue. Seus resultados são base para a construção da Integral de Lebesgue, bem como a área de estudo de medida acompanha outras diversas formas de integrais estudadas após Riemann. Na Integral de Lebesgue fazemos sua construção em partes desde o caso das funções indicadoras até a Integral Geral de Lebesgue, com o auxílio de ferramentas clássicas como o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência de Lebesgue.

Palavras-chave: Teoria da Medida; Lebesgue; Integral de Lebesgue; Medida de Lebesgue; Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

In mathematics education programs, it is common to cover more advanced mathematical subjects, such as Abstract Algebra, Number Theory, and Real Analysis. There is a strong belief in the importance of mathematical knowledge for such a program, but not for this reason the topics that are more oriented towards pure or applied mathematics are omitted in the program. Riemann's integral is extensively worked on, we understand the importance of mastering mathematical language and, including because of the disciplines already mentioned, adapting to theorems, propositions, lemmas... as well as the relevance of the ability to demonstrate them. With this in mind, we sought the development of teaching material, aiming an educacional product conducted by the content of Measure Theory and the Lebesgue Integral, understanding its historical value and its complementary role in the expected knowledge, as well as aligning with the objectives for graduates of the program, according to the Pedagogical Project of the Mathematics Teaching Degree Program at the Instituto Federal de Brasília. Ultimately, we pretend that this can be an introductory material on these topics in a way that is accessible even to mathematics teaching degree students. For this reason, the argumentation to justify the development became essential, arguing for the relevance of the content and how it can enhance the training of future teachers, not as a strict required component of their education, but as a complement to it. The Lebesgue integral allows the integration of a broader range of functions compared to the Riemann integral, which is commonly taught in mathematics teaching programs. Essential for its study, in the material, the study of measure theory becomes indispensable, and it will also be addressed in this monograph. Regarding these topics, when exploring measure theory, we move from general ideas about measure to algebras, -algebras, measurable spaces, outer measure, and the Lebesgue measure. These results form the basis for the construction of the Lebesgue integral, as well as for the broader field of measure theory, which encompasses several types of integrals studied beyond Riemann's. In the study of the Lebesgue integral, we construct it step by step, from the case of indicator functions to the general Lebesgue integral, with the assistance of classic tools such as the Monotone Convergence Theorem and the Lebesgue Convergence Theorem.

Keywords: Measure Theory; Lebesgue; Lebesgue Integral; Lebesgue Measure; Mathematics Education Degree.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Duplicação do cubo 8
Figura 2 - Quadratura do Círculo 9
Figura 3 - Trissecção do Ângulo 9
Figura 4 - Convergência em sequência de funções 16
Figura 5 - Medida Exterior da Área 45
Figura 6 - Medida Interior da Área 45
Figura 7 - Conjunto de Cantor 52
Figura 8 - Conjuntos e função indicadora 58
Figura 9 - Função Seno 72
Figura 10 - Decomposição da Função Seno 72

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA **7**

1.1 **Medida e Integração na História** 10

1.2 **Limitações da Integral de Riemann** 13

1.3 **Integral de Riemann** 18

1.4 **A Necessidade de uma Nova Forma de Integração e a integral de Lebesgue** 19

1.5 **Importância do Conhecimento Matemático** 21

2 METODOLOGIA **27**

3 A MEDIDA DE LEBESGUE **31**

3.1 **Ideias Gerais Sobre Medida e Extensão de Valores** 32

3.2 **Sigma Álgebra e Espaço Mensurável** 36

3.3 **Medida Exterior e Medida de Lebesgue** 41

3.4 **Conjunto de Cantor** 51

3.5 **Medidas de Funções** 54

4 INTEGRAL DE LEBESGUE **57**

4.1 **Integral de Função Simples** 57

4.2 **Integral de Funções Limitadas em Conjuntos Mensuráveis e Finitos** 62

4.3 **Integral de Funções Não-Negativas** 66

4.4 **A Integral Geral de Lebesgue** 71

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **77**

6 REFERÊNCIAS **79**

APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÕES DA SEÇÃO 3 **82**

APÊNDICE B - CONJUNTO DE VITALLI **84**

APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÕES DA SEÇÃO 4 **88**

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Esta monografia propõe um estudo sobre a Medida e Integral de Lebesgue para a Licenciatura em Matemática. Como o processo de integração sempre está vinculado a uma medida, é natural que a compreensão da Medida de Lebesgue seja uma etapa indispensável neste estudo, especialmente porque ela difere da medida euclidiana que estamos habituados. Construindo os conceitos e apresentando as aferições necessárias com bases em conhecimentos que se esperam ou sejam possíveis de se obter por um aluno do curso de licenciatura em matemática, espera-se que esse seja um material acessível e produtivo para um primeiro contato com o conteúdo.

Falar-se-á um tanto sobre a integração de Cauchy-Riemann, justificando a apresentação da integral de Lebesgue, e acerca da relevância para o estudante de graduação. Em especial, pela visão de um estudante de matemática do Instituto Federal de Brasília.

O estudo de medida não é moderno e, de modo algum, veio a ter sua importância somente com os atuais avanços do cálculo e da análise matemática. A contagem e, por sua vez, a medição, estiveram presentes desde o início da história humana. Contávamos nossos dedos das mãos, os membros de nosso corpo, nos atentamos para os objetos ao nosso redor e aos outros seres que compreendem nosso círculo social. Os homens primitivos, como nos assevera Fossa et al (2009), já davam valores de medidas com base no tamanho de suas mãos, dos seus pés, dos seus polegares, de suas palmas, etc. Medir é algo tão comum que, sem relação com o conhecimento formal matemático, vemos o uso de padrões de medida e cálculos para grandezas como comprimento, área e volume, mesmo que de forma intuitiva. A capacidade de mensurar tem, historicamente, grande importância para a Matemática e, ao longo do tempo, impulsionou descobertas e episódios marcantes, como destacado a seguir em uma passagem em que Fossa et al (2009) discutia a interpretação do número nupcial.

> Assim, a descoberta do fenômeno da incomensurabilidade é equivalente à descoberta dos números irracionais. Mas, mesmo que este problema tenha sido uma grande preocupação dos pensadores do tempo de Platão e foi, de fato, resolvido por Eudoxo, um matemático e professor da Academia, não parece claro que a passagem se refira à incomensurabilidade. (Fossa et al, 2009, p.12)

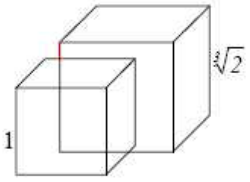
Ademais, Silva e Santos (2022) levantam a importância do processo de aprendizado da contagem, sendo este processo uma assimilação e coordenação das ideias de seriação e classificação construídas sob as ideias de números. Nesse sentido, o sujeito entende que os números devem ser seriados; caso contrário, ao partir para a contagem, incidirá senão na repetição dos números. Junto a isso, são induzidos a uma classificação, pois “a contagem só pode ser feita efetivamente com objetos de mesma classe” (Silva; Santos, 2022, p.6).

Aquém da assimilação recíproca empregada para os princípios anteriores, os conhecimentos seguintes de adição, para o qual o sujeito consiga somar um qualquer objeto a outro e resultar em dois, entendendo após que, dois acrescido a um deve resultar em três, preparam ainda uma outra estrutura, ao qual discorre Battro (1978), citado por Silva e Santos (2022):

> [...] consiste em extrair de um sistema de ações ou de operações de nível inferior certas características que permitem a reflexão (quase no sentido físico do termo) sobre ações ou operações de nível superior, porque só é possível tomar consciência de processos de uma construção anterior por intermédio de uma reconstrução sobre um novo plano (BATTRO, 1978, p.16) (Silva; Santos, 2022, p.7).

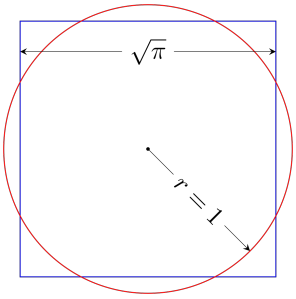
Podemos citar ainda, como reforço ilustrativo, três dos mais famosos problemas matemáticos da antiguidade: a trissecção do ângulo, no qual buscava-se dividir um dado ângulo em três partes iguais; a duplicação do cubo, em que se tentava encontrar o lado do cubo cujo volume seria o dobro do volume de um cubo dado; e, por fim, a quadratura do círculo, em que deveria-se encontrar um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Esses problemas foram, mais de 2200 anos depois e com o auxílio de teorias modernas como a de Galois, provados impossíveis de se resolver apenas com régua e compasso. Mesmo assim, os esforços para a resolução desses (e de outros) problemas de medida contribuíram significantemente para o desenvolvimento da matemática, pois "desde a antiguidade, o estudo de medida subsidiou grandes descobertas para a matemática, mesmo que esses estivessem afim das próprias medições" (Fossa et al, 2009, p.163).

Figura 1 - Duplicação do cubo



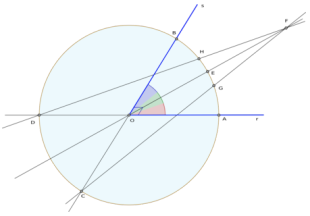
Fonte: Wikipédia, 2007.

Figura 2 - Quadratura do Círculo



Fonte: Wikipédia, 2023.

Figura 3 - Trissecção do Ângulo



Fonte: Wikipédia, 2024.

O paradoxo de Zenão, tal qual o paradoxo da dicotomia e da flecha, também foram problemas importantes para o avanço da matemática. Esses problemas desordenaram algumas noções de movimento e tempo na época. Os gregos já possuíam noção de medida, tinham seus conceitos acerca de área, comprimento e volume, todas essas "baseadas em invariâncias por isometrias" (Sena, 2024, p.10). Eles usavam de seus métodos conhecidos para calcular área, inclusive por decomposição finita, que viria a ser uma ideia precursora do cálculo integral de Riemann. Em suma, "a teoria da medida é um estudo mais profundo destes conceitos elementares". (Sena, 2024, p.10)

Já em Arquimedes e Euclides encontramos, por exemplo, o uso do método de exaustão para resolução de problemas como medidas de círculos por meio de aproximações com polígonos regulares. Arquimedes fez, inclusive, uma aproximação de π utilizando esse método. Em outra leva de cálculos, com um resultado típico do cálculo de integrais, obteve a área delimitada por um segmento de parábola pela soma de uma série geométrica infinita. Conforme Silva (2019), foi com o Método de Exaustão, criado por Euclides, que Arquimedes reproduziu pela primeira vez documentadamente um processo equivalente ao que hoje chamamos de integração, ao calcular áreas e volumes de figuras geométricas simples.

Assim, podemos ver que, historicamente, o estudo de medida sempre foi bastante relevante e induziu mudanças significativas dentro da área ao longo do tempo. A seguir, discorremos sobre a passagem histórica da integração e a necessidade de um novo método de integração para, em capítulo posterior, voltarmos e desenvolver a medida de Lebesgue.

1.1 Medida e Integração na História

Como já dito, remontamos a ideia inicial da integral ao Método de Exaustão, utilizado por dois grandes matemáticos gregos que serão citados para construção de nosso cenário histórico. O criador do método, Eudoxo (408-355 a.C.), trabalhou com a medição de áreas de curvas via aproximação por polígonos. O Axioma de Eudoxo, por exemplo, foi base para mostrar que a área de dois círculos estão um para o outro na mesma proporção dos quadrados de seus diâmetros (Coelho, 2012, p.10). O Axioma de Eudoxo está abaixo descrito:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se uma parte não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (Coelho, 2012, p.10)

A ideia do método de exaustão, usado para a prova dita no primeiro parágrafo, se desenvolve da seguinte maneira: Sejam dois círculos c e C. Seja c de área a e diâmetro d, enquanto C possui área A e diâmetro D.

Por absurdo, suponha que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ de modo que exista, então, $a^* < a$, em que $a - a^* > 0$ e $\frac{a^*}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ para esse a^*.

Construamos polígonos regulares de área p_n e P_n inscritos nos círculos c e C, respectivamente. Para uma abordagem inicial para esse problema, pensamos nos quadrados como os menores polígonos inscritos no círculo e, conforme n aumenta, teremos um pentágono, hexágono, heptágono...

Fazendo esse processo continuamente, pelo Axioma de Eudoxo, para um dado p_N:

$$0 < a - p_N < \varepsilon < a - a^*$$

Em que p_N, sendo N determinado número de lados da sequência de polígonos p_n, é maior que a^* e, por isso mesmo, temos que a diferença entre as áreas forma a desigualdade $a - p_N < a - a^*$.

Mas, como já vimos, $\frac{a^*}{A} = \frac{d^2}{D^2}$, então para algum $A^* < A$ e para um correspondente polígono em C de área P_N e de tantos lados quanto for N, temos:

$$\frac{p_N}{P_N} = \frac{a^*}{A}$$

Para o qual, sendo $p_n > a^*$, temos $P_N > A$, o que é um absurdo. Analogamente, provamos que supondo $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$, chegamos a um absurdo e, portanto, resta que $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

O método de exaustão foi também usado por Arquimedes, que fez a quadratura de um segmento de parábola, demonstrando que a área de um segmento parabólico é

quatro terços da área de um triângulo inscrito nessa secção, com vértices nos extremos do segmento parabólico.

Mais adiante no tempo, Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1723), atuando com inspiração no método de Arquimedes, fizeram a base do cálculo integral, a eles sendo atribuído a criação do cálculo diferencial. E então, a integral, por conta do Teorema Fundamental do Cálculo, esteve em grande período vista em sentido descritivo como uma antiderivada (Coelho, 2012, p.15). Em seções posteriores, esse teorema será apresentado com mais requinte, com a devida formalização.

Embora os matemáticos já estivessem fazendo uso do Teorema Fundamental do Cálculo, foi Cauchy (1789-1857) quem demonstrou o teorema. Cauchy foi uma figura muito importante para o estudo da integração, foi ele quem propôs a integral para além da noção de antiderivação, tendo, em 1893, formulado uma definição de integral com a utilização da ideia de limite tal qual hoje nós a temos.

Como podemos ver em Coelho (2012, p,18), Cauchy iniciou com um função genérica f definida em $[a, b]$, estabelecendo uma soma:

$$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + ... + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

Em que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Assim, a integral de Cauchy era definida como o limite da soma S quando a variação $|\Delta x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - x_{i-1}|\}$ tendia a zero, tendo a seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

E, assim, Cauchy verificou que o limite existe quando f é contínua em $[a, b]$. Portanto, a integral, desse modo descrito acima, é calculada.

Vamos definir continuidade a que se refere o parágrafo anterior. Definiremos continuidade conforme Elon (2014). Assim, em linguagem matemática, uma função é contínua se:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

A análise moderna teve grande preocupação em torno das equações integrais. O período foi marcado pela discordância dos matemáticos da época, pois analistas renomados viam estar em voga produções de funções que violavam um ou outro teorema, fazendo com que matemáticos sustentassem seus estudos simplesmente por buscar a queda de tais afirmativas, na construção de contra-exemplos. Essas funções, em geral construídas por estranhas regras de formação, segundo tais analistas, desviavam o olhar de novos matemáticos para a resolução de outras questões importantes vigentes no período.

É nesse momento que Henry Lebesgue (1875-1941), com sua dissertação aceita em 1902, em contramão com ideias estabelecidas academicamente, publica sua repaginação

da teoria da integração. Lebesgue, assim como veremos na construção de um conjunto não mensurável, partiu do problema de medida, questionando falhas em teorias de seu estudo, suplementando sua dissertação em outros matemáticos que também tiveram boas contribuições na teoria de integração, como Camille Jordan (1838-1922) e René Baire (1874-1934).

A integral de Riemann, assim como vemos hoje, teve alcance muito grande e foi ela quem dominou o estudo da integração ao longo do tempo. Mesmo assim, ao fim do século XIX, percebeu-se que não bastava a ideia de uma correspondência de variações lisas. Nesse sentido, surpreendemo-nos com o *Mengenlehre* de Cantor, termo usado para cunhar sua nova teoria matemática dos conjuntos, que apreendeu também essas questões de continuidade, tendo "feito com que os matemáticos percebessem mais claramente que a ideia essencial de funcionalidade deveria ser uma correspondência ponto a ponto ou "aplicação"" (Boyer, 2012, p.415). Cantor se aventurou a traçar noções de teoria da medida, cometendo alguns equívocos que foram depois corrigidos por Émile Borel (1871-1956), outro autor importantíssimo dentro do estudo que fazemos de medida e integral.

É importante dizer que Riemann, dada a integral definida por Cauchy, também já tinha contribuído para abranger mais funções, facilitando para haver menor exigência de integrabilidade. Quando construindo sua teoria de integração, partiu da famosa aproximação da função por retângulos. Vem daí a soma desses retângulos, formando a área aproximada entre o gráfico da função e o eixo das abcissas.

$$A = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + .. + f(x_n)(x_n - x_{n-1})$$

Enfim, em somatório, com o comprimento desses retângulos tendendo a zero, isso para que os retângulos fossem tão curtos em comprimento quanto possíveis e a área tendendo ao valor exato, teríamos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta x|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Em que x_i^* pertence ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Esse limite existe se, e somente se, f é limitada em $[a, b]$ e $\exists \varepsilon, \delta > 0$, além de $\eta > 0$, tal que, para qualquer partição de $[a, b]$ onde $||\Delta x|| = \max(x_i - x_{i-1}) < \eta$, a soma dos comprimentos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ é menor que ε com $\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \geq \delta$.

O critério para a integral de Riemann existir está ligado à soma das oscilações da função. Se a soma das oscilações ponderadas pelo tamanho dos subintervalos tende a zero, então a função é integrável no sentido de Riemann. Segundo Coelho (2012), "uma função f é integrável a Riemann em $[a, b]$ se, e somente se, as grandes oscilações de f são restritas a um "pequeno" conjunto." (Coelho, 2012, p.19)

As ideias de Lebesgue tornaram-se conhecidas principalmente por dois grandes

tratados de sua autoria, *Leçons sur séries trigonométriques* (1903) e *leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904). Embora Lebesgue não gostasse da ideia de fazer generalizações na matemática, assim como dito por Boyer (2012), as ideias revolucionárias de seus tratados indicaram novas generalizações ainda não exploradas pelos matemáticos. Mesmo com essas contribuições, o estudo de medida e integração é excessivamente rico e não é em Lebesgue que se esgotam as formulações de teorias. Após Lebesgue, uma integral bastante conhecida vem a ser a integral de Lebesgue-Stieltjes, produzida pelas ideias de T.J. Stieltjes (1856-1894). (Boyer, 2012, p.417)

Em mesmo contexto, com o avanço da Análise e na Teoria dos Conjuntos, inclusive com intento de construir base para suas formulações no estudo de integral, muitos matemáticos se puseram a estudar o tema da medida e existiram muitas teorias que influenciaram a criação da teoria da medida moderna. Dentre essas, podemos citar medidas de autores que já foram citadas nessa seção, sendo essas a Medida de Jordan e a Medida de Borel. A medida de Lesbegue juntou algumas ideias das teorias já existentes de Jordan e de Borel. Para ilustrar a extensão dessa área e o aperfeiçoamento contínuo das teorias, o exemplo de Stieltjes é bastante adequado, tendo sido um complemento baseado na integral de Lebesgue com menos tempo de publicação. Em termos técnicos que serão claramente definidos ao longo da desta monografia, pode-se dizer o seguinte:

> Primeiramente, definiu-se o análogo ao conteúdo externo, agora como os novos domínios elementares tomados por Borel, o qual foi chamado medida externa. É claro, portanto, que se um conjunto tem conteúdo, este coincide com a medida externa. Em particular, isso vale para todo intervalo. Seja I um intervalo e $E \subset I$ um conjunto com medida externa $\overline{M}$. Lebesgue definiu a medida interna de E como sendo $\underline{M}(E) = c(E) - \overline{M}(I - E)$. (Fossa et al, 2009, p.199)

Considerando o até então instante do texto, de modo que ainda não discutidas estas definições, vamos nos satisfazer com a legenda dos termos. Compete esclarecer que, enquanto $\overline{M}$ denota a medida exterior, $\overline{M}$ diz respeito à medida interior. Por sua vez, $c(E)$ aqui está como a medida exterior de E.

Nas duas seções que se seguem, vamos nos aprofundar na integral de Riemann, para compreendermos e justificarmos o estudo da integral de Lebesgue.

1.2 Limitações da Integral de Riemann

Conforme Pires (2010), o conceito do que hoje chamamos de integral de Riemann foi definido na tese *Ueber die Darstell-barkeit einer Function durn eine Trigonometrische Reih* (Sobre a Possibilidade de Representar uma Função por uma Série Trigonométrica), em 1954, na tese de doutorado de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

A definição da Integral de Riemann auxiliou, em muito, nos problemas que se reduziam a analisar áreas, volumes e comprimentos de curvas. Até Fermat, alguns desses problemas eram vistos como dispendiosos contratempos, tornando-se mais simples com a nova ferramenta.

> Portanto, o estudo da integral de Riemann foi de grande progresso no desenvolvimento da matemática, sendo a primeira definição formal de integral de uma função real em um intervalo da reta real. Não só isso, o teorema fundamental do cálculo é utilizado em diversas áreas tais quais na química, física, engenharias, entre outras mais, sendo relevante para a ciência em geral, auxiliando na resolução de muitos problemas antes insolúveis em razão da até então incapacidade matemática de cálculo. (Oliveira, 2021, p.26)

Não obstante, nas aplicações matemáticas, faz-se necessária a precisão nos fenômenos que estão sendo estudados e a exatidão dos resultados. A definição de integral de Riemann, embora historicamente importante para o desenvolvimento da matemática, apresenta suas deficiências e torna-se inadequada em algumas aplicações e problemas da análise matemática. Nesse contexto, autores importantes tomam a integração por objeto de estudo, fazem suas contribuições e introduzem suas próprias definições de integral, como foi o caso de grandes matemáticos como Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1723), Cauchy (1789-1857), Riemann (1823-1866), Émile Borel (1871-1956) e Camile Jordan (1838-1922), só para citar alguns exemplos.

Um problema comum vem no estudo de curvas no plano, para o qual muitos graduandos são chamados a se voltar logo no início dos estudos de Cálculo. Para calcular, por exemplo, o comprimento L de uma curva cuja representação paramétrica é $r = (x(t), y(t))$, $a < t < b$, com x e y contínuas, utiliza-se a expressão:

$$L = \int_a^b \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

A abordagem clássica da expressão acima se dá pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que expressa a relação que há entre antiderivadas e integrais. A seguir, vamos enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo, sua demonstração pode ser encontrada em Lima (2014, p.137).

Teorema 1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ um função contínua no intervalo I. Podemos fazer as seguintes afirmações, sendo equivalentes, para uma função $F : I \to \mathbb{R}$, concernente à integral de f:*

1. *Existe $a \in I$, para o qual*

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx \tag{1}$$

para todo $b \in I$. Isto posto, para toda a família de primitivas de f, F é chamada integral indefinida de f.

2. *F é primitiva de f, ou seja, $F' = f$ para todo $x \in I$.*

Temos casos para os quais o uso da relação (1) não é possível por questões técnicas ligadas à continuidade ou à derivabilidade, que é justamente ao que nos referíamos com variações lisas na seção anterior. Nesses casos, revisitar a modelagem da parametrização pode nos auxiliar, e assim, buscamos outras funções que expressem as curvas pretendidas. Nesse processo, devemos corrigir as integrais que virão com as mudanças.

Agora vejamos o seguinte caso: Considere uma sequência f_n de funções contínuas, não crescentes e limitadas em $[0, 1]$, tais que $f_n \to f$. Na integral de Riemann, se a sequência convergir uniformemente é garantido que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

O fenômeno descrito em (2) é garantido pela convergência uniforme, mas se a convergência não tem esse modal, a passagem do limite pelo sinal de integral pode não ser um fato imediato. Embora para uma convergência uniforme seja bem simples chegarmos a um consenso de limite, se não usarmos o conceito de convergência uniforme, porém, temos mudanças sutis das quais podem transformar isso em um problema bem diferente.

Para garantir a compreensão do fato presente no parágrafo anterior, cabe destacar o que vêm a ser convergência simples e convergência uniforme para uma função. Dizemos que uma sequência de funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a sequência $f_1, f_2, ..., f_n$ converge para f, isto é, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e, então, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Esse fenômeno também é chamado de convergência pontual. Segundo Reséndiz (2021), chamamos esse f de função limite do limite da sucessão f_n e $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. (Reséndiz, 2021, p.15)

Note que para a convergência simples foi dado x. Sobre a convergência uniforme, dizemos que a sequência f_n converge uniformemente para f quando, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, com $n > n_0$, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ **para qualquer** $x \in X$.

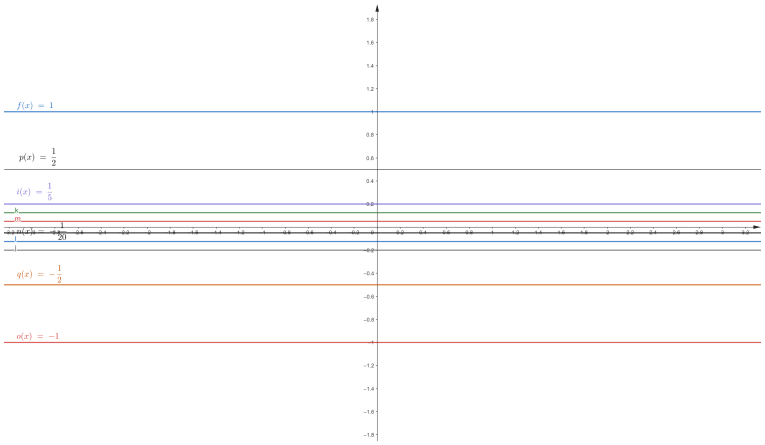
Exemplo 1. *A sequência de funções $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ converge uniformemente para $f(x) = 0$. Para $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, de modo que converge pontualmente. Dado $\varepsilon > 0$, para que a convergência seja uniforme, devemos ter $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, em que $\exists n_0$, $n > n_0$. Assim,*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Concluindo, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n > n_0$*. A sequência de funções converge uniformemente.*

A figura a seguir ilustra as sequências se aproximando conforme aumentamos o valor de n*.*

Figura 4 - Convergência em sequência de funções



Fonte: Elaborado pelo autor.

A sequência $f_n(x) = x^n$*,* $x \in [0, 1]$*, também converge uniformemente para* $f(x) = 0$*. Para* $0 \leq x < 1$*, temos* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ *e, para* $x = 1$*, temos que, para qualquer* n*,* $\lim_{n\to\infty} x^n \to 1$*. Assim,* f_n *converge pontualmente para a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Para $0 \leq x < 1$*,* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$*. Assim,* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow x^n < \varepsilon$*, com* $x^n \to 0$ *para todo* $x \in [0, 1)$ *e* $n > n_0$ *suficientemente grande.*

Para $x = 1$*,* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |1^n - 1| < \varepsilon$ *e, para qualquer valor de* n*, temos* $|1^n - 1| = 0 < \epsilon$*.*

Portanto, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *para todo* $x \in [0, 1]$*, a sequência de funções converge uniformemente.*

A passagem do limite pela integral torna a integral de Riemann inadequada para algumas aplicações. No exemplo a seguir, destacamos um caso onde a comutabilidade em (2) não ocorre.

Exemplo 2. *Considere* $f_n(x) = 2nx(1 - x^2)^n$*,* $x \in [0, 1]$*, uma sequência de funções definidas em* $[0, 1]$*. Vejamos que* f_n *não converge uniformemente.*

Derivando a função, temos $f_n' = 2n\left((1 - x^2)^n - 2nx^2\ (1 - x^2)^{n-1}\right)$*. A função* f_n' *se anula nos pontos* $x = 1$ *e em* $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2n}}$*, assim, são pontos de divergência. Veja, aplicando o valor* x_n *na função:*

$$f_n(x_n) = 2n\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2n}}^2\right)^n = \sqrt{2n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n$$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = \sqrt{2n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n$$

Quando $n \to \infty$, temos $f_n(x_n) \to \infty$. Portanto, está provado que f_n não converge uniformemente. Façamos sua integral.

A integral de qualquer uma dessas funções pode ser feita pela substituição $u = 1 - x^2$.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(2nx(1-x^2)^n\right)dx = \int_0^1 nu^n du = \frac{n}{n+1}.$$

Disso segue que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Como o fato $x \in (0,1)$ implica que $0 < (1-x^2) < 1$, temos que $f_n(x) \xrightarrow{n} 0$. Dessa forma, vemos que

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Por problemas como esse, a análise real passou por uma mudança bem grande, havia uma ideia de que as grandes funções da análise eram, em maior parte, contínuas, possuíam derivadas em grande parte de seu domínio e eram também integráveis pelos métodos básicos de integração. Isso, conforme Stein e Shakarchi (2009), começou a mudar a partir de 1870, com vários exemplos de problemas aos quais contradizem esses entendimentos de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade das funções.

Um exemplo explícito de função que não é integrável a Riemann é a Função de Dirichlet, que nada mais é que uma função indicadora de racionais em $\mathbb{R}$. A função indicadora de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dada por

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Esse tipo de função será melhor trabalhado na seção de integral. A função de Dirichlet sequer é contínua em algum dos seus pontos. Podemos citar ainda, variações dela, como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

e a função

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na seção que se segue, vamos recordar do método de integração de Riemann, que será utilizado em seções posteriores para demonstrar sua falha diante da integração da função de Dirichlet.

1.3 Integral de Riemann

Dado o intervalo limitado [a,b], para o qual $a = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < ... < \varepsilon_n = b$, geramos, pela partição do intervalo, subintervalos $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}]$ que possuem supremo e ínfimo, e desses intervalos temos somas superiores e inferiores, respectivamente, pelo produto do supremo e ínfimo pelas diferenças entre comprimentos dos subintervalos correspondentes. Para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, vamos definir as seguintes somas:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) M_i \quad \text{e} \quad s = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) m_i$$

Com $M_i = \sup f(x)$ e $m_i = \inf f(x)$, para $\varepsilon_i \leq x \leq \varepsilon_{i-1}$. A ideia por trás dessas somas é calcular, nas menores subdivisões do intervalo, retângulos que somados aproximam a área entre o gráfico da função e o eixo das abcissas.

Assim, definimos a integral superior de Riemann por

$$R\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf S \tag{3}$$

A integral inferior, por sua vez, é

$$R\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup s \tag{4}$$

Se os valores da integral superior e da integral inferior são iguais, dizemos que a função é integrável por Riemann e representamos a integral por: $R\int_a^b f(x)dx$.

Para verificar a integrabilidade por Riemann, segue-se que o seguinte teorema nos é bastante útil:

Teorema 2. *Uma função f limitada é integrável por Riemann se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero. (Gomes, 2008, p.4)*

Exemplo 3.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Assim como definimos os somatórios, sejam as menores subdivisões $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$*, por*

menor que possam ser, haverão números racionais e irracionais. Assim, $M_i = \sup g((\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}]) = 1$ *e* $m_i = \inf g((\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}]) = 0$*. Portanto,*

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}).1 = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}).0 = 0$$

Embora de menor comprimento possível, os intervalos não são constituídos de único ponto, ou seja, $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \neq 0$*. Assim,*

$$1 = \inf S \neq \sup s = 0$$

A função não é Riemann integrável.

Exemplo 4. *Seja* $h(x) = 3$ *uma função constante com* $1 \leq x \leq 7$*.*

Sendo essa uma função constante, tanto para o superior quanto para o valor inferior de $h(x)$ *temos o mesmo valor,* $M_I = m_i = 3$*, para qualquer sistema de intervalos estabelecidos.*

O somatório $\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$*,* $(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \to 0$*, coincide com a medida do intervalo:* $7 - 1 = 6$*.*

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) M_i = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).3 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2).3 + ... = 3.(7 - 1) = 18$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) m_i = 3.(7 - 1) = 18$$

A função é integrável por Riemann e o valor da integral é igual a $\inf S = \sup s = 18$*.*

1.4 A Necessidade de uma Nova Forma de Integração e a integral de Lebesgue

Várias reformulações foram feitas a partir da integral de Riemann, essas reunidas sob às Somas de Darboux. Foi Darboux que apresentou as integrais superior e inferior de Riemann que veremos mais adiante nesta monografia. Dentre as posteriores definições de integração que se estabeleceram de forma alternativa a Riemann, nos deparamos também com a integral de Lebesgue.

Henri Lebesgue (1875-1941), vendo a necessidade de integrar séries de funções, lidar com espaços de funções e desenvolver uma teoria da probabilidade, buscou, em

1904, definir em seu trabalho uma integral que admitisse teoremas de convergência mais gerais. Uma diferença que torna especial a teoria de integração definida por Lebesgue é ser definida sobre mais funções do que podemos verificar na integral de Riemann.

O problema que vimos na seção anterior, da comutatividade do limite com a integral não ser garantida em convergências não uniformes, é superado em Lebesgue.

A integral de Riemann era consolidada entre os matemáticos quando Lebesgue publicou sua teoria, o que fez com que a integral de Lebesgue fosse inicialmente criticada. A despeito disso, veio a ser a primeira tentativa bem-sucedida de organização matemática de integração. A teoria de integração, falando em funções não integráveis por Riemann, hoje é bastante aplicada nas áreas da "Teoria da Probabilidade, Finanças, Equações Diferenciais e entre outras." (Pires, 2010, p.10)

Além dos conceitos básicos da física, facilmente reconhecidos como medidas (comprimento, área e volume), conceitos importantes que são medidas, são a massa e a carga elétrica, que são concentradas em pontos ou espalham-se pelo espaço. Assim, mensurando a massa, o centro de gravidade de um corpo pode ser medido pela integral de uma função vetorial. Na estatística, quando integramos funções de domínio situadas em coleções de conjuntos disjuntos que formam o espaço amostral $\Omega \in S$ de um caso, temos o valor da média. Pelas integrais das funções probabilidades, calculamos a probabilidade de x pertencer a S, entendendo que a função integral $\mu(\Omega) = 1$ e, quando $S = \Omega$, temos probabilidade igual a $1 = 100\%$. Em 1933, Kolmogorov reformulou a teoria da probabilidade sob a integral de Lebesgue. (Isnard, 2018, p.7)

As possibilidades que se abrem com a integral de Lebesgue se devem muito à medida de Lebesgue, que será mais à frente definida. Também, a ideia de proceder da integral de Lebesgue vem a ser um caminho oposto ao que veremos em Riemann, ao invés de partições no domínio, divide-se o contra-domínio em subintervalos sobremaneira pequenos e desses procuramos a medida dos referentes conjuntos de pontos relativos no domínio. Lebesgue faz uma interessantíssima analogia sobre a ideia de sua integral e a integral de Riemann: Para o comerciante saber o valor em caixa, deveria somar as moedas que lá estavam. Ao contar o dinheiro com a ideia de Riemann, o comerciante retiraria e pôr-se-ia a contar moeda a moeda em sua mão. Lebesgue, por outro lado, agruparia as moedas por suas grandezas para então contá-las. (Pires, 2010)

O referencial teórico desta monografia se deterá em questões técnicas apropriadas ligadas à construção da medida de Lebesgue, e das integrais deste e de Riemann. A introdução da Integral de Lebesgue para a Licenciatura em Matemática, como definiremos em nossa meta principal, passa antes por um entendimento de sua razoabilidade para este público, razão pela qual discorreremos brevemente na próxima seção sobre o conhecimento matemático e sua relação com os(as) licenciandos(as) dessa área.

Formulações alternativas à integral de Riemann serão abordadas brevemente na próxima seção.

1.5 Importância do Conhecimento Matemático

A despeito da importância histórica de alguns aspectos até aqui levantados e do valor do desenvolvimento teórico matemático, cabe aqui discutir por que um(a) estudante da Licenciatura em Matemática estudaria medida e integral de Lebesgue ou quais os benefícios dessa iniciativa. De forma geral, nesta seção trabalharemos com a importância do conhecimento matemático, de modo que não necessariamente direcionamos à Teoria da Medida e/ou à Integral de Lebesgue. Então, disso trataremos nesta seção.

Espera-se não só as habilidades docentes e conhecimentos teóricos educacionais em um(a) licenciando(a) em matemática, mas o conhecimento específico da disciplina que vai lecionar, como bem sedimentam as habilidades que se referem à capacitação para a pesquisa e prosseguimento dos estudos. No Projeto Pedagógico de Curso da Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Brasília (IFB), são tomados como objetivos, entre outros:

> d) Criar e estimular condições e oportunidades que promovam a reflexão teórica e prática sobre a matemática, fazendo uso de novas tecnologias e compreendendo sua formação profissional como processo contínuo, autônomo e permanente. [...] g) Formar professores-pesquisadores capazes de buscar novas alternativas para o ensino de matemática, atuando como agentes multiplicadores das soluções encontradas. h) Estimular a continuidade dos estudos no nível de pós-graduação. (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília, 2018, p.16)

Para as metas do curso, são tomados não só os conhecimentos básicos que são postos no ensino regular, mas há também um direcionamento para a matemática de nível superior e a capacitação para uma pós-graduação. Pensando nos objetivos citados, como conteúdo presente, em geral, na pós-graduação em matemática, o contato com a teoria da medida na graduação traria uma introdução e estímulo ao(à) graduando(a) para a pós-graduação.

Qualquer graduação em Matemática tem em seu currículo o componente curricular denominado Análise, primeiro responsável por introduzir ideias e conceitos mais elaborados do mundo do Cálculo como um todo. Nas pesquisas de Moreira et al (2005) ou de Moreira e Vianna (2016), podemos ver, respectivamente, as visões de matemáticos e educadores matemáticos sobre a Análise Real na licenciatura em Matemática. É consenso que a disciplina tem que ser obrigatória e, dentre os diversos argumentos, são defendidos que disciplinas de conceitos e demonstrações, como é o caso, desenvolvem o pensamento matemático, a capacidade de analisar problemas e de resolvê-los. Outrossim, para disciplinas com uma matemática mais teórica, como a Análise, alguns autores compreendem "sua importância na medida em que saber demonstrar teoremas é uma habilidade esperada de

um professor de matemática" (Moreira et al, 2005, p.22).

Por meio da influência de Aristóteles, no início da implementação de uma educação formal, nas universidades medievais, o professor era tido como mestre na área de conhecimento que lecionava, não dando tanta importância para os conhecimentos próprios da pedagogia, de como ele havia de ensinar o que sabia, contudo sobremaneira valorizava-se o seu conhecimento puro teórico (Shulman, 1986, p.6). Porém, na educação moderna, entende-se que é imprescindível ao professor, seja qual for sua área de atuação, se dedicar ao conhecimento pedagógico e didático. Shulman (1986) defende que não basta saber aplicar, mas entender o porquê e como se faz o que é, ou seja, saber construir racionalmente o conteúdo que está sendo ensinado.

> Esperamos que o assunto de conhecimento do professor seja no mínimo igual ao de seu colega leigo, o mero especialista do assunto. O professor precisa não apenas saber o que algo é; o professor precisa saber porquê é assim, em que bases pode ser garantidamente afirmado, e em que circunstâncias ou crenças em suas justificativas pode ser enfraquecida ou até mesmo negada. (Shulman, 1986, p.9, tradução nossa) [1]

Naturalmente, há um debate amplo sobre a importância de determinados componentes curriculares técnicos para a Licenciatura, bem como sobre seu uso na prática escolar pelo professor. Do mesmo modo que há quem defenda um conhecimento mais próximo ao bacharelado, pesa a visão de que devemos nos manter focados na matemática ensinada nas escolas. A dualidade da questão fica bem resumida a seguir.

> É consenso que não basta ao professor conhecer a matemática que o aluno aprende na escola, a docência demanda um conhecimento profissional que vai muito além. Mas é claro, também, que a caracterização do lugar da matemática na licenciatura é função [...] da matemática escolar de hoje. (Moreira e Ferreira, 2013, p.1002)

Nesta Pesquisa, defendemos a necessidade de promover o pensamento matemático e o conhecimento aprofundado mesmo para aqueles que não buscam conviver com a matemática acadêmica e, entendemos, que ofertar para esses cursos um conhecimento de tamanha importância como a Teoria da Medida contribuiria para os futuros formados. Sobre a possível abordagem de Lebesgue nas graduações, haja visto o que já foi dito até aqui, em concordância ao que defende-se nessa monografia, Corrêa e Brandemberg (2023) afirmam que:

[1] We expect that the subject matter content understanding of the teacher be at least equal to that of his or her lay colleague, the mere subject matter major. The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied.

> O estudo de processos avançados de integração como o de Lebesgue, oferece aos discentes da graduação um primeiro contato com a integral que é utilizada como padrão atual em cursos de pós-graduação e na pesquisa matemática, abrindo novos caminhos para futuros pesquisadores, uma vez que, na última década foram produzidos vários trabalhos de conclusão de curso envolvendo esta temática, sendo produções de participantes dos projetos de iniciação científica que visam cursar pós-graduação em Matemática. (Corrêa e Brandemberg, 2023, p.24)

Para além do trabalho supracitado, não encontramos outras contribuições recentes ou significantes que se debruçam sobre a construção de um material introdutório da Integral de Lebesgue para a Licenciatura em Matemática. Mesmo Corrêa e Brandemberg (2023) apenas acenam para um suposto artigo em desenvolvimento. Dessa forma, motivanos também a possibilidade de disseminar melhor o tema entre estudantes de graduação. Em Maekawa (2022) e Silva (2019), temos trabalhos de conclusão de curso que fazem uma introdução a teoria da medida para o bacharelado em matemática, mas enfatizamos que não são materiais voltados a Licenciatura em Matemática como público alvo, recordando também do teor didático-aplicado que pretendemos ter nesta monografia.

Pensando tanto no processo de graduação quanto seu futuro profissional em um contínuo processo de aprendizado, em questão de contribuição acadêmica para a área de atuação, mostra-se necessário que haja um profundo conhecimento do objeto de estudo para que empreendam-se pesquisas. Para modelar problemas da realidade, temos que entender a aplicação de dado conteúdo naquele cenário, por isso, ao tratar de exemplificar problemas da realidade, torna-se imprescindível possuir conhecimento mais profundo do que pretende-se abordar. (Shulman, 1986, p.6)

> Para conduzir um pedaço de pesquisa, o estudioso precisa necessariamente estreitar seu escopo, focar suas vistas, e formular uma questão de longe menos complexa quanto o mundo por si mesmo apresenta na prática. (Shulman, p.6, 1986, tradução nossa) [2]

Acerca da necessidade de conhecimento matemático por parte do Licenciando em Matemática, Santos (2019) fala sobre a importância dos conhecimentos de métrica e medida, entendendo serem incompletos na formação de professores, concluindo que isso gera reflexos negativos até mesmo na Educação Básica.

Analisando os Projetos Pedagógicos de Curso de cinco instituições de ensino superior no Distrito Federal, Santos (2019) conclui que esses documentos permitem que os conteúdos sejam abordados de maneira funcional, permitindo que durante sua formação,

[2]To conduct a piece of research, scholars must necessarily narrow their scope, focus their view, and formulate a question far less complex than the form in which the world presents itself in practice.

os Licenciandos possam não ter contato com suas definições. Esses conteúdos apareceram tangenciados na aplicação geométrica destes.

Além disso, o material resultante da pesquisa vem a ter sentido também nas habilidades e reflexões que teremos com o estudo da Teoria da Medida e a Integral de Lebesgue, reincidindo em salientar que não se defende como necessário o conteúdo para o licenciando em matemática. Compreende-se, inclusive, que o conhecimento matemático não é em nenhuma circunstância demais a um professor de matemática, mas, para o saber docente, para aquele que busca a prática de ensino, há de se "dar conta da complexidade da prática e dos saberes didático-pedagógicos" (Rocha, 2005, p.51). Estes criando laços entre o estudo da matemática e pensando no seu desenvolvimento didático-pedagógico. Apontando a pesquisa de Passos (2004), segundo Rocha (2005):

> Um outro aspecto levantado pelo estudo é que a formação dos formadores de professores de Matemática deixa a desejar em relação ao domínio didático-pedagógico e curricular do conteúdo para o ensino da Matemática na escola básica, ficando restrito ao conhecimento do conteúdo em si. (Rocha, 2005, p.51)

Sobre o autor citado anteriormente nessa seção, bem como nos diz Rocha (2005), Shulman (1986) entende os saberes do docente em domínios dos quais, além do conhecimento do conteúdo, há o conhecimento do conteúdo no ensino e o conhecimento pedagógico. Esse conteúdo, que ele entende ter que ir além do que é ensinado, tem que se envolver também em uma compreensão do conhecimento com seu desenvolvimento histórico e filosófico. Rocha (2005), acrescenta que concorda com Shulman na importância do conteúdo e, para o professor, há de ser necessário "também que, além de ter o conhecimento do conteúdo sobre o ensino, o professor seja capaz de abordar esse conteúdo de forma que o torne compreensível ao aluno" (Rocha, 2005, p.60).

As demonstrações presentes nesta monografia coincidem com o que vem sendo discutido nesta subseção. É indiscutível a exigência do saber das provas e demonstrações para o matemático puro, mas não por isso deixamos de ver resquícios de sugestão do trabalho com demonstração pelo professor de matemática. Almouloud et al (2008), citam um trecho do Parâmetro Curricular Nacional (Brasil, 1998), que integra, inclusive, a demonstração como parte do currículo tanto do ensino fundamental quanto do médio:

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (Ibid., p. 71) (Almouloud et al, 2008, p.219)

A habilidade de demonstrar é requisito aos que desejam seguir uma pós-graduação em matemática e, ademais, demonstrações podem ser recorrentes em algumas disciplinas dos cursos de licenciatura em matemática. Na leitura, retenção e entrega às asserções desse material, é que esperamos um desenvolvimento matemático do leitor. Pois, assim como em problemas matemáticos, como indica Polya (1975) para a resolução de problemas, devemos procurar nossos "conhecimentos anteriormente adquiridos" e "pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes" (Polya, 1975, p.26). Essa progressão natural é algo desejado para estudar qualquer conteúdo matemático e esse material não vem a ser diferente.

Polya (1975) chama de "problemas de demonstração" esses problemas matemáticos em que devemos fazer processos lógicos para provar certas asserções. Do mesmo modo que entende necessárias algumas percepções para que haja formulação de uma solução para problema qualquer, os problemas de demonstração pedem certa carga daquele que o busca provar, procurando outros enunciados em que hajam semelhanças de conclusão ou mesmo objetivos que possam ser comparados, que tenham o mesmo tipo.

Nos referindo à necessidade dos conhecimentos anteriormente adquiridos para a construção do saber matemático e os problemas de demonstração, falamos do método dedutivo, um processo cujo resultado se obtém de múltiplas premissas verdadeiras, as quais em conjunto conduzem, em concordância entre si, também para uma verdade. O método dedutivo é constante forma de construção de pensamento utilizado na matemática, compreendemos ser um processo possidente para construir verdades matemáticas.

Segundo Silva e Santos (2022), "as estruturas lógico-matemáticas, quase sempre, são resultantes de coordenações de estruturas mais simples que se assimilam mutuamente para construir uma estrutura mais complexa" (Silva; Santos, 2022, p.6). Concordando com as ideias de desenvolvimento cognitivo de Piaget, ao qual entende que há uma conexão entre conteúdos, e a fusão de conhecimentos já obtidos infundem na criação de um novo objeto de conhecimento. Silva e Santos (2022), citam Piaget (1959), que discorre da assimilação dedutiva:

> [...] a acomodação à experiência e a assimilação dedutivas alternam...em um movimento cujo ritmo pode variar, mas cujo caráter cíclico atesta uma correlação sempre mais estreita entre os dois termos. A propósito, é sobre a pressão da necessidade (portanto do esquema principal de assimilação) e dos esquemas ensaiados como meios iniciais, que a acomodação tateante dedica-se à busca de novos meios e que chega à constituição de novos esquemas suscetíveis de se coordenarem com antigos. (Piaget, 1959, p. 37, grifo nosso) (Silva; Santos, 2022, p.6)

Antes de estabelecer formalmente os objetivos traçados para a pesquisa, ressaltamos não induzir a obrigatoriedade do estudo de medida e/ou integral de Lebesgue para licenciandos em matemática, mas argumentar em como a disposição à esses estudos enriquece as possibilidades e a formação docente de um licenciando em matemática.

Encerramos essa seção esclarecendo que a finalidade dessa monografia será na produção de um material didático, introduzindo a Medida de Lebesgue, apresentando a construção da Integral de Lebesgue e fazendo as devidas ligações com os conteúdos que já acreditamos ser de conhecimento do graduando em matemática, tal como a Integral de Riemann, este sendo o mais desenvolvido nesse quesito, mas também apresentando, por exemplo, alguns conceitos de análise, para mostrar ao leitor a possibilidade de desenvolver esses novos conteúdos com um currículo que pode ser encontrado nos cursos de licenciatura. Em suma, queremos alcançar por resultado um produto educacional, em nosso caso o material didático, que sirva como objeto de aprendizado para estudantes da licenciatura em matemática.

Traçados os objetivos e sendo postas as justificativas para compor a investigação da necessidade de tal pesquisa, discorremos na seção seguinte sobre as metodologias empreendidas nesta pesquisa.

2 METODOLOGIA

O percurso metodológico da pesquisa proposta partiu de uma abordagem exploratória composta de levantamento bibliográfico e pesquisa documental.

A pesquisa documental baseou-se no Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática do IFB, em busca do respaldo documental para a conveniência do trabalho a partir dos objetivos que permeiam a formação inicial dos(as) docentes de Matemática nesta instituição de ensino superior.

O levantamento bibliográfico (também relatado como pesquisa bibliográfica) se concentrou em artigos, monografias e livros, que abordassem o tema do trabalho, incluindo abordagens de história da matemática que complementassem o conhecimento necessário de Teoria da Medida. Esta etapa seguiu diretrizes e entendimentos alinhados com Souza, Oliveira e Alves (2021).

> A pesquisa baseia-se no estudo da teoria já publicada, assim é fundamental que o pesquisador se aproprie no domínio da leitura do conhecimento e sistematize todo o material que está sendo analisado. Na realização da pesquisa bibliográfica o pesquisador tem que ler, refletir e escrever o sobre o que estudou, se dedicar ao estudo para reconstruir a teoria e aprimorar os fundamentos teóricos. (Sousa et al, 2021, p.66)

Desse modo, a obtenção e seleção dos materiais utilizados são importantes para uma pesquisa bibliográfica. Gil (2008) entende que em quase todos os estudos há em menor ou maior grau algum tipo de pesquisa bibliográfica, com levantamentos sobre materiais feitos, tais quais livros e artigos. Outrossim, "algumas pesquisas são desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas" (Gil, 2008, p.50). No caso desta monografia, com exceção da busca pelo Projeto Pedagógico de Curso da Licenciatura em Matemática do IFB, amparou-se na pesquisa bibliográfica. Nesse sentido, os sítios eletrônicos utilizados para recolher os materiais de pesquisa foram o *Google Acadêmico* e o *Portal de Periódicos da Capes*. Os materiais impressos consultados foram, no geral, cedidos pelo orientador, tendo também parte na pesquisa exploratória. Foram empreendidas pesquisas com palavras-chave tais quais: "Teoria da Medida", "Medida de Lebesgue" e "Integral de Lebesgue" para a construção do conteúdo específico matemático; "matemática avançada licenciatura", "análise real licenciatura" e "Lebesgue graduação" para arguir sobre a necessidade de tal material didático, justificando a escolha do tema. Pesquisou-se também materiais publicados em língua inglesa, de modo a expandir os materiais disponíveis, com as palavras-chaves "Lebesgue Measure" e "Measure Theory", o que revelou haver variedade de livros de teor didático abordando o tema de pesquisa.

Levando em consideração as diferentes fontes informacionais, assim como explicitadas em Pizzani et al (2012), e pelo que já exposto, em grande parte desta monografia

foram obtidos materiais sobre o tema em fontes primarias, sendo essas definidas como fontes que “contêm os trabalhos originais com conhecimento original e publicado pela primeira vez pelos autores. São as teses universitárias, livros, relatórios técnicos, artigos em revistas científicas, anais de congressos.” (Pizzani et al, 2012, p.57)

São fontes secundárias os trabalhos que “citam, revisam e interpretam trabalhos originais” (Pizzani et al, 2012, p.58). As fontes terciárias, por sua vez, tem por características os índices categorizados de pesquisas dos outros dois tipos fontes, secundárias e terciárias.

A abordagem exploratória supramencionada serviu à composição do referencial teórico desta monografia, justamente no sentido em que houve grande processo de pesquisa e leitura de materiais que aludissem ao conteúdo com certa abrangência da área de integração e medida. Quando falamos em pesquisa exploratória, o foco vem a ser esclarecer ideias, desenvolver, em tema pouco explorado, hipóteses para estudos posteriores. Segundo, Gil (2008):

> Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis. (GIL, 2008, p. 27)

Corroborando com o processo de pesquisa desta monografia, Gil (2008) diz que, geralmente, em pesquisas exploratórias, ocorre levantamento bibliográfico e documental, havendo a necessidade de haver o esclarecimento e delimitação do tema após esse ter sido escolhido. Em nosso caso, o levantamento bibliográfico serviu, nas etapas precedentes, para a construção adequada de abordagens introdutórias sobre a Medida de Lebesgue e sobre a Integral de Lebesgue, bem como para a elaboração/refinamento de exemplos ilustrativos e comparativos das integrais de Riemann e Lebesgue e de Medidas.

Sobre a pesquisa bibliográfica, Sousa el tal (2021) citam como benefícios da pesquisa bibliográfica o baixo custo da pesquisa e não haver necessidade de deslocar-se para encontrar fontes, levando em consideração as bibliotecas online bem como diversos repositórios de pesquisa acadêmica, tais como utilizados nessa monografia. Entre os pontos negativos, os autores destacam a possibilidade de o pesquisador não analisar de maneira correta as fontes de pesquisa. Escolhendo fontes com dados falsos, ou mesmo não haver, para o tema de escolha da pesquisa, muitas obras publicadas com a abordagem preterida. (Sousa et al, 2021)

Dessa forma, tanto houve a filtragem dos livros por autores, tendo sido utilizados livros consagrados em relação ao tema, quanto os artigos e monografias tiveram suas origens conferidas. No mais, para a escrita do material didático, diversas fontes foram consultadas para um mesmo conteúdo em vários momentos da escrita, isso no que diz

respeito aos enunciados, demonstrações e também dos comentários.

Enquanto alguns dos materiais optavam por tomar uma abordagem com instrumentos da probabilidade para o estudo da medida de Lebesgue, como pode ser visto em Isnard (2018), alguns autores preferiram abordar os mesmos objetos com linguagem e orientação por parte da análise, assim como pode ser visto em Stein e Shakarchi (2009). A monografia se propõe a construir uma vista geral sobre o conteúdo. Por isso, ambas as perspectivas foram levadas em consideração, sendo dosadas e apresentadas conforme acrescentavam para o público-alvo, estudantes de matemática, que devem, com a leitura do material, conseguir empreender o estudo para o qual quaisquer das duas linguagens esteja em maior grau sendo utilizada.

As proposições, corolários, lemas e teoremas que demonstramos servem também como exercícios para o estudo do material didático, podendo, inclusive, haver tentativas por parte do leitor para a reprodução das demonstrações após a leitura ou sem base anterior, como forma de trabalhar as definições, afirmativas e ideias construídas durante o texto.

Acerca das demonstrações realizadas e presentes durante a monografia, optou-se, pelo justificado na subseção 1.5, na demonstração de diferentes enunciados que tanto podem ser compreendidos quanto servir de exercícios ao leitor. Alguns teoremas apresentavam conteúdos que não abordamos no material, por isso apontamos ao leitor onde poderiam ser encontrados, enquanto outros cujas fontes foram citadas, apresentavam uma complexidade a mais ou não houve tempo hábil diante da compreensão de que outras áreas seriam mais interessantes para voltar-se o esforço empreendido. Algumas demonstrações estão no texto, enquanto outras serão passadas ao apêndice, pois tiravam o enfoque de comentários, exemplos ou poderiam segurar o leitor, embora não deveria ser o objetivo em tal momento do texto. Podemos assentar que, no apêndice, foram postas as demonstrações mais complexas ou longas, essas que atrapalhavam a fluidez da leitura e/ou não atribuíam ao entendimento pretendido pela ideia então trabalhada.

Tendo sido explicitadas as premissas e os passos da metodologia em que se desenvolveu esta monografia, passamos então ao desenvolvimento do material.

A terceira seção propõe uma discussão geral sobre medida e a construção da medida de Lebesgue, abordando conceitos fundamentais, desde as coleções de subconjuntos que chamamos de álgebras e σ-álgebras, constituídas por propriedades adequadas para comportar funções medida exterior e, após, pois depende da definição de medida exterior adotada, conceituaremos a medida de Lebesgue. Para definir medida, direcionamos uma discussão pelo Problema da Medida formulado por Lebesgue, iniciando com a medição de conjuntos e buscando aqueles mais próximos possíveis do requisito estabelecido pelo Problema da Medida, com fim último às σ-álgebras. Estudamos estas estruturas visando suas propriedades e verificando, por exemplo, que permitem a transição de medidas de uniões para somas de medidas, aproveitando a união enumerável de subconjuntos.

Definidas essas coleções, ainda na terceira seção, transitamos da ideia de Medida Geral para a Medida de Lebesgue, formando o par conjunto e *sigma*-álgebra, que será nosso Espaço Mensurável. Procedendo à definição de Espaço Mensurável, teremos o Espaço de Medida em que será inserida a função medida. Assim, a Medida Exterior de Lebesgue pode ser enunciada e, com base na Medida Exterior restrita a um Espaço de Medida, obtemos a Medida de Lebesgue.

A subseção 3.5 estabelece uma ligação entre os conceitos de mensurabilidade em Lebesgue e mostra alguns resultados que objetivam entender as funções que serão mensuráveis, estas condições necessárias para desenvolver a integração das funções.

Chegando na seção que aborda a integral de Lebesgue, a quarta seção busca construí-la em quatro etapas, isso é, passando pela Integral de Função Simples para a Integral de Funções Limitadas em Conjuntos Mensuráveis e finitos, após para a Integral de Funções Não-negativas e, enfim, definimos a Integral Geral de Lebesgue. Na subseção de função simples, primeiro apresentamos a função indicadora e a integral de uma função indicadora, compreendendo ser este o tipo mais simples de integral. Definindo a integral de função simples em forma canônica, generalizamos a integral para as funções simples em geral.

Nas outras subseções da quarta seção, provamos que para funções limitadas em conjuntos mensuráveis e finitos há uma sequência de funções simples que para ela converge, está auxiliará a integração dessas funções. Assim, enunciamos o Teorema de Convergência Limitada, e teremos o primeiro dos teoremas nomeados de teorema de convergência. O Lema de Fatou fará a ponte para a integração de funções não negativas, estas que diferem da anterior por não precisarem ser limitadas. Dadas algumas propriedades, inclusive a comutabilidade entre o limite e a integral, pelo Teorema da Convergência Monótona, passamos enfim à integral geral de Lebesgue, permitindo a integral de funções negativas com o uso da decomposição de funções em partes positivas e partes negativas, definindo a integral de uma função com ambas essas partes da decomposição. O último resultado, seguido de um exemplo, será o Teorema da Convergência de Lebesgue, concluindo os resultados mais importantes para a Integral Geral de Lebesgue.

Nas considerações finais, discutimos as expectativas iniciais do material didático e quais as considerações após a sua conclusão. Também refletimos acerca do impacto da publicação dessa monografia em relação a novos estudos que podem ser continuados nesse tema e o caminho traçado, quiçá sendo influenciados pelo material produzido.

As referências serão apresentadas ao final, juntamente com os apêndices, assim como foi justificado inicialmente, exibindo algumas demonstrações, além de um apêndice com a construção do Conjunto de Vitalli e a prova de que esse assinala um conjunto não mensurável.

3 A MEDIDA DE LEBESGUE

Para a monografia que se segue, o estudo da Medida foi inicialmente motivado por sua relevância no processo de integração, de forma que algumas palavras sobre tal processo são uma necessidade natural para a compreensão de enfoques e delimitações. Este é o sentido das próximas seções.

O primeiro impulso para que Henri Lebesgue (1975-1941) postulasse sua própria Teoria de Medida, com suas nuances e propriedades específicas, foi sua verificação de que existem conjuntos que não podem ser medidos na reta real (conjuntos não mensuráveis). De forma geral, as impossibilidades de medição de certos conjuntos reforça a importância do estudo da Teoria da Medida.

Jordan, reiterando que a integral de Riemann cumpre seu papel como ferramenta de integração, se preocupou com a medida empregada, constatando a existência de conjuntos para os quais o processo comum de medição da integral de Riemann, em que subdividimos o domínio em partes iguais e então fazemos o somatório das medidas correspondentes, não era suficiente (Santos, 2019). Um exemplo disso vem a ser o conjunto de Cantor, que será objeto de estudo mais à frente.

Para ser capaz de atribuir valores de medida à determinados conjuntos e contornar esse problema quando ocorrer, Lebesgue apresenta sua nova singular medição à maneira de Borel, direcionando seus estudos pelo chamado *Problema da Medida*:

> Problema 1 (Problema de Medida). Pretendemos fixar em cada conjunto fechado uma medida satisfazendo as seguintes propriedades:
>
> 1. Existem conjuntos de medida nula.
> 2. Dois conjuntos iguais tem mesma medida.
> 3. A medida da soma de um número finito ou infinito de conjuntos, aos pares sem pontos comuns, é a soma das medidas desses conjuntos.
>
> Devemos resolver esse problema de medida apenas para os conjuntos que chamamos de mensuráveis. (Lebesgue, 1902, p. 236, APUD Martínez-Adame, 2015, p.64, tradução nossa) [3]

Lebesgue, diante desses traços iniciais, resolveu esse problema de conjunto da seguinte maneira: dado E um conjunto fechado, podemos representar os elementos de E por coleções de intervalos de infinitas maneiras; Sendo E_1 um conjunto de pontos de um desses intervalos, temos que a medida $m(E)$ será em grande parte igual à medida $m(E_1)$.

[3] "Problem 1 (Measure problem). We intend to attach to each bounded set a measure satisfying the following properties:

1. There exist sets of non-zero measure.
2. Two equal sets have the same measure.
3. The measure of the sum of a finite or infinitely countable number of sets, pairwise without common points, is the sum of the measures of these sets.

We shall solve this measure problem only for the sets that we call measurable.

Por fim, gerou-se um conceito bastante importante que estudaremos adiante, que será a medida externa.

A partir disso, nosso objetivo será definir conjuntos mensuráveis de Lebesgue e atribuir valores de medida à esses conjuntos. Serão importantes as definições de Álgebra, σ-álgebra e de Medida Externa de Lebesgue. Veremos que, conforme Fossa et al (2009), a teoria do Conjuntos é excepcionalmente fundamental para a Teoria da Medida de Lebesgue.

3.1 Ideias Gerais Sobre Medida e Extensão de Valores

Esta seção possui conceitos e resultados que podem ser encontrados em Stein e Shakarchi (2007).

Vamos iniciar com a ideia geral de Medida. Para nosso estudo, é conveniente que chamemos de volume as medições em $\mathbb{R}^n$, embora para $n = 2$ temos áreas e, para $n = 1$, comprimentos. A ideia de calcular medida é transformar os conjuntos em uniões de conjuntos simples cuja medida podemos calcular com mais facilidade, utilizando formas geométricas simples que aproximem sua área ou volume. Para $n = 2$ usamos retângulos, para $n = 3$ usamos cubos. Para $\mathbb{R}$, vamos trabalhar com intervalos para medir comprimentos. Em $\mathbb{R}^n$, utilizamos produtos cartesianos de intervalos de $\mathbb{R}$. Fundamentalmente, esses problemas, em duas dimensões, são problemas para os quais seria mais fácil calcular suas medidas.

Dito isto, o que comumente almejaremos nos problemas de medidas que vamos nos envolver é encontrar, para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, um correspondente valor de medida $m(A)$. Em $\mathbb{R}$, pensando em uma medida linear, obtemos a medida do comprimento de um intervalo de extremos b e a, com $a < b$, pela subtração dos termos, ou seja, $m(A) = b - a$. A medida linear se mostrará fundamental na construção da Medida de Lebesgue.

Dispondo dessas ideias gerais, cabe a discussão tomada por Santos (2019) sobre os conceitos de métrica e medida, já que, pretendendo introduzir teoria da medida, cabe entender suas nuances, sabendo que, embora conceitualmente bastante utilizada, inclusive em sentido puramente geométrico, a definição formal de métrica pode ser algo que não esteja nem mesmo no currículo de formação do professor, como a análise empregada pelo referido autor nos mostrar. Primeiro vamos definir métrica, para então falar sobre a diferença de medida. A definição de medida será deixada para as seções posteriores, que aprofundam o tema.

Definição 1. *Chamamos de Métrica sobre um conjunto não vazio $\mathcal{M}$, uma função $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sob a qual, para cada par ordenado $x, y \in \mathcal{M}$, um número $d(x, y)$ é denominado distância de x e y. As seguintes propriedades devem ser satisfeitas em $d(x, y)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{M}$:*

1. $d(x, x) = 0$;

2. *Se* $x \neq y$, *então* $d(x, y) > 0$;

3. $d(x, y) = d(y, x)$;

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Um exemplo de métrica é a própria métrica euclidiana que já estamos acostumados, que relaciona os pontos de um intervalo pelo módulo da subtração dos seus pontos, ou seja, $d(a, b) = |b - a|$.

A medida nos faz associar um conjunto a um valor real ou infinito, ao que denominamos medida do conjunto, já a métrica, como vimos pela definição acima, é uma relação entre elementos de um conjunto, e o valor da métrica vem a ser justamente uma ideia geral de distância entre esses elementos. Podemos ver que os conceitos de Métrica e Medida diferem "entre os objetos em que as funções estão definidas". (Santos, 2019)

Apesar de suas diferenças, a medida coincide em alguns momentos com a métrica, isso quando a medida de um conjunto se faz o mesmo valor da diferença entre os extremos de um intervalo.

Por fim, sobre a medida, problemas de estender classes de conjuntos (ou "aumentar") são básicos da Teoria da Medida. Como estamos falando de medidas, precisamos de subconjuntos estendidos. Assim, estendemos classes de conjuntos de forma tal que, por exemplo, sendo capazes de dar valor à área, possamos medir a área de um retângulo com o comprimento dos lados. Quando falamos de sistema numérico real estendido, estamos falando da reta real estendida $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Observação 1. *Para estender em* $\mathbb{R}^n$ *a noção de medida dos intervalos que fizemos anteriormente, basta notar que um retângulo n-dimensional (por exemplo, fechado) pode ser definido como o produto cartesiano de n intervalos fechados, isto é*

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

À união de retângulos constituídos por conjuntos disjuntos chamamos de quase disjuntos. A união finita de retângulos quase disjuntos é $R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$. *Sua medida nada mais é que* $|R| = \sum_{k=1}^{\mathbb{N}} |R_k|$, *ou* $|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$.

Com os conceitos anteriores, falando sobre a reta real, enfatizamos o seguinte resultado.

Teorema 3. *Todo conjunto aberto A de* $\mathbb{R}$ *pode ser escrito por uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Prova. *Vamos recordar que um conjunto enumerável é assim chamado quando é um conjunto finito ou quando é estabelecida com ele uma relação de bijeção com o conjunto dos naturais, ou seja, dado X um conjunto enumerável, existe $f : \mathbb{N} \to X$ função bijetiva.*

Seja $x \in A$, tenhamos intervalos abertos I_x para os quais $x \in I_x$ e $I_x \subset A$, em que I_x sejam os maiores intervalos com essas atribuições. Dados:

$$a_x = \inf\{a < x : (a, x) \subset A\}$$

e

$$b_x = \sup\{b > x : (x, b) \subset A\}$$

Desse modo, teremos $a_x < x < b_x$. Vamos definir esse intervalo descrito anteriormente como sendo $I_x = (a_x, b_x)$. Assim,

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x$$

Por absurdo, suponha que haja $I_x \neq I_y$ em que I_x e I_y sejam dois intervalos em que $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Sabemos que $I_x \cup I_y \subset A$ e existe $x \in I_x$ tal que $x \in I_y$, de outro modo teríamos $I_x \cap I_y = \emptyset$.

Lembre-se que I_x é um maximal, o escolhemos como o maior termo, então $(I_x \cup I_y) \subset I_x$ e, do mesmo modo, $(I_x \cup I_y) \subset I_y$.

Suponha que $I_x \neq I_y$, $\exists a \in A$ em que $a \in I_x$ e $a \notin I_y$. Se $a \in I_x$, então $a \in (I_x \cup I_y)$ tal que $a \in I_y$, o que contradiz $I_x \neq I_y$. Portanto, $I_x = I_y$.

Assim, para quaisquer I_x e I_y, $I_x \cap I_y = \emptyset$. Quaisquer dois intervalos distintos são disjuntos.

Provemos agora que há intervalos enumeráveis $I_x \subset A$. Desde que todo intervalo aberto I_x contém um número racional, sabendo que o conjunto dos racionais é enumerável, temos que há contáveis intervalos I_x na coleção $\mathcal{I}$. ■

Exemplo 5. *Seja o conjunto $A = (0, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right)$, temos que a união dos intervalos $I_1 = (0, 1)$ e $I_2 = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$ escrevem o conjunto A. Fica evidente que $I_A \cup I_B = (0, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right)$ cobre A.*

Desse modo, podemos medir um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ pelo fato de que ele é uma união enumerável de intervalos abertos, nos valendo das medidas de tais intervalos. Para um conjunto aberto A, sendo $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, em que I_j são intervalos abertos disjuntos, a medida de A é dada por $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$.

Cabe frisar ainda, para efeitos de completa clareza do Teorema 3, o conceito de conjunto enumerável.

Definição 2. *$M \subset \mathbb{R}$ é um conjunto enumerável se existe uma bijeção $f : M \to \mathbb{N}$.*

Exemplo 6. *O Conjunto $M = 2\mathbb{N}$, representado pelos números pares $2, 4, ...$ forma uma bijeção com os naturais,*

$$\begin{array}{rl} f: & 2\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \\ & x \mapsto \dfrac{x}{2} \end{array} .$$

Portanto, $M = 2\mathbb{N}$ é enumerável.

Exemplo 7. *Do mesmo modo que o exemplo anterior, o conjunto dos inteiros é enumerável. $M = \mathbb{Z}$ forma uma bijeção $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } x \geq 0 \\ -2x - 1 & , \text{ se } x < 0 \end{cases} .$$

O conjunto dos racionais, tal qual o conjunto dos inteiros, é um conjunto enumerável e esse fato aparecerá na demonstração do teorema 3, assim como analisando a função de Dirichlet e a função indicadora dos racionais, mais à frente do texto.

Essa abordagem preliminar sobre como medir conjuntos ilustra que precisamos de certas propriedades funcionando em um conjunto para que ele venha a ser medido. De fato, na próxima subseção, conheceremos coleções de subconjuntos que serão os domínios naturais para uma medida qualquer.

Todos os conjuntos abertos, bem como todos os conjuntos fechados são mensuráveis em Lebesgue. Já tendo visto os conjuntos abertos, vamos determinar um caminho para os conjuntos fechados como veremos na seção de medida exterior e medida de Lebesgue. Para isso, convém definir cobertura.

Em linguagem simplificada, uma cobertura de um conjunto A é uma coleção de conjuntos cuja união inclui A como subconjunto, ou seja, uma união de conjuntos que contém A. Formalmente, a definição a seguir estabelece o conceito.

Definição 3. *Seja $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathcal{C} = \{I_n, n \in \tau\}$ uma família indexada de conjuntos. Dizemos que a coleção $\mathcal{C}$ é uma **cobertura** de A se $A \subset \bigcup_{n \in \tau} I_n$.*

Observação 2. *Sobre as coberturas na Definição 3:*

- *Se cada I_n é aberto, a cobertura é dita **aberta**;*
- *Se τ é uma coleção enumerável de índices, a cobertura é dita **enumerável**;*
- *Se a família $\mathcal{C}$ é finita, a cobertura é finita.*

Exemplo 8. *A coleção de conjuntos* $A = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ *e* $(n, n+1) \in \mathbb{R}$ *é uma cobertura de* $\mathbb{R}$*, já que* $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1)$.

Exemplo 9. *O conjunto* $B = \left\{ \left[\frac{1}{n}, 1\right] : n \in \mathbb{Z} \right\}$ *é uma cobertura do conjunto finito* $[0, 1]$.

Definido o que é cobertura, vamos definir medida nula, tendo sido referenciada no Problema de Medida, como foi enunciado no início dessa seção, bem como será utilizada em diversas ocasiões futuras durante o texto.

Definição 4. *Dizemos que* $X \subset \mathbb{R}$ *tem medida nula quando, dado* $\varepsilon > 0$*, o conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *tem uma cobertura finita ou infinita enumerável* $\mathcal{C} = I_k$*,* $X \subset \bigcup I_k$*, em que* I_k *são intervalos abertos para os quais a soma de seus comprimentos será* $\sum |I_k| < \varepsilon$.

Por fim, para finalizarmos essa seção, apresentamos o seguinte teorema, que será importante para falarmos de medida e em demonstração futura.

Teorema 4. *(Heine-Borel) Se* A *é um conjunto fechado e limitado pertencente aos números reais, então para qualquer cobertura aberta de* A *há uma subcobertura finita de* A*. Desse modo, seja* $\mathcal{C}$ *uma cobertura tal que* $A \subset \bigcup \{E : E \in \mathcal{B}\}$*, temos uma coleção finita de subconjuntos* $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$*,* $E \in \mathcal{B}$*, em que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em Royden (1998, p.44). O Teorema garante que, dentro das condições estabelecidas, dado um conjunto limitado e fechado, há uma coleção que cobre e permite sua expressão pelo mesmo. Seguimos, agora com maior liberdade de manifestar relações com coleções, para definir σ-álgebras, sendo estas coleções de subconjuntos essenciais para filtrar espaços mensuráveis, garantindo rigor em suas propriedades operacionais.

3.2 Sigma Álgebra e Espaço Mensurável

Os conceitos e resultados desta subseção podem ser encontrados em Sena (2019).

As álgebras e σ-álgebras são coleções de subconjuntos com especial importância, pois suas propriedades possibilitam o bom funcionamento de medidas, à semelhança da medida comprimento que citamos na subseção anterior. A seguir, vamos definir essas duas famílias de subconjuntos.

Definição 5. *Seja* X *um conjunto qualquer. Uma coleção* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *de subconjuntos é uma Álgebra de* X *se:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2. $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$;

3. $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^{k} B_i \in \mathcal{A}$.

A operação de complementação é assim definida: $B^{\mathsf{C}} = \{a \in X; a \notin B\}$. Além disso, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X, em que

$$\mathcal{P}(X) = \{X : X \text{ é um subconjunto de A}\}.$$

Exemplo 10. *Considere $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}$ a coleção de subconjuntos de X que são finitos ou que tem complementar finito. Neste caso, $\mathcal{A}$ é uma Álgebra de subconjuntos de X.*

- *$\emptyset$ é um conjunto finito por definição, logo está em $\mathcal{A}$.*
- *Se $B \in \mathcal{A}$ é finito (infinito), então B^{C} é infinito (finito). Dessa forma, $B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ por ter complementar finito ou por ele mesmo ser finito.*
- *Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_k$ subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, isto é, elementos de $\mathcal{A}$. $D = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ ainda é finito, pois do contrário algum elemento de D estaria fora de todos os $B_i's$, um absurdo. Logo, $D \in \mathcal{A}$. Se cada um dos $B_i's$ tiver complementar finito, note que $D^{\mathsf{C}} = \bigcap_{i=1}^{k} D^{\mathsf{C}}$ é um conjunto finito por ser intersecção de conjuntos finitos, logo $D \in \mathcal{A}$ porque seu complementar é finito.*

Em linguagem menos notacional, podemos dizer que uma Álgebra é uma coleção de subconjuntos que contém o vazio, é fechada para complementação e também é fechada para uniões finitas.

Um tipo de coleção de subconjuntos menos restritiva, e mais conveniente para nossos propósitos, é a chamada σ-álgebra, cuja definição estabelecemos a seguir.

Definição 6. *Seja X um conjunto qualquer. Uma coleção $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos é chamada de σ-álgebra se satisfaz as seguintes propriedades.*

1. $\emptyset \in A$;

2. $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$;

3. $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$.

Exemplo 11. *Seja $X = \{1, 2, 3\}$, a coleção $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ não é uma σ-álgebra. O vazio está nela, bem como seu complementar, X. Do mesmo modo, os complementares dos conjuntos $\{1\}, \{2\}\{1, 3\}, \{2, 3\}$ todos pertencem à coleção. A terceira propriedade, entretanto, não é satisfeita. Reparamos que $\{1\} \cup \{2\}$ não pertence à $\mathcal{A}$.*

Portanto, a única diferença entre uma álgebra e uma σ-álgebra é o fato de que a segunda coleção é fechada para uniões enumeráveis em geral, não apenas uniões finitas. Assim, resta claro que toda σ-álgebra é também uma álgebra.

A coleção do Exemplo 10 não é uma σ-álgebra, pois $B_i = \{x_i\} \in \mathcal{A}$ para cada $x_i \in 2\mathbb{N}$ mas $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = 2\mathbb{N}$ não é um conjunto finito e nem tem complementar finito, razão pela qual não está em $\mathcal{A}$.

Observação 3. *Aqui estão reunidos alguns fatos relevantes sobre as coleções supracitadas.*

1. *Seja qual for o conjunto X, há duas coleções que sempre formam uma σ-álgebra.*
   - *(a)* $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.
   - *(b)* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, *o conjunto das partes de* X.
2. *A intersecção de uma família de σ-álgebras ainda é uma σ-álgebra (isso falha para a união!). (Magalhães, 2004, p.5)*
   - *(a) Se $E \subset X$, definimos como* ***σ-álgebra gerada por E*** *à intersecção de todas as σ-álgebras que contém E.*

$$\sigma(E) = \left\{ \bigcap_i \sigma_i \ ; \ \sigma_i \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ que contém } E \right\}.$$

   Usando a definição de σ-álgebra, podemos perceber que

$$\sigma(E) = \{\emptyset, X, E, E^{\mathsf{C}}\}.$$

   - *(b) No caso em que $X = \mathbb{R}$, a menor σ-álgebra que contém todos os conjuntos abertos de X é chamada de* ***σ-álgebra de Borel*** *ou simplesmente* ***Borelianos****.*

A Definição 6 implica em algumas propriedades imediatas, resumidas na próxima Preposição. Antes do enunciado, convém pontuar que

$$A \setminus B = \{a \in X; a \in A \text{ e } a \notin B\},$$

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Proposição 1. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos qualquer e suponha que $A, B \in \mathcal{A}$. Então:*

1. $A \cup B \in \mathcal{A}$ *(fechamento para união);*
2. $A \cap B \in \mathcal{A}$ *(fechamento para intersecção);*

3. $(A \setminus B) \in \mathcal{A}$ *(fechamento para o complementar relativo);*

4. $(A \triangle B) \in \mathcal{A}$ *(fechamento para diferença simétrica).*

Prova.

1. Recordemos que toda σ*-álgebra é uma álgebra. Pela definição de álgebra, a união de finitos conjuntos pertencentes a álgebra pertence também a álgebra. Desse modo,* $A \cup B \in \mathcal{A}$ *segue diretamente da definição de álgebra.*

2. Por hipótese, $A, B \in \mathcal{A}$*. Pela definição de* σ*-álgebra, se* $A \in \mathcal{A}$*, então* $A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ *e, analogamente,* $B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$*. Desse modo,* $A^{\mathsf{C}}, B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ *e* $A \cup B \in \mathcal{A}$*. Pela Lei de De Morgan,* $A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}} = (A \cap B)^{\mathsf{C}}$*. Desse modo, como* $A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}} = (A \cap B)^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$*, concluímos que* $((A \cap B)^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} = A \cap B \in \mathcal{A}$*.*

3. Pela definição de σ*-álgebra, se* $B \in \mathcal{A}$*, então* $B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$*. Pela prova anterior, como* $A, B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$*, temos* $A \cap B^{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ *e, pela Lei de De Morgan,* $A \cap B^{\mathsf{C}} = A \setminus B$*. Portanto,* $A \setminus B \in \mathcal{A}$*.*

4. $A \triangle B = (A \setminus B) U (B \setminus A)$ *e, pela constatação anterior, vimos que a subtração dos termos presentes na* σ*-álgebra também pertencem a* σ*-álgebra, bem como sabemos que a união de* $(A \setminus B)$ *e* $(B \setminus A)$*, pertencendo a* $\mathcal{A}$*, torna verdadeiro que* $(A \setminus B) U (B \setminus A) \in \mathcal{A}$*. O que implica que* $A \triangle B \in \mathcal{A}$*, como queríamos provar.* ■

A partir do conceito de Borelianos, faz-se necessário um rápido esclarecimento sobre sua natureza em $\mathbb{R}$.

Observação 4. *É comum que a* σ*-álgebra dos Borelianos de um conjunto* X *seja descrita por* β_X *ou* $\beta(X)$*. Refletindo sobre o conceito estabelecido na Definição* 6 *e na Observação* 3*, concluímos que* $\beta_{\mathbb{R}}$ *é composta por todos os conjuntos abertos de* $\mathbb{R}$*, pelos complementares deles e pelas uniões e intersecções enumeráveis deles. Assim, essa coleção pode ser gerada por famílias de conjuntos não abertos também. Para citar uma abordagem comum no campo da probabilidade, notamos que o fato*

$$(-\infty, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b + \frac{1}{n} \right)$$

permite-nos geras os Borelianos a partir de intervalos da forma $(-\infty, b]$*. Dessa forma, considerando* $a < b$*, podemos ver que são Borelianos os seguintes tipos de intervalos:*

$$A = (-\infty, b],\ b \in \mathbb{R}$$

$$A^{\mathsf{C}} = (b, +\infty],\ b \in \mathbb{R}$$

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, +\infty)$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right], \; n_0 > \frac{1}{b-a}$$

$$\{a\} = (-\infty, a] \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right)$$

$$[a, b] = \{a\} \cup (a, b]$$

$$[a, b) = \{a\} \cup (a, b)$$

Esta percepção pode induzir uma impressão de que qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ é um Boreliano, isto é, $\beta_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Contudo, é incorreto achar que todo subconjUnto de $\mathbb{R}$ é um boreliano, pois existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não são Borelianos. Esse é o caso do Conjunto de Vitalli, que será estudado posteriormente.

Para efeitos de generalização dos Borelianos em $\mathbb{R}^n$, podemos nos valer das palavras de Stein e Shakarchi (2007):

> O termo **menor** significa que se S é qualquer σ-álgebra que contém todos os conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, então necessariamente $\beta_{\mathbb{R}^n} \subset S$. Desde que nós observemos que qualquer intersecção (não necessariamente contável), de σ-álgebras é novamente uma σ-álgebra, podemos definir $\beta_{\mathbb{R}^n}$ como a intersecção de todas as σ-álgebras que contém os conjuntos abertos. Isso mostra a existência e unicidade de uma σ-álgebra de Borel. (Stein e Shakarchi, 2007, p.44) [4]

Na subseção 4.1, notaremos que a medição de intervalos pode ser um caminho adequado para que se possa medir qualquer conjunto (aberto ou fechado) de $\mathbb{R}$. Ao estabelecermos uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, estamos diante de uma coleção na qual uma ideia genérica de medida pode funcionar adequadamente, pois numa σ-álgebra estão complementares e uniões enumeráveis de conjuntos e, justamente essas operações, são formas simples de se descrever conjuntos em geral. Ao retomarmos ao **Problema da Medida**, notamos que uma boa definição de medida transformará medidas de uniões em somas de medidas, por isso o domínio de uma função que meça conjuntos precisa contemplar uniões enumeráveis (exatamente o que acontece numa σ-álgebra).

[4] The term "smallest" means that if S is any σ-algebra that contains all open sets in $\mathbb{R}^n$, then necessarily $\beta_{\mathbb{R}^n} \subset S$. Since we observe that any intersection (not necessarily countable) of σ-algebras is again a σ-algebra, we may define $\beta_{\mathbb{R}^n}$ as the intersection of all σ-algebras that contain the open sets. This shows the existence and uniqueness of the Borel -algebra. (Stein; Shakarchi, 2007, p.44, tradução nossa)

Definição 7. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. O par $(X, \mathcal{A})$ é chamado de* ***Espaço Mensurável****.*

Um espaço mensurável é, portanto, o ambiente mais propício para definirmos alguma noção de medida que contemple satisfatoriamente as exigências do **Problema da Medida**. Os pares $(X, \mathcal{P}(X))$, $(X, \beta(X))$ e $(X, \{\emptyset, X\})$ formam espaços mensuráveis naturais. Na notação padronizada para espaço mensurável, $(X, \mathcal{A})$, fica estabelecido que $\mathcal{A}$ é, sempre, uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Exemplo 12. *Considere que uma moeda honesta será lançada 2 vezes para a observação da face que sai para cima. Denotando* ***k*** *como cara e* ***c*** *como coroa, o conjunto que descreve as possíveis sequências de resultados é dado por*

$$X = \{(cc), (ck), (kc), (kk)\}$$

Neste caso $\mathcal{P}(X)$ são todos os 16 subconjuntos formados pelos elementos de X. O par $(X, \mathcal{P}(X))$ é um espaço mensurável, isto é, podemos definir alguma forma de medir os conjuntos neste contexto.

A próxima subseção trata da Medida de Lebesgue a partir da definição geral de Medida.

3.3 Medida Exterior e Medida de Lebesgue

Agora que já temos construída uma estrutura matemática adequada para introduzir uma ideia de medida, o espaço de medida, podemos definir formalmente uma medida.

Definição 8. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. A função $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma* ***Medida*** *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$*;*
2. *Se $\{E_n\}$ é uma sequência enumerável de subconjuntos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos, então*
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(E_n).$$

Antes de apresentar algumas propriedades, voltaremos à σ-álgebra, considerando que a medida expressa por somatório está definida em sequências de subconjuntos **dois a dois disjuntos**.

Proposição 2. *Se A_n é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, existem $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $B_n \subset A_n$, $B_n \cap B_m = \emptyset$, para os quais $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.*

Prova. *Vamos definir, para n=1,* $A_1 = B_1$ *e, para* $n > 1$, $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1})$, *de modo que* $B_n \in \mathcal{A}$ *e* $B_n \subset A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $m > n$, $m \in \mathbb{N}$, *temos:*

$$B_n \cap B_m \subset A_n \cap B_m = A_n \cap (A_m \setminus (A_1 \cup ... \cup A_2 \cup .... \cup A_{m-1}))$$

Abrindo os parênteses, pelas operações lógicas que se seguem, temos:

$$B_n \cap B_m \subset A_n \cap B_m = A_n \cap A_m \cap A_1{}^{\mathsf{C}} \cap ... \cap A_n{}^{\mathsf{C}} \cap ... \cap A_{m-1}{}^{\mathsf{C}} = (A_n \cap A_n{}^{\mathsf{C}}) \cap A_m \cap A_1{}^{\mathsf{C}} \cap ... \cap A_{m-1}{}^{\mathsf{C}} = \emptyset$$

Assim, B_n *é uma sequência disjunta e, como a sequência* B_n *é constituída por valores de* A_n, *temos* $B_n \subset A_m$ *e* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Seja $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *logo* $x \in A_{n_0}$ *para algum* $n_0 \geq 1$. *Se* $n_0 = 1$, *então, pela construção da sequência,* $x \in A_1 = B_1$. *Para* $n_0 > 1$, *desde que* $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1})$, *mesmo que hajam dois ou mais conjuntos que possuem x, para o conjunto em que* n_0 *é o menor valor desse índice,* $x \in B_{n_0} = A_{n_0} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n_0-1})$.*Logo,* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. ■

Exemplo 13. *Considere uma sequência* $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$, *para* $n \in \mathbb{N}$.

Essa sequência pode estar contida em uma σ-álgebra, por exemplo, $\mathcal{A} = \{\emptyset, 0, (0,1], (1,2]\}$ *se* $\mathcal{A} \subset (0,2]$, *ou na própria σ-álgebra de Lebesgue em* $\mathbb{R}$.

Verificamos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$. *Vamos definir uma sequência* B_n *tal que*

$$B_1 = A_1 = \left(\frac{1}{1}, 1\right)$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \ \setminus \left(\frac{1}{1}, 1\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$B_3 = A_3 \setminus (A_2 \cup A_1) = \left(\frac{1}{3}, 1\right] \setminus \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

Assim, $B_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ *para* $n > 1$. *Temos* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (0,1]$ *e, então:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1].$$

A proposição 2 embasa que qualquer sequência de conjuntos em uma σ-álgebra

pode ser substituída por outra de iguais elementos, porém configurada em subconjuntos disjuntos. Faz-se então pertinente, pois notamos que pela definição de medida (Definição 8), a função é uma medida satisfazendo a segunda condição por conjuntos disjuntos.

A definição de Medida implica imediatamente nas seguintes propriedades.

Proposição 3. *Seja μ uma medida definida no espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Se $\{E_n\}$ é uma sequência de subconjuntos de $\mathcal{A}$, então $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$.*
3. *Se μ só possui imagens finitas, então $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Prova. *1. Estando A contido em B, $B = (B \setminus A) \cup A$, tal que*

$$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A)$$

Pela definição de medida e, sabendo que toda medida é maior ou igual a zero

$$\mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$$

Assim, $\mu(B) \geq \mu(A)$.

2. Pela proposição 2, sendo A_n uma sequência de subconjuntos de $\mathcal{A}$, há uma sequência B_n de subconjuntos em A, com $B_p \cap B_q \neq \emptyset$, $p \neq q$, ou seja, dois a dois disjuntos, e $B_n \subset A_n$ em que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

Como B_n é uma sequência disjunta de A, pela definição 8,

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$$

Desde que $B_n \subset A_n$, $\sum_{n\geq 1} \mu(B_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ e, portanto:

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

3. Como já vimos na prova da primeira propriedade $\mu(B) = \mu(B \setminus A) \cup A$. Por hipótese, $0 \leq \mu(A) < \infty$, portanto, nos é palpável operar com $\mu(A)$. Ao subtrair os dois lados por $\mu(A)$, temos $\mu((B \setminus A) \cup A) - \mu(A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) - \mu(A) = \mu(B) - \mu(A)$, como queríamos provar. ■

A primeira propriedade é chamada monoticidade da medida, enquanto à segunda chamamos σ-subaditividade. Pela segunda propriedade, observamos que, desde que uma coleção contável de conjuntos cobre E_2, todos esses também cobrem E_1, que está contido em E_2.

Exemplo 14. *Se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ e seja uma função qualquer $f : X \to [0, +\infty)$, f determina uma medida μ pela relação*

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x).$$

Se $f(x) = 1$, $\forall x \in X$, μ é chamada de medida de contagem em X; Se existir $x_0 \in X$ tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in X$ e $x \neq x_0$, chamamos μ de medida de Dirac em x_0 e, para essa medida,

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & se\ x_0 \in E \\ 0 & se\ x_0 \notin E \end{cases}.$$

Esta função é uma função indicadora, mais precisamente, identificamos por ser a função indicadora do conjunto E.

Definição 9. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida definida sobre $\mathcal{A}$. O trio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é chamado de* ***Espaço de Medida****.*

Exemplo 15. *No Exemplo* 12*, defina a seguinte função sobre a σ-álgebra.*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R} \\ & B & \mapsto & \dfrac{\#B}{\#X} \end{array}$$

Note inicialmente que $\mu(\emptyset) = \dfrac{\#\emptyset}{\#X} = \dfrac{0}{4} = 0$. Como a σ-álgebra em questão é finita, a verificação que fizermos para dois conjuntos disjuntos será válida (a menos do tamanho das contas) para qualquer tamanho de união disjunta, de forma que, tomados A e B disjuntos:

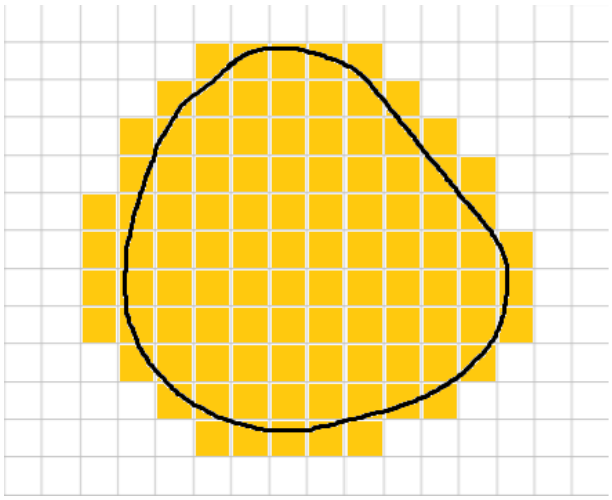
$$\mu(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#X} = \frac{(\#A) + (\#B)}{\#X} = \frac{\#A}{\#X} + \frac{\#B}{\#X} = \mu(A) + \mu(B)$$

Portanto, μ é um Medida. Como as imagens de μ estão em $[0, 1]$, ela é conhecida como Medida de Probabilidade. Neste caso, $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ é um Espaço de Medida também conhecido como Espaço de Probabilidade. Qualquer Medida que possui conjunto imagem em $[0, 1]$ é chamada de Probabilidade.

Observação 5. *Para construir medidas interessantes para nós, imitamos técnicas que podemos ver e são comuns no estudo de cálculo para medir conjuntos $E \subset \mathbb{R}^2$. Quando*

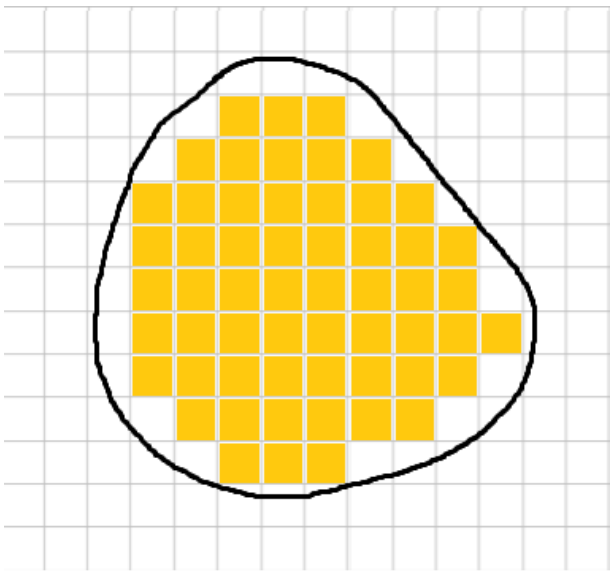
calculamos áreas, fazemos uma medição da área interior, da área exterior e, tomando o limite de um menor h para os lados de pequenos quadrados que formam uma malha onde estão contidas as figuras desses conjuntos, aproximamos a área de um conjunto tão adequada quanto for a figura de sua área. Vamos desenhar isso abaixo, ressaltando que as malhas são constituídas de áreas de quadrados de lado h e apresentando, respectivamente, a aproximação por uma medida exterior da área e após por uma medida interior da área:

Figura 5 - Medida Exterior da Área



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 - Medida Interior da Área



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se denotamos a área exterior da figura por $\mu^*(E)$ e $\mu_*(E)$ como sendo a área interior, temos:

$$\mu_*(E) = \mu(R) - \mu^*(R \setminus E)$$

Sendo R um conjunto que cobre E, com forma retangular, assim como a malha, isso em $\mathbb{R}^2$.

Usamos uma medida básica, cujo valor nos é bem conhecido, isto é, a área de retângulos, formando uma família elementar de conjuntos retangulares para os quais, em posse da área exterior de E, haja visto que a área interior é expressa pela área interior de $R \setminus E$, nos dá a ideia da área de E.

Quando os valores da área exterior de E e da área interior de E coincidem, chamamos esse valor comum de "área de E".

No que se segue, faremos os passos construtivos da Medida de Lebesgue. Neste sentido, nos interessamos particularmente no caso $X = \mathbb{R}$, mas toda a formulação pode ser feita de forma genérica em outros espaços. Veja, por exemplo, o processo geral de construção de uma medida disposto em Stein e Shakarchi (2009).

Definição 10. *Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de suas partes. A função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ é uma* ***Medida Exterior*** *se:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *sempre que* $A \subset B$. *(monotonia)*
3. *Se $\{E_n\}$ é uma família de subconjuntos em $\mathcal{P}(X)$, então* $\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(E_n)$. *(Subaditividade)*

Exemplo 16. *Considere que X é um conjunto numérico qualquer e $A \subset X$.*

- *A função que calcula o número de elementos de qualquer A, atribuindo o valor ∞ para o caso em que A é infinito, é uma Medida Exterior.*
- *A função de Dirac, δ_p, no ponto $p \in X$ para a qual $\delta_p(A)$ é 1 se $p \in A$ e zero se $p \notin A$, também é uma Medida Exterior.*

Para definirmos a Medida Exterior de Lebesgue, cabe relembrar cobertura, tendo sido enunciada na Definição 3. Reparamos que, em posse da Definição 3, o Teorema 4 garantiu que, para um conjunto limitado e fechado sempre existirá um cobertura finita tal que $A \subset \bigcup_{n\in\tau} I_n$.

A Medida Exterior de Lebesgue é uma extensão da noção de comprimento de intervalo na reta. Para gerar essa função, consideramos $X = \mathbb{R}$ nas definições anteriores e partimos da classe $\mathcal{C}$ formada por intervalos limitados, considerando que $\ell((a, b)) = b - a$, com mesmo valor se os extremos do intervalo ficam fechados ou não.

Definição 11. *Seja* $\{I_n\}$ *cobertura enumerável de intervalos abertos que cobrem* A, $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. *A* ***Medida Exterior de Lebesgue*** *para um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é dada por:*

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_n \ell(I_n) \ ; \ \{I_n\} \text{ é uma sequência de intervalos abertos e } A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right\}.$$

Desde que os comprimentos dos intervalos são sempre positivos, a soma será única independente da ordem do somatório.

O ínfimo da Definição 11 é tomado sobre todas as I_n coberturas enumeráveis de A.

Exemplo 17. *Para medir o intervalo* $[2,4]$, *vamos representá-lo pela sequência* $\left(2-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *de modo que, quando* $n \to \infty$, *a sequência* $\left(2-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}\right)$ *tende a* $[2,4]$. *Assim,*

$$l(2,4) \leq \sum_n \ell\left(2-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}\right) \leq l(1,5)$$

Sendo a medida exterior o ínfimo das coberturas de $[2,4]$, *temos, portanto:*

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}\right)\right\} = l(2,4) = 2.$$

A Medida Exterior de Lebesgue possui algumas propriedades operacionais importantes que serão agregadas na proposição a seguir.

Proposição 4. *Seja* $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ *a Medida Exterior de Lebesgue. Neste caso, valem as seguintes propriedades.*

1. $m^*(\emptyset) = 0$;
2. *se* $A \subset B$ *então* $m^*(A) \leq m^*(B)$ *(monotonia);*
3. *se* $x \in \mathbb{R}$ *então* $m^*(\{x\}) = 0$ *(não singularidade);*
4. $m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m^*(A_n)$. *(*$\sigma$*-subaditividade);*
5. *se* A *é enumerável então* $m^*(A) = 0$;

A demonstração da Proposição 4 pode ser encontrada no Apêndice A.

O Exemplo 17 auxilia a compreensão da demonstração do teorema abaixo. Após demonstrar e nos tornar capazes de utilizá-lo com confiança, calcular medidas exteriores de intervalos será tarefa bastante simples.

Teorema 5. *A medida exterior de um intervalo é igual ao comprimento desse intervalo.*

Prova. *Vamos provar primeiro o caso em que $[a,b]$ é um conjunto fechado e finito. Seja $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ um intervalo aberto, em que $\varepsilon > 0$, vemos que $[a,b]$ está contido em $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ para qualquer valor que ε assuma. Desse modo, justamente pela definição de medida exterior, temos $m^*([a,b]) < l((a-\varepsilon, b+\varepsilon))$.*

$$m^*([a,b]) < l((a-\varepsilon, b+\varepsilon)) = b - a + 2\varepsilon$$

Como ε é um valor qualquer positivo, ao tender a 0, concluímos que $m^*([a,b]) < b-a$.

Novamente, recordando da definição de medida exterior, $m^*([a,b]) = \inf_{[a,b]\subset\bigcup I_n} \sum l(I_n)$, com $\bigcup I_n$ sendo uma coleção de intervalos que cobrem o intervalo $[a,b]$, logo, $m^*([a,b]) \geq l([a,b]) = b-a$.

Concluímos que, para um intervalo fechado e finito, $m^*([a,b]) = b-a$.

Pelo Teorema 4, existe $\mathcal{I} = \bigcup I_n$ tal que $[a,b] \subset \bigcup I_n$. Como $[a,b]$ está contido na união de intervalos, $\exists a_1, b_1$ tal que $a_1 \leq a \leq b_1$.

Se $b_1 < b$, temos $b_1 \in [a,b]$, como b_1 não pertence ao intervalo aberto (a_1, b_1), há um intervalo (a_2, b_2) tal que $a_2 < b_1 < b_2$, de modo que $b_2 \in [a,b]$ e, como $b_2 \notin (a_2, b_2)$, há um intervalo (a_3, b_3) ao qual pertence b_2, repetindo o processo anterior, obtemos uma sequência de intervalos abertos $(a_1, b_1)...(a_k, b_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Veja que o processo que fizemos termina ao concluirmos $a_k < b < b_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Sabendo que $\bigcup I_n = (a_1, b_1) \cup ... \cup (a_k, b_k)$, calculamos sua medida com base na primeira parte de nossa demonstração:

$$\sum l(i_n) \geq \sum l(a_i, b_i) = (b_1 - a_1) + ... + (b_{k-1} - a_{k-1}) + (b_k - a_k)$$

$$= -a_1 - (a_2 - b_1) - ... - (a_{k-1} - b_{k-2}) - (a_k - b_{k-1}) + b_k > b_k - a_1$$

Como $b_k > b$ e $a_1 < a$, temos $b_k - a_1 > b - a$ e, portanto, $\sum l(I_n) > (b-a)$. Desde que a medida externa é o ínfimo de $\sum l(I_n)$, concluímos que $m^*([a,b]) = b-a$.

Para qualquer intervalo finito I, como visto pelos dois casos anteriores, há $J \subset I$ em que $l(J) > l(I) - \varepsilon$, tal que, sendo $l(J) = m^*(J) \leq m^*(I)$,

$$l(I) - \varepsilon < l(J) = m^*(J) \leq m^*(I) \leq l(I) \rightarrow l(I) - \varepsilon < m^*(I) \leq l(I)$$

Portanto, $m^*(I) = l(I)$.

Para intervalos infinitos, seja $J \subset I$ um intervalo fechado finito, $m^*(I) \geq m^*(J) = l(J) = \beta$. Como $m^*(I) \geq \beta$ para todo $\beta > 0$, o valor da medida exterior, sendo infinito, é medida também de intervalo, ou seja, $m^*(I) = \infty = l(I)$. ■

A partir da Proposição 4, fica evidente que um dado conjunto $E \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sempre

pode se relacionar com outro conjunto $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathsf{C}}) \tag{5}$$

Para que a Medida Externa de Lebesgue satisfaça o **Problema da Medida**, ou ao menos se aproxime disso, é conveniente que a expressão (5) torne-se uma igualdade. Dessa motivação é que surge a ideia do que é um conjunto que pode ser medido por m^*.

Definição 12. *Dizemos que o conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é **Mensurável** se para cada $A \subset \mathbb{R}$ for verdade que*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathsf{C}}) \tag{6}$$

Note que a junção de (5) com (6) geram a igualdade nesta última inequação. Como a construção de uma Medida Externa pode ser feita a partir de outras noções de medida para além do comprimento, como fizemos no caso de Lebesgue, é comum que a Definição 12 use o termo "Mensurável à Lebesgue" para efeitos de clareza.

Observação 6. *No caso geral, temos trivialmente que*

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\mathsf{C}}),\ A, E \subset \mathcal{P}(X)$$

Por isso, para ser mensurável à Lebesgue, ou também μ^*-mensurável, basta que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\mathsf{C}})$ para todo $E \subset X$, $\mu^*(E) \leq +\infty$

Outro fato que devemos nos atentar é que, sendo

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^{\mathsf{C}}) = \mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^{\mathsf{C}}),$$

Veja que, a medida "interior" de A, sendo o próprio $\mu_*(A) = \mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^{\mathsf{C}})$, coincide com a medida exterior e, portanto, temos para esse conjunto uma medida bem definida.

Para o seguinte teorema, considere

$$\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R};\ E \text{ é mensurável}\}.$$

Teorema 6. *Para a Coleção $\mathcal{M}$, valem as seguintes propriedades.*

1. *$\emptyset \in \mathcal{M}$.*
2. *Se $m^*(A) = 0$, então $A \in \mathcal{M}$.*
3. *Se $m^*(A) > 0$, então existe $B \subset A$ tal que $B \notin \mathcal{M}$.*
4. *$\mathcal{M}$ é fechada para a complementação.*

5. $\mathcal{M}$ é fechada para uniões enumeráveis.

O Teorema 6 nos mostra que existem infinitos conjuntos em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que não são mensuráveis, como exemplificaremos na próxima seção. Isso nos impede de adotar m^* como uma função que atenda ao **Problema da Medida**, pois seu domínio tem muitos conjuntos que fogem à σ-aditividade.

Por outro lado, uma restrição de m^* ao conjunto $\mathcal{M}$ pode ser, de fato, a função que vai atender aos requisitos do **Problema da Medida** em $\mathbb{R}$ e generalizar a ideia de comprimento neste conjunto.

Definição 13. *A terna $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, em que m é a restrição da Medida Externa m^* à σ-álgebra $\mathcal{M}$, é um Espaço de Medida. A Medida m é a Medida de Lebesgue e a terna $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ é o Espaço de Medida de Lebesgue.*

Comparando a medida de Jordan, que utilizamos como base na medida de Riemann, a integral de Lebesgue tem propriedades que possibilitam e facilitam nosso processo de mensuração e integração. Pela medida de Lebesgue, compreendemos que se dados conjuntos E_k são mensuráveis, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ são também mensuráveis; ademais, todos os conjuntos abertos e fechados de R^n são mensuráveis a Lebesgue, sejam de medida finita ou infinita. Por outro lado, a medida de Jordan, associada à integral de Riemann, só é mensurável em conjuntos limitados para os quais suas fronteiras possuem medida de Lebesgue igual a zero. (Isnard, 2018)

Por fim, reforçando a construção geral de medida, o Teorema a seguir é importante para, inclusive, colocarmos algumas noções de medidas que nominalmente e, mais importante do que isso, por suas propriedades, distinguem-se entre si. No nosso estudo, não nos aprofundaremos nas utilizações de tais medidas para definir devidas integrais com suas especificidades, mas optou-se por citar sua existência e formalizá-las.

Antes de enunciar o Teorema, cabe pontuar dois conceitos que precedem ao nosso entendimento do Teorema: Entendemos que $E \subset X$ seja um conjunto μ^*-mensurável quando μ^* é uma medida exterior em X e, dizemos que μ é uma medida completa, quando os subconjuntos de seu domínio contém todos os conjuntos de medida de Lebesgue nula. A demonstração do Teorema a seguir pode ser encontrada em Folland (1999), na página 29.

Teorema 7. *(Teorema de Caratheódory) Se μ^* é uma medida exterior no conjunto X, então a coleção $\mathcal{M} = \{A \subset X, A \text{ é } \mu^*\text{-mensurável}\}$ é uma σ-álgebra. Além disso, $\mu^* I_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ é uma medida completa.*

Temos, com tudo que foi dito até então, base para explorar um exemplo de conjunto não mensurável, aproveitando também a significativa relevância que demos ao problema de medida e a discussão inicial sobre o uso de contra-exemplos para repensar constatações matemáticas.

3.4 Conjunto de Cantor

O conjunto de Vitalli é um subconjunto dos reais, sendo um contra-exemplo notável para demonstrar um conjunto não mensurável por Lebesgue. O conjunto de Vitalli é construído diretamente pelo Axioma da Escolha, sendo constituído pelos representantes das classes de equivalência $x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Sua construção e devida verificação de ser um conjunto não mensurável se encontra no Apêndice B.

Sua construção é um tanto distinta em relação ao que um estudante da graduação talvez já tenha visto, sendo a prova de ser um conjunto não mensurável um pouco longa, necessitando de certa atenção para não se perder entre os passos da construção e da prova de não mensurabilidade por Lebesgue.

Embora tenhamos optado pela demonstração por absurdo, cabe um comentário sobre esse tipo de demonstração. Nas linhas de Polya (1975), a demonstração por esse método pode ensejar uma leitura pesarosa, uma vez que ela consiste em uma apreensão do enunciado como algo impossível, ao mesmo tempo em que devemos voltar constantemente para examiná-lo. O autor ainda enfatiza que a necessidade de suposições durante o processo de demonstração por absurdo pode deixar o texto enfadonho. (Polya, 1975)

A seguir, vamos aplicar os conceitos aprendidos da medida de Lebesgue para medir um célebre conjunto para a matemática.

O estudo do Conjunto de Cantor contribuiu para a formação de algumas bases da Topologia Geral, sendo um conjunto importante para a teoria dos conjuntos e para a Análise. Em relação a teoria da medida, recordamos, pela 4° propriedade da Proposição 4, que todo conjunto enumerável tem medida nula. Uma propriedade interessante do conjunto de Cantor é ser um conjunto não enumerável que possui medida de Lebesgue igual a zero.

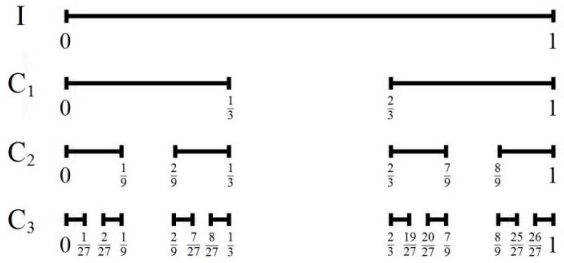
As ideias de construção do conjunto de Cantor e sua medida em Lebesgue podem ser observadas em Moura e Santos (2017).

O primeiro a estudar esse conjunto foi Henry John Stephen Smith, em 1784. Embora Smith tenha sido o primeiro a reconhecidamente estudar o conjunto, o nome dado ao conjunto surgiu após ter sido introduzido por Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, em 1883. Podemos construir o Conjunto de Cantor da seguinte maneira:

Estabelecemos um intervalo $C_0 = [0, 1]$ e, dividindo esse intervalo em outros três de mesma medida, teremos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Vamos definir C_1 como a união desses intervalos com exceção da terça parte intermediária, ou seja, $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Em C_1 faremos o mesmo procedimento, para que haja $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Assim, com a repetição desse processo k vezes, temos construídas as uniões C_k, $k = 0, 1, 2, ...$

A imagem abaixo representa bem a construção que acabamos de fazer.

Figura 7 - Conjunto de Cantor



Fonte: MOURA; SANTOS, 2017, p.2.

Definição 14. *Seja C_k, o k-ésimo conjunto formado pelo procedimento descrito anteriormente, $K = 0, 1, 2, ...$ O* ***conjunto de Cantor*** *é a intersecção dada por*

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Antes de partir para a medida do conjunto de Cantor, vamos analisar alguns pontos que merecem ser enfatizados. Primeiro, levando em consideração as definições de tamanho e cardinalidade apresentados por Cardoso e Lobo (2018):

> A cardinalidade de um conjunto é dada por meio de uma relação bijetora que fazemos entre o conjunto que se quer definir a cardinalidade e os números naturais. Este conceito pode ser sintetizado na ideia de querermos definir o "tamanho" do conjunto, dando a ele um número cardinal que definirá este "tamanho". (Cardoso e Lobo, 2018, p. 1)

Temos que o conjunto de Cantor, dependendo da noção de tamanho que tomamos, não é um conjunto contável. Por poder colocá-lo entre o intervalo [0,1], ele tem cardinalidade contínua. Já em questão de comprimento, podemos inferir que, sendo uma união disjunta de 2^k intervalos de comprimento 3^{-k}, a medida total de C_k é $\left(\frac{2}{3}\right)^k$, que, com k tendendo ao infinito, acaba por tender a zero, ou seja, $\left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$. Temos 2^k intervalos pois sempre removemos $\frac{1}{3}$ dos intervalos e, concorrendo à essas partições, para C_1 como apresentado na figura, $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, sobrando duas terças partes do conjunto com cada parte medindo $\frac{1}{3}$; para C_2, $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$, com quatro partições que medem $\frac{1}{9}$ cada, com a ideia se repetindo para o processo de remoção das terças partes das partições como definidas.

Em um primeiro momento, podemos pensar que o conjunto de Cantor é vazio, mas nos atentamos ao fato de que os pontos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1, por exemplo, não são alterados

conforme removemos as terças partes.

Proposição 5. *O Conjunto de Cantor é um conjunto não enumerável.*

Prova. *Suponhamos que C, o conjunto de Cantor, seja enumerável. Seja $A = x_1, x_2, ..., x_n$ um subconjunto enumerável de C, $A \subset C$. Considere I_1 um intervalo composto pelos elementos de C, sendo I_1 um intervalo compacto, ou seja, fechado e limitado. Note que a medida de comprimento de I_1 é menor que 1. Não obstante, como $[0,1] \subset \mathbb{R}$ têm infinitos elementos, temos que $I_1 \cap C$ também tem infinitos elementos, pois C não tem pontos isolados.*

Considere I_2 um intervalo compacto em que $I_1 \supset I_2$, em que $x_2 \notin I_2$ e seu comprimento seja menor que $\frac{1}{2}$. Novamente, $I_2 \cap C$ é infinito. De modo análogo, há $I_3 \supset I_2$ compacto, de tamanho menor que $\frac{1}{3}$ e que não possui x_3. Assim, formamos uma sequência decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ....$

Desse modo, existe $a \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right)$. Sabendo que a pertence aos intervalos, $a \notin A$, pois é diferente de todo x pertencente a A. Tomando um ponto qualquer $y_n \in I_n$, $y_n \in C$ e $|y_n - a| < \frac{1}{n}$, ou seja, $y_n \to a$ e, portanto, a é ponto de fecho de C, implicando que $a \in C$, já que todo ponto do conjunto de Cantor é ponto de acumulação. Chegamos a uma contradição, já que dissemos inicialmente que C enumerável, mas dado A subconjunto de elemento enumerável qualquer, $a \notin A$ e $a \in C$. Concluímos que o conjunto de Cantor não é enumerável. ■

Vamos estudar a medida de Lebesgue desse conjunto. Os elementos do conjunto de Cantor possuem expansão ternária com o uso de algorismos 0 e 2, ou seja,

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \text{ para } i_n = 0 \text{ ou } i_{n=2} \right\}$$

Isso significa que os elementos de cantos podem ser escritos pelo somatório de $\frac{i_n}{3^n}$. Para exemplificar, o próprio $\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^2} + ...$

Para obter o conjunto de cantor, dentro do intervalo [0,1], sempre vamos retirando 2^n, $n = 0, 1, 2, ...$, intervalos de comprimento iguais à terça parte das sequências que se formam. Calculando a medida de Lebesgue do conjunto de Cantor:

$$m(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + ... \right) = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = 0$$

Portanto, o conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue igual a 0.

3.5 Medidas de Funções

Essa seção se baseia na seção "Mensurable Functions", de Royden (1996).

Até então, temos lidado significantemente com a mensurabilidade de conjuntos e famílias de conjuntos. Partimos agora para as medidas de funções, pois havendo conjuntos não-mensuráveis, nos interessa identificar e facilitar o manejo dessas relações, sabendo lidar com essas funções. Além disso, após esta subseção, iniciaremos a seção 4, trataremos da função indicadora e de funções simples, aspirando nos preparar para a integração, então para isso esses conhecimentos também serão necessários.

Os conjuntos naturalmente constituídos das seguintes declarações nos permitem afirmar a seguinte implicação sobre sua mensurabilidade:

Proposição 6. *Seja $f : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ com E mensurável, as quatro seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *Para $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ é mensurável;*
2. *Para $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ é mensurável;*
3. *Para $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) < \alpha\}$ é mensurável;*
4. *Para $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ é mensurável.*

Se as quatro propriedades são satisfeitas para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, implica que, para $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x : f(x) = \alpha\}$ é mensurável.

Prova. *Seja E o domínio de f.*

(1) $\to$ (4) (vamos mostrar que (1) implica (4)): Como $\{x : f(x) \leq \alpha\} = E - \{x : f(x) > \alpha\}$ e tomando $\{x : f(x) > \alpha\}$ mensurável por hipótese, implica (4), pois a subtração de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Os casos (4) $\to$ (1) e (2) $\to$ (3) são análogos, representando os conjuntos pela operação de conjuntos mensuráveis, temos também conjuntos mensuráveis.

(1) $\leftrightarrow$ (2): Seja $\{x : f(x) > \alpha\}$ mensurável, podemos representar $\{x : f(x) > \alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq \alpha\}$. Como a intersecção de conjuntos mensuráveis é mensurável, (2) é verdadeiro.

Agora, supomos que (1) seja verdadeiro. Como $\{x : f(x) \geq \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > \alpha + \frac{1}{n}\right\}$ e a união de conjuntos mensuráveis é mensurável, está provado que (2) $\to$ (1). Portanto, (1) $\leftrightarrow$ (2).

Com essas provas feitas acima, mostramos que (1), (2), (3) e (4) são equivalentes e sendo uma verdadeira, culmina na implicação das outras constatações.

Sendo que quando uma verdadeira, podemos chegar as outras constatações, vamos provar a equivalência das quatro primeiras com (5).

Sejam (1) *e* (2) *verdadeiras e* $\{x : f(x) > \alpha\} \cap \{x : f(x) \leq \alpha\} = \{x : f(x) = \alpha\}$, *concluímos que, pela intersecção de conjuntos mensuráveis er mensurável,* $\{x : f(x) = \alpha\}$ *é mensurável.*

No caso em que $\{x : f(x) \geq \alpha\}$, $\alpha = n \geq 1$, *temos* $\bigcap_{\infty}^{n=1}\{x : f(x) \geq \alpha\} = \{x : f(x) = \alpha\}$. *Assim, para* $\alpha = \infty$, (2) $\rightarrow$ (5).

No caso em que $\{x : f(x) \leq \alpha\}$, $\alpha = n \geq 1$, *temos* $\bigcap_{\infty}^{n=1}\{x : f(x) \leq \alpha\} = \{x : f(x) = -\infty\}$. *Portanto, para* $\alpha = -\infty$, (4) $\rightarrow$ (5) *e, desse modo, desde que uma constatação seja verificada, provamos que implica em* (5). ■

Assim, nos permitimos definir funções mensuráveis em valores reais estendidos em uso da Proposição 6 e das propriedades descritas acima.

Definição 15. *Uma função de valores reais estendidos é mensurável por Lebesgue se o seu domínio é mensurável e se satisfaz um dos quatro casos vistos na proposição anterior.*

Exemplo 18. *A função* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = 2x^2$ *é uma função mensurável em valores reais estendidos, pois seu domínio é mensurável e para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos que o conjunto* $\{x \in E : f(x) > \alpha \in \mu\}$ *é mensurável.*

Tendo em mãos um conjunto mensurável, podemos julgar a mensurabilidade de conjuntos convenientemente oriundos, como veremos no exemplo após o corolário, e analisar conjuntos compactos pela seguinte proposição:

Proposição 7. *Seja* $E \subset \mathbb{R}$. *Se* $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *é uma função mensurável com valores finitos e* $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *é contínua, então* $g \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *também é mensurável.*

Prova. *Como* g *é contínua, dado um aberto* $\mathcal{O}$, $g^{-1}(\mathcal{O})$ *é um conjunto aberto. Como* f *é mensurável, temos que* $f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{O})\right)$ *de um aberto é mensurável. Assim:*

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{O})\right),$$

$f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{O})\right)$ *é mensurável e, portanto* $g \circ f$ *é mensurável.* ■

Exemplo 19. *Se* $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ *é mensurável então temos que* $|f|$, $senf$ *e* e^f, *por exemplo, são mensuráveis.*

Apesar de $g \circ f$ ser mensurável nessas condições, não podemos afirmar ser sempre verdade que o contrário também o é, ou seja, que $f \circ g$ é mensurável.

A proposição e teorema a seguir são relevantes ao estudar a relação entre funções mensuráveis e a relação entre e pontos superiores, inferiores e o limite da própria função.

Proposição 8. *Sejam f e g duas funções mensuráveis definidas em um mesmo domínio. Dada uma constante c, os seguintes casos são válidos:*

1. *$f + c$ é mensurável;*
2. *$c.f$ é mensurável;*
3. *$f + g$ é mensurável;*
4. *$g - f$ é mensurável;*
5. *$f.g$ é mensurável.*

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada na página 67, em Royden (1998).

Sobre funções de valor estendido, vale ressaltar, há funções que possuem domínio no intervalo $[0, \infty]$, por isso é interessante notar que, assim como em cálculo, sendo $a \in \mathbb{R}$, temos $a+\infty = \infty$ e $a.\infty = \infty$. Porém, definimos $0.\infty = 0$, contrariando o que aprendemos em cálculo. Outrossim, para $a < \infty$, $a \in \mathbb{R}$, temos $\inf \emptyset = \infty$. (Maekawa, 2022, p.15)

Complementando os cálculos com infinito, quando manipulamos funções em valores reais estendidos, definimos $\infty + \infty = \infty$, $\infty.(\pm\infty) = \pm\infty$, $-\infty.(\pm\infty) = \mp\infty$ e $-\infty - \infty = -\infty$. E, embora ainda mantenhamos $\infty - \infty$ indefinido, enfatizamos, pode nos surpreender que, arbitrariamente, definimos $0.\infty = 0$.

Por ter de manipular limites e cotas durante algumas demonstrações, cabe destacar o seguinte teorema sobre a mensurabilidade desses elementos:

Teorema 8. *Seja f_n uma sequência de funções mensuráveis. As funções $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\lim f_n$, $\overline{\lim} f_n$ e $\underline{\lim} f_n$ são mensuráveis.*

A demonstração do Teorema 8 está no Apêndice A.

O Teorema abaixo vem a ser uma formulação que pretende fundamentar um dos três princípios de Littlewood's, esse que vem nos dizer que toda sequência convergente é quase uniformemente convergente. Estejamos bem atentos a essa questão da convergência uniforme, que nos será importante para outros conhecimentos adiante.

Teorema 9. *(Egorov) Seja $\{f_k\}_{k\geq 1}^{\infty}$ uma sequência de funções definidas em um conjunto mensurável E e $m(E) < \infty$. Se $f_k \to f$ em quase todo E, dado $\varepsilon > 0$, há um subconjunto fechado $A \subset E$ para o qual $m(E \setminus A) \leq \varepsilon$ e $f_k \to f$ uniformemente em A.*

A demonstração do Teorema acima está em Stein e Shakarchi (2005), na página 33.

4 INTEGRAL DE LEBESGUE

4.1 Integral de Função Simples

Com os resultados de medida, definida a medida de Lebesgue e os conceitos de medidas de funções, somos capazes de definir a integral de Lebesgue para funções simples, sendo esse o foco da seção que se segue. Os conceitos e resultados dessa seção, com todos os seguintes resultados da integral de funções limitadas em conjuntos mensuráveis e finitos, da integral de funções não-negativas e da integral geral de Lebesgue, no geral, foram baseados em Stein e Shakarchi (2007), Royden (1988) e Isnard (2018).

Podemos compreender a importância da medida de Lebesgue observando que funções mensuráveis, essas que, no geral, podemos dizer que se comportam bem em σ-álgebras, são funções possíveis de serem integráveis, vistas até agora com contradomínio na reta real.

Para a construção da integral de Lebesgue, como veremos adiante, conhecer a função indicadora é fundamental. Por conveniência, buscamos uma função que seja igual a 1 quando em um conjunto mensurável e 0 para qualquer conjunto integrável e que tenha por valor da integral a medida do conjunto.

Definição 16. *Seja a função $\mathcal{X}_A$, expressa por:*

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \tag{7}$$

Chamamos essa função de função indicadora de A.

Exemplo 20. *Seja a função $f : (0, 4] \to \mathbb{R}$, em que:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{N} \\ 1, & x \notin \mathbb{N} \end{cases},$$

A função indicadora que expressa os valores para o subconjunto $E = (0, 4] \in \mathbb{N}$ no domínio da função f é:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases},$$

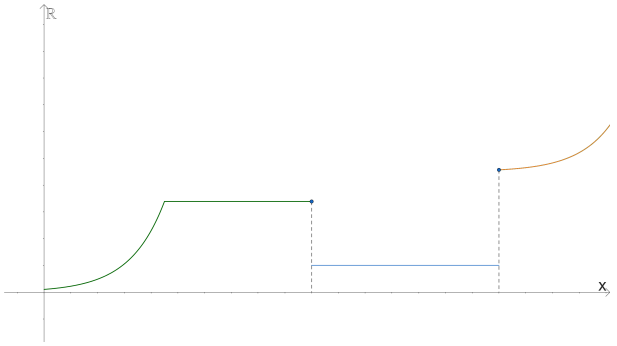
Se fizéssemos a função indicadora para o subconjunto somente de valores entre $(0, 4]$ desde que pertencessem a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, ou seja, para $F = (0, 4] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ teríamos:

$$\mathcal{X}_F(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{N} \\ 0, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A função $\mathcal{X}$ é mensurável se e somente se A é mensurável, assim como vimos na proposição 6, por isso, quando diante de conjuntos não mensuráveis, temos funções

não mensuráveis. A função indicadora é fundamental para a construção da integral de Lebesgue, pois por ela fazemos a distribuição adequada dos conjuntos conforme necessário, entendendo funções quão estranhas pareçam. Vejamos pelo exemplo da figura a seguir:

Figura 8 - Conjuntos e função indicadora



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada uma das cores separam os pontos em que a função apresenta descontinuidade. Nesse exemplo, as cores seriam uma forma de tratar conjuntos como partes de um todo para o somatório e passar, como veremos nesta seção, para a integral da função.

Antes de apresentar funções simples e sua integral, exploremos a integral de função indicadora, entendendo que, por considerar nulos somente os elementos que não pertencem à dado A, a integral nada mais é do que a medida de Lebesgue de A.

Definição 17. *A integral de uma função indicadora é definida pelo valor da medida de Lebesgue correspondente ao conjunto.*

$$\int \mathcal{X}_A(x) = m(A)$$

Exemplo 21. *Considere $\mathcal{X}_B$ uma função identidade do conjunto $B = [1, 5]$, tal que:*

$$\mathcal{X}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 5] \\ 0, & x \notin [1, 5] \end{cases}$$

A integra dessa função, por sua vez, será:

$$\int \mathcal{X}_B(x) = m(B) = 5 - 1 = 4. \blacksquare$$

Observação 7. *Note que, em Riemann, faríamos essa integral por:*

$$\int \mathcal{X}_B(x)dx = \int_1^5 1dx = x|_1^5 = 5 - 1 = 4.$$

Em probabilidade, as funções indicadoras são variáveis discretas simples e, por meio da definição de valor esperado ou média de variáveis discretas simples, dizemos que, para uma função indicadora $\mathcal{X}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, temos:

$$\int_{\Omega} \mathcal{X} dP = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = P(A),$$

para qualquer $A \in \mathcal{F}$. Em que P é uma função probabilidade definida em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$. Neste caso, a função indicadora indica os casos que A ocorre e $P(A)$ é a probabilidade do evento A.

De maneira direta à definição de função indicadora , temos que, para uma função ϕ mensurável que assume finitos valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, temos uma função simples de acordo com a seguinte definição:

Definição 18. *Uma função real ϕ é denominada **função simples** se é mensurável e assume finitos valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, tal que*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$$

Em que atribuímos valor à (7) de acordo com a relação entre os termos $A_i = \{x : \phi(x) = \alpha_i\}$

Assim, a função simples é uma combinação linear finita de funções características de conjuntos em $\mathcal{M}$. A forma canônica de ϕ é uma decomposição para os quais a_i são distintos e não nulos e A_i são conjuntos disjuntos. Para valores finitos $c_1, ..., c_M$, distintos e diferentes de zero, podemos definir $F_{(i)} = \{x : \phi(x) = c_i\}$. A forma canônica de ϕ é

$$\phi = \sum_{i=1}^{M} c_i \mathcal{X}_{F_i}. \tag{8}$$

Para a forma canônica denotamos os valores finitos com c ao invés de α, embora com mesmo formato, lembramos que na forma canônica c sempre tem de serem valores distintos e não nulos, o que não é sempre verdade para os valores na Definição 18.

Definição 19. *A integral de Lebesgue de uma função simples ϕ em forma canônica (8) é definida por:*

$$\int \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(F_i)$$

No caso em que A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^d$ com medida finita, temos

$$\int \phi(x) \mathcal{X}_A(x) dx = \int_A \phi(x) dx$$

.

Há casos para os quais podemos ser compelidos a utilizar formas não canônicas, sendo adequada a manipulação de funções simples. Nesses casos a integral ocorre com a

seguinte Preposição:

Proposição 9. *Seja* $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$, *com* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$, *supondo que cada* A_i *é um conjunto de medida finita, temos:*

$$\int \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i m A_i$$

Prova. *Seja* $F_a = \{x : \phi(x) = a\} = \bigcup_{a_i=a} A_i$. *Pela definição de função simples, sendo* A_i, *por hipótese, conjuntos disjuntos e pela aditividade da medida:*

$$a.m(F_a) = \sum_{a_i=a} a_i m(A_i)$$

Então, a integral dessa função, desde que $F_a = \bigcup_{a_i=a} A_i$*:*

$$\int \phi(x)dx = \sum a.m(F_a) = \sum a_i m(A_i). \ \blacksquare$$

Exemplo 22. *A função de Dirichlet é um exemplo clássico de uma função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *que é integrável à Lebesgue e não é integrável à Riemman. A função de Dirichlet é expressa por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função de Dirichlet é descontínua em todo ponto de $[0,1]$ *e como tem medida diferente de zero (m=1-0=1), a função não é Riemann Integrável. Caso sua medida fosse igual a 0, por ser uma função limitada, seria Riemann Integrável.*

Sejam $m_i = \inf f(x) = 0$ *e* $M_i = \sup f(x) = 1$, *teremos*

$s = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) m_i = 0$ *e* $S = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) M_i = 1$, *para quaisquer* $i = 1, 2, ..., n$ *e, portanto,* $R\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf S = 1$ *e, por sua vez,* $R\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup s = 0$.

Concluímos que, sendo as integrais superior e inferior diferentes, a função de Dirichlet não é integrável por Riemann.

Vamos seguir pela integração de Lebesgue. Vamos representar o domínio da função por $E = E_1 \cup E_2$, *em que* $E_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ *e* $E_2 = [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. *Na função de Dirichlet, quando* $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ *temos medida igual a zero, já que o conjunto dos racionais é enumerável, ou seja* $m(F_{E_1}) = 0$. *Quando* $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, x *não é enumerável, pois é o conjunto dos irracionais, e tem medida* $m(F_{E_2}) = 1 - 0 = 1$.

Pela fórmula de integração por Lebesgue definida anteriormente,

$$\int \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(F_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(E_i) m(F_{E_i}) = \phi(E_1) m(F_{E_1}) + \phi(E_2) m(F_{E_2}) = 0.1 + 1.0 = 0$$

Pontuamos que, assim como a integral de Riemann, a integral de Lebesgue calcula a área do gráfico de uma função. Complementando o que foi dito na seção 2.1, temos um cálculo mais geral pois, ao invés da soma das subdivisões de retângulo em Riemann, temos em Lebesgue a soma de grupos formados pelos subconjuntos da imagem.

Em relação a integral de funções simples, a seguinte proposição garante a comutatividade da integral na soma e de suas constantes, ou seja, a integral de Lebesgue também é aditiva e homogênea, como a integral de Riemann.

Proposição 10. *Sejam ϕ e ψ funções simples definidas em conjuntos de medida finita, temos:*

$$\int (a\phi + b\psi) = a \int \phi + b \int \psi$$

E, se $\phi \geq \psi$

$$\int \phi \geq \int \psi$$

Prova. *Por hipótese ϕ e ψ são funções simples. Pela Definição 18 assumem as seguintes formas:*

$$\phi = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathcal{X}_{E_k}$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} b_k \mathcal{X}_{E_k}$$

multiplicando a primeira equação por um coeficiente a e a segunda por um coeficiente b, depois somando as duas equações correspondentes, temos senão:

$$a\phi + b\psi = \sum_{k=1}^{N} a a_k \mathcal{X}_{E_k} + \sum_{k=1}^{N} b b_k \mathcal{X}_{E_k} = \sum_{k=1}^{N} (a a_k + b b_k) \mathcal{X}_{E_k}$$

Pela Proposição 9:

$$\sum_{k=1}^{N} (a a_k + b b_k) \mathcal{X}_{E_k} = \int (a\phi + b\psi) = a \int \phi + b \int \psi$$

Para provar a segunda afirmativa, sabendo que o resultado da integral tem que ser positivo e dada a prova acima, para $a = 1$ e $b = -1$, podemos afirmar que:

$$\int(\phi-\psi)\geq 0 \Rightarrow \int\phi-\int\psi\geq 0 \Rightarrow \int\phi=\int\psi. \blacksquare$$

Proposição 11. *Sendo f uma função definida e limitada em um conjunto A de medida finita, para todas as funções simples ϕ e ψ,*

$$\inf_{f\leq\psi}\int_A(\psi(x)dx)=\sup_{f\geq\phi}\int_A(\phi(x)dx)$$

sempre que f é mensurável.

A prova da proposição acima se encontra em Royden (1998), na página 79.

4.2 Integral de Funções Limitadas em Conjuntos Mensuráveis e Finitos

A construção da Integral de Funções Limitadas em Conjuntos Mensuráveis e Finitos seguirá a linha de Stein e Shakarchi (2007).

Nós denominamos de suporte de uma função mensurável um subconjunto de seu domínio no qual f não toma valor igual a 0,

$$supp(f)=\{x : f(x)\neq\emptyset\}$$

Se $f(x)=0$ para qualquer $x\notin E$, também dizemos que f é suportada por um conjunto E.

Outro conceito importante, que será utilizado no Lema 2 e aparecerá também posteriormente, vem a ser o de **para quase todo**. Quando usamos a expressão "para quase todo", falando de uma propriedade, isso quer dizer que, seja $X\subset E$, existe um conjunto de medida nula $A\subset E$ tal que a propriedade vale para todo $x\in(X-A)$. Enfim, dizemos também que a propriedade vale para quase todo $x\in X$ e, quando $X=E$, não de outro modo nos referimos que a propriedade vale para quase todo X (Isnard, 2018, p.67). Consideramos a possibilidade de conjuntos de medida nula e que são insignificantes para o resultado não satisfazerem as afirmações.

Exemplo 23. *A função indicadora dos racionais é definida por:*

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1, & se\ x\in\mathbb{Q}\\ 0, & se\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Quando x é um número irracional a função indicadora é igual 0. Por sua vez, x tem valor 1 quando pertence ao conjunto dos números racionais. Todavia, memoramos que o conjunto dos racionais, sendo um conjunto enumerável, pela Proposição 4 tem medida nula. Assim, somente ocorre que a função indicadora é diferente de 0 em conjuntos de medida nula. Portanto, a função indicadora dos racionais é nula em quase todo ponto.

Teorema 10. *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^d$. Existe uma sequência de funções simples não-negativas $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, esta que converge pontualmente para f, que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\phi_k(x) \leq \phi_{k+1}(x)$
2. $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x), \forall x$

A demonstração deste teorema será essencial para provar o Teorema 11. A demonstração do Teorema 10 e do Teorema 11 se encontram no Apêndice B. O seguinte Teorema possibilitará que o resultado seja válido para funções que são estendidas também para $-\infty$, complementando o Teorema anterior.

Teorema 11. *Suponha que f seja uma função mensurável em $\mathbb{R}^d$. Existe, então, uma sequência de funções simples $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaz:*

1. $|\phi_k(x)| \leq |\phi_{k+1}(x)|$
2. $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x), \forall x$

Esse teorema permite dizer que dada uma função f, limitada e que é suportada por um conjunto E, há uma sequência $\phi_n(x) \to f(x)$ de funções simples. Com esse resultado, a seguinte proposição antecede nossa definição de Integral de funções limitadas suportadas em um conjunto finito e mensurável.

O Lema abaixo foi demonstrado por Stein e Shakarchi (2007) e se encontra na página 53 do referido autor.

Lema 1. *Seja f uma função limitada suportada em um conjunto finito E mensurável. Se $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções simples limitadas por M e suportadas em E, em que $\phi_n(x) \to f(x)$ para quase todo x, então:*

1. $\exists \lim_{n\to\infty} \phi_n$
2. *Se $f = 0$ em quase todo o domínio, então o $\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0$.*

Pelo Lema 1, existe o limite da sequência ϕ_n, tal que $\phi_n(x) \to f(x)$. A partir desses resultados, a seguinte definição é dada para a integral de funções limitadas em conjuntos mensuráveis:

Definição 20. *Seja f uma função limitada definida em um conjunto mensurável e finito. Definimos a* ***integral de funções limitadas em conjuntos mensuráveis e finitos*** *por:*

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x)dx.$$

Em que ϕ_n é uma sequência de funções simples que satisfazem $|\phi_n| \leq M$, onde M é uma constante que limita f, com $\phi_n(x) \to f(x)$ para quase todo x para o qual n tende ao infinito e cada ϕ_n é suportada no suporte de f, ou seja, considerando para ambos o mesmo conjunto que serve de suporte.

Observe que a definição nos é útil, dando ferramentas que já somos capazes de manipular. Através da integral de uma função simples, estudada na seção anterior, a definição acima nos permite dar valor a integral de funções limitadas em conjuntos mensuráveis e finitos.

O teorema abaixo irá preceder outros teoremas de convergência conforme avançamos para a integral geral de Lebesgue. Este teorema formaliza a troca entre operações de limite e integração, tornando possível calcular a integral de uma função diretamente pelo limite de uma sequência de funções integráveis.

Teorema 12. *(Teorema da Convergência Limitada): Seja f_n uma sequência de funções mensuráveis definidas em um conjunto finito E e seja $M > 0$, tal que $f_n(x) < M$ para todo n e para todo x. Se $f(x) = \lim f_n(x)$, $\forall x \in E$, então:*

$$\int_E f_n \to \int_E f$$

E, portanto:

$$\int_E \lim f_n = \lim \int_E f_n$$

Prova. *Por hipótese, estamos falando de um conjunto finito E, portanto, o Teorema 9, o Teorema de Egorov, nos permite dizer que, dado algum $\varepsilon > 0$, $m(E \setminus A) \leq \varepsilon$, para algum subconjunto fechado $A \subset E$, com $f_n \to f$.*

Manipulando as integrais que queremos calcular:

$$\int_E |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx = \int_A |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx + \int_{E\setminus A} |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx$$

Desde que ϕ_n é uma sequência limitada por M, temos:

$$\int_E |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx \leq \int_A |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx + \int_{E\setminus A} |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx$$

$$\leq \int_A |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx + 2M\varepsilon$$

Tendo sido dado $\varepsilon > 0$, pela convergência uniforme, há para algum $n \neq m$, $|\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \varepsilon$. Por isso, para valores n e m suficientemente grandes, $\int_E |\phi_n(x) - \phi_m(x)|dx \leq m(E)\varepsilon + 2M\varepsilon$ e, como ε foi um valor arbitrário, tendendo a 0:

$$\int |f_n - f| \to 0$$

Como queríamos provar. ■

Exemplo 24. *Para calcular a função $f(x) = x$ no intervalo $[0, 1]$, seja a sequência de conjuntos E_n que cobre o conjunto $[0, 1]$, tais que os E_n's possuem mínimo comprimento, vamos trazer uma sequência de funções simples ϕ_n que convergem à f. Assim, para $n \to \infty$, cada E_n deve possuir medida $\frac{1}{n}$. A soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{(E_k)}(x)$ é uma aproximação constante de $f(x) = x$ em que cada subintervalo E_k tem por $\frac{k-1}{n}$ o valor mínimo de x em E_k, enquanto $\frac{k}{n}$ é o valor máximo. A soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{(E_k)}(x)$ é uma função escada que aproxima $f(x) = x$ por baixo.*

Antes de começar a integração, vamos entender como funcionam os conjuntos E_k. Quanto maior n, mais a sequência de funções se aproxima de f.

Para $n = 3$:

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right), E_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ e } E_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right)$$

Para $n = 3$, os valores de $\mathcal{X}_{(E_3)}(x)$ vão ser iguais a 1 somente quando $\frac{k-1}{n} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) = E_3$.

A integral da função f, calculada por $\int f(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx$, toma a seguinte forma:

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{E_k}(x) \right)$$

Pelo Teorema 12, temos:

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \right)$$

Veja que, sendo $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, teremos:

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

Passaremos para a integral de funções não-negativas, permitindo que, além de funções limitadas, sejamos capazes de integrar quaisquer funções não-negativas em conjuntos mensuráveis.

4.3 Integral de Funções Não-Negativas

Como temos visto, lidamos com as integrais em etapas bem divididas, para chegarmos ao fim na integral geral de Lebesgue. Nesse passo, inicialmente, definimos a integral de Lebesgue para funções não-negativas e, depois, para outras funções, por meio da decomposição $f = f^+ - f^-$. Isso se dá, pois para uma sequência de funções $f_n : E \to [0, +\infty]$, a função $\sum_{n=1}^{\infty} f_n : x \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in [0, +\infty]$ é sempre definida quando moldamos a função como na seção anterior, com E sendo um conjunto mensurável por Lebesgue. (Isnard, 2018, p.28)

Definimos f^+ e f^- como sendo decomposições da função f, em que, para o caso acima, de uma função estendida nos reais, $f : E \to \overline{R}$, expressamos

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ e } f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Esses conceitos serão exemplificados e utilizados na subseção subsequente do texto, sendo indispensáveis para o bom entendimento do material. Ademais, concerne expor o conceito de integral superior de Lebesgue, nos baseando na construção de Isnard (2018). Dada qualquer função $f : E \to [0, +\infty]$, definimos a integral superior de Lebesgue:

$$I^*(f) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n) : h_n \in \mathcal{H}, h_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} h_n \geq f \right\} \tag{9}$$

Para o ínfimo são consideradas todas as sequências $h_n \in \mathcal{H}$, tais que $h_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \geq f(x)$, $\forall x \in E$. Lembramos que o ínfimo é a maior das cotas inferiores e no caso da integral superior de Lebesgue, dizemos ser superior por vir da majoração de f pela função $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, ou seja, obtendo cotas superiores de f por h_n. Por definição, se não existirem sequências de $h_n \in \mathcal{H}$, em uma σ-álgebra $\mathcal{H}$ e para $h_n \geq 0$, teremos $I^*(f) = \inf \emptyset = +\infty$. A seguir, vamos partir de algumas proposições bem escaladas, que nos darão alguns resultados sobre a integral superior de Lebesgue, entendendo ser também esse um conceito relevante ao estudo de integrais de Lebesgue.

Proposição 12. *Seja uma função h, sendo a sequência $h(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$, para todo $x \in A$, $h, h_n \in \mathcal{A}$, então:*

$$I(h) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n)$$

Para essa primeira proposição, deixemos que o leitor opte por ler sua demonstração em Isnard (2018), em que pode ser encontrada na página 27. A prova apresenta uma

outra perspectiva do caminho que viemos tomando, procedendo de outros elementos que não se tornam necessários para findar em nosso objetivo traçado.

Até terminarmos a discussão de Integral Superior de Riemann, usaremos I, assim como na Proposição 12, para denotar a Integral de Lebesgue. Desse modo, $I(h)$ é nada mais do que a integral de Lebesgue da função h.

A seguinte proposição é um importante conceito para a definição da integral de funções não-negativas:

Proposição 13. *sejam $h \in \mathcal{H}$ e $h_n \in \mathcal{H}$, $h \geq 0$ e $h_n \geq 0$. Se $\forall x \in E$ temos $h(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$, sejam para finitos ou $+\infty$, então*

$$I^*(h) = I(h)$$

Prova. *Pela proposição 12, sabemos que $I(h) \leq I^*(h)$. Nos resta provar $I(h) > I^*(h)$.*

Em posse da proposição 12, convencionando $h_1 = h$ e $h_n = 0$ para $n > 1$, temos que $I(h) = \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n)$. Logo, pela definição 9 de integral superior:

$$I(h) = \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n) \geq inf \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n) = I^*(h) \Rightarrow I(h) \geq I^*(h)$$

Assim, $I(h) \leq I^*(h) \leq I(h) \Rightarrow I^*(h) = I(h)$. ■

Lembramos que ao fim desse material, desejamos ser capazes de calcular funções também com partes negativas por meio da decomposição $f = f^+ - f^-$. Podemos agora enfatizar que, pelo visto até então, para toda função mensurável $f : E \to [0, +\infty]$ o valor da integral é $I(f) = I^*(f) \in [0, +\infty]$.

Dito isso, as integrais que iremos tratar vêm a ser integrais de funções não-negativas e mensuráveis, não necessariamente funções limitadas, como foi o caso das funções da seção anterior.

Definição 21. *Se f é uma função não-negativa mensurável, definimos a integral de Lebesgue de uma função f estendida como sendo:*

$$\int_E f(x)dx = \sup_{h \leq f} \int_E h$$

h são funções limitadas mensuráveis, $0 \leq h \leq f$, para a qual $m\{x : h(x) \neq 0\}$ é finita. Nesse caso, tem-se o supremo de cada função mensurável h, tal que $h \leq f$. Além disso, temos h limitado e suportado em um conjunto de medida finita.

Temos dois casos possíveis, o supremo é finito ou infinito. Em caso de que seja finito, ou seja, $\int f(x)dx < \infty$, dizemos que a função f é integrável a Lebesgue.

Para um conjunto qualquer E, seja ele subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$, $f \geq 0$ e $m(supp(f)) \leq \infty$, temos $f(x)\mathcal{X}_E(x)$ também positivo, então definimos

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\mathcal{X}_{E(x)}dx$$

Exemplo 25. *Para $E = (2, 7)$, considere:*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & se\ x \in (2, 5) \\ 1, & se\ x \in [5, 7) \end{cases}$$

A integral da função é calculada sendo

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\mathcal{X}_{E(x)}dx = 3.m((2, 5)) + 1.m([5, 7)]) = 3.(5 - 2) + 1.(7 - 5) = 11$$

Proposição 14. *Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções mensuráveis não-negativas, então, verificamos as seguintes propriedades:*

1. $\int_E cf = c\int_E f, c > 0;$
2. $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$
3. *se $f \leq g$ para quase todo x, então* $\int_E f \leq \int_E g$

O Teorema abaixo diz respeito ao limite de sequências de funções e será muito útil para a demonstração do teorema da convergência monótona, importantíssimo para o nosso estudo, e assim como o teorema da convergência limitada, na seção anterior, nos permitirá lidar com a passagem de limites para integrais.

Teorema 13. *(Lema de Fatou) Se f_n é uma sequência de funções não-negativas mensuráveis e $f_n(x) \to f(x)$ para quase todo o conjunto E, então*

$$\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

Prova. *Seja $h \in F$ uma função mensurável com valores sempre menores, para mesmo x, que uma função $f \in E$, e sendo $F \subset E$ um conjunto de medida finita ao qual h só está definida para esse conjunto. Construiremos uma sequência de funções para a qual $h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$, ou seja, adquirindo o menor entre os dois valores.*

Como h só está definido para F e temos que h_n, por construção, é limitado por h, então $h_n \in F$. Como h só está definido em F, e $F \subset E$, é certo que $\int_E h = \int_F h$. Assim, pelo Teorema 12:

$$\int_E h = \int_F h = lim \int_F h_n \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

Para o supremo de h, $\int_E(\sup h) = \int_E f$ *e*

$$\int_E f \leq \int_E \underline{\lim} f_n \quad \blacksquare$$

Teorema 14. *(Teorema da Convergência Monótona) Seja* f_n *uma sequência de funções não-negativas mensuráveis e* $f = \lim f_n$ *para quase todo* f*. Temos, desse modo,*

$$\int f = \lim \int f_n$$

Prova. *Pelo teorema 13 vale a desigualdade* $\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n$*. Por hipótese,* $f = \lim f_n$ *e, portanto,* $f \geq f_n$*. Pela Proposição 10 e sendo* $f \geq f_n$*, afirmamos que*

$$\overline{\lim} \int f_n \leq \int f$$

Com as duas desigualdades, temos:

$$\overline{\lim} \int f_n \leq \int f \leq \underline{\lim} \int f_n$$

Concluímos que $\int f = \lim \int f_n$*.* $\blacksquare$

Exemplo 26. *Considere a sequência de funções,*

$$f_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Podemos provar que a função é crescente, já que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ *será maior que 1. vamos estudar o limite da sequência e verificar a convergência para aplicar o teorema da convergência monótona.*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n$$

Reconhecemos a ultima expressão pela identidade $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^b = e^a$*. Então, tendo* $n \to \infty$*, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^2\right)^{\left(\frac{n}{n-1}\right)} = e^2$$

Assim, como $\lim f_n(x) = f(x) = e^2$*,*

$$\int_0^{10} e^2 dx = (10-0)e^2 = 10e^2$$

Assim, $\int_0^{10} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = 10e^2$

Observamos que, no teorema provado acima, utilizamos a prova do Teorema de Fatou, este que contém o uso direto do Teorema da Convergência Limitada, o Teorema 12. As construções se tornam, de caso em caso, mais gerais em relação à integração de funções, utilizando os resultados anteriores aos seus para esse fim.

Corolário 1. *Seja* a_n *uma sequência de funções não-negativas mensuráveis e* $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, temos:*

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n$$

Prova. *Por hipótese* $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e sendo* u_n *uma sequência limitada mensurável, pela definição 21:*

$$\int_E f(x)dx = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_E \lim_{n\to\infty} (a_1 + ... + a_n)$$

Pelo Teorema 14, temos:

$$\int_E f(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} (a_1 + ... + a_n) = \lim_{n\to\infty} \int_E (a_1 + ... + a_n)$$

$$= \int a_1 + ... + \lim_{n\to\infty} \int a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n$$

De maneira que $f = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n$*.* ■

O Corolário 1 prova que, além da comutatividade do limite e a integral, em funções não-negativas, dentro dessas condições, há comutatividade entre a integral e o somatório das sequências de funções.

Proposição 15. *Seja* f *uma função não-negativa e* E_i *uma sequência de conjuntos disjuntos. Se* $E = \bigcup E_i$*, então:*

$$\int_E f = \sum \int_{E_i} f$$

Prova. *Por hipótese, seja* f *mensurável e* E_i *uma sequência de conjuntos disjuntos, há uma representação* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$*, assim como expressa pela Definição 18. Sua integral é regida por:*

$$\int_E f = \int_E \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$$

Pelo corolário 1, provado anteriormente

$$\int_E \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} a_i \mathcal{X}_{E_i} = \sum \int_{E_i} f$$

Assim,

$$\int_E f = \sum \int_{E_i} f. \quad \blacksquare$$

Definição 22. *Dizemos que uma função f é chamada integrável no conjunto E se*

$$\int_E f < \infty$$

Proposição 16. *Sejam f e g funções não-negativas mensuráveis. Se f é integrável sobre E e $g(x) < f(x)$, então g é integrável em E e*

$$\int_E f - g = \int_E f - \int_E g$$

Prova. *Por hipótese, f e g são funções não-negativas. Portanto, valem as propriedades descritas na proposição 14, também $f - g \neq 0$, já que $f(x) > g(x)$, logo:*

$$\int_E f + (-g + g) = \int_E [(f - g) + g] = \int_E f - g + \int_E g$$

Como $\int_E f + (-g + g)$ é finito, $\int_E f - g + \int_E g$ também deve ser, por isso $\int_E g$ é mensurável. Assim,

$$\int_E f = \int_E f - g + \int_E g \Rightarrow \int_E f - g = \int_E f - \int_E g. \quad \blacksquare$$

A subseção seguinte, que trata do caso mais geral de integral de Lebesgue, abrange funções além das não-negativas como apresentadas. Essa terminará a seção e o material didático, cumprindo nossos objetivos traçados em abrangência do tema e conteúdo.

4.4 A Integral Geral de Lebesgue

Retomando a decomposição de funções f, a parte positiva f^+ de uma função f, como já vimos, sendo $f^+ = f \vee 0$, é tratada como sendo

$$f^+ = \max\{f(x), 0\}.$$

Analogamente, definimos a parte negativa de f por $f^- = (-f) \vee 0$. Para f mensurável, temos f^+ e f^- mensuráveis e, dessa maneira, somos capazes de expressar f pela seguinte equação:

$$f = f^+ - f^-$$

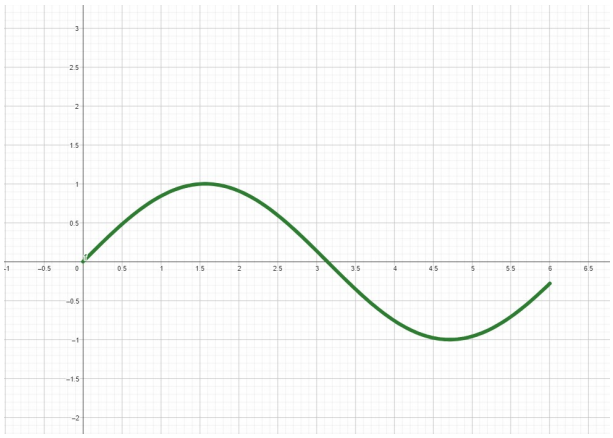
Concluindo ter, portanto:

$$|f| = f^+ + f^-$$

Veja que, sendo f^- o máximo de $(-f(x), 0)$, serão senão os elementos negativos de $f(x)$ formando, se fôssemos ver graficamente em $\mathbb{R}^2$, a reflexão dos pontos negativos pelo eixo x, já que na operação dos sinais, tornam-se maiores que 0. Embora a notação possa nos levar ao engano, ambas as funções são não-negativas, tanto f^+ quanto f^-.

Exemplo 27. *Sendo f a função seno que já estamos habituados, limitada a $[0, 6]$ a função apresenta o seguinte gráfico:*

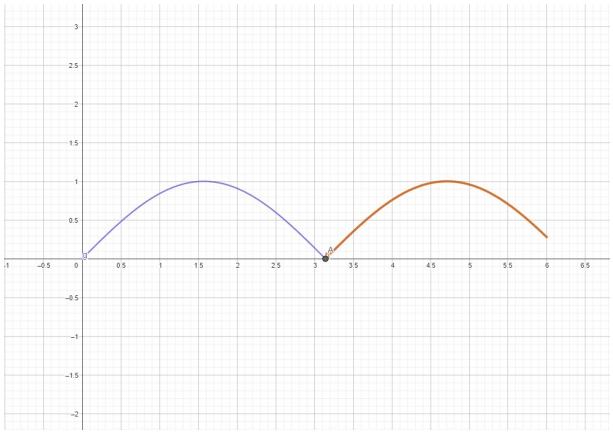
Figura 9 - Função Seno



Fonte: Elaborado pelo autor.

As decomposições f^+ e f^- tem por gráficos, respectivamente, as curvas em roxo e laranja, tal como pode ser visto na figura abaixo:

Figura 10 - Decomposição da Função Seno



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, teremos:

$$f^+ = \max(sen(x), 0) \text{ e } f^- = \max(-sen(x), 0).$$

Para verificarmos a correspondência da função com essa decomposição, façamos o seguinte exercício, buscando um valor positivo e negativo da imagem do seno.

$$f = f^+ - f^- = \max(sen(x), 0) - \max(-sen(x), 0)$$

Se $x = \dfrac{\pi}{2}$*:*

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f^+\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \max\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right), 0\right) - \max\left(-sen\left(\frac{\pi}{2}\right), 0\right) = 1 - 0 = 1$$

Se $x = \dfrac{3\pi}{2}$*:*

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f^+\left(\frac{3\pi}{2}\right) - f^-\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \max\left(sen\left(\frac{3\pi}{2}\right), 0\right) - \max\left(-sen\left(\frac{3\pi}{2}\right), 0\right) = 0 - 1 = -1$$

Usamos esse fato para, por fim, integrarmos funções também negativas, iniciando nosso progresso na Integral Geral de Lebesgue.

Definição 23. *Dizemos que f é integrável sobre E se suas partes f^+ e f^- também o são. Diante disso, definimos a integral de f por*

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Exemplo 28. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ -1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

Sendo essa função com domínio nos reais. Para calcular a integral de f, calculamos suas partes da seguinte maneira:

$$f^+ = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sua integral vem a ser:

$$\int_{[0,1]} f^+ = \sum_{i=1}^{n} \phi(E_i) m(F_{E_i}) = 1.1 + 0.0 = 1$$

A parte negativa de f, procedemos por

$$f^- = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ -1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sua integral vem a ser:

$$\int_{[0,1]} f^- = \sum_{i=1}^{n} \phi(E_i) m(F_{E_i}) = 0.1 + (-1).0 = 0$$

Portanto, $\int f = \int f^+ - \int f^- = 1 - 0 = 1$

O Teorema a seguir vem a ser o de maior expressividade dentre os teoremas de convergência, senão dentre os teoremas dessa seção de integração, concluindo a comutatividade entre o limite e a integral em Lebesgue no caso geral de tratamento de funções.

Teorema 15. *(Teorema da Convergência de Lebesgue) Seja g integrável sobre E e f_n uma sequência de funções mensuráveis em que $|f_n| \leq g$ em E, e em que para quase todo $x \in E$, $f(x) = \lim f_n(x)$, temos assim:*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Prova. *Desde que $|f_n| < g$, sabemos que $g - f_n > 0$. Também, por hipótese, $\lim f_n \to f$, então pelo Teorema 13, o teorema de Fatou,*

$$\int_E (g - f) \leq \underline{lim} \int_E (g - f_n)$$

Por hipótese, $|f_n| \leq g$ e sendo g mensurável temos f mensurável, pela Proposição 14,

$$\int_E g - \int_E f \leq \int_E g - \overline{\lim} \int_E f_n \Rightarrow \int_E f \geq \overline{\lim} \int_E f_n.$$

Notemos que o limite inferior vai para um limite superior pelo sinal negativo de f_n. Agora, por processo análogo e pelos mesmos resultados:

$$\int_E (g + f) \leq \underline{lim} \int_E (g + f_n) \Rightarrow \int_E g + f \leq \int_E g + \underline{\lim} \int_E f_n \Rightarrow \int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

Por fim, $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$. ■

Exemplo 29. *Vamos integrar a sequência de funções $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}$ pelo Teorema 15 disposto acima. Veja que queremos resolver o seguinte limite da integral*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}} dx$$

Encontremos uma função g para o qual $|f_n| < g$ em mesmo domínio, ou seja, queremos uma função $g(x)$ integrável em $(0, \infty]$ satisfazendo a desigualdade.

Para $\forall x, \forall n > 0$, temos que $e^{-nx^2} < 1$. Por isso, vale a desigualdade:

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Vamos verificar que $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ é integrável em $[0, \infty)$. Primeiro, para $[0, 1)$, recordamos que sendo $-\dfrac{1}{2} < 1$, é possível fazer a integração e, portanto:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}}|_0^1 = 2$$

Para $x \in [1, \infty)$, veja que $1/\sqrt{x}$ diverge. Sabendo que $f(x) < e^{-x^2}$, busquemos $[1, \infty)$ na integral de e^{-x^2}:

$$\int_1^\infty e^{-x^2} = \frac{\pi}{2} \times erf(x)$$

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt$ uma função bastante conhecida chamada função erro, utilizada, por exemplo, em Probabilidade. Essa função converge para o intervalo pretendido.

Assim, a seguinte função domina f:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \\ e^{-x^2}, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Dada a existência de $g(x)$, o Teorema da Convergência de Lebesgue nos permite fazer:

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}} dx = \int \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}} dx = \int 0 dx = 0$$

Concluímos que a integral da sequência de funções f_n no intervalo $[0, \infty)$ é igual a 0. ■

Em uma última discussão, vamos dar enfoque a um conceito que pode ser encontrado em materiais que tratam da Integral de Lebesgue, para então falarmos sobre funções semi-integráveis e um pouco mais de sua integração com esse novo conceito. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra, para uma função $f : E \to \mathbb{R}$ ou $[-\infty, +\infty]$, dizemos que f é $\mathcal{A}$-mensurável, ou que f é mensurável relativamente a $\mathcal{A}$ quando para todo $r \in \mathbb{R}$ vale $[f > r] \in \mathcal{A}$. O que nos atentamos a seguir, vem a ser uma pequena nuance de designação, para a qual concluímos poder afirmar que toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{A}$-mensurável, já que os conjuntos $[f > r]$ são abertos, sendo $\mathcal{A}$ a σ-álgebra para a medida de Lebesgue. Veja que

$$[f > r] = \{x \in E : f(x) > r\} = f^{-1}((r, +\infty)).$$

Se uma função $\mathcal{A}$-mensurável $f : E \to [-\infty, +\infty]$, $f = f^+ - f^-$, tem f^+ e f^- sendo funções mensuráveis, dizemos que f é semi-integrável. E definimos a integral de f como já visto anteriormente, isto é, $int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$.

Se uma função f é dita semi-integrável e $\int_E f \neq \pm\infty$, então $\int_E f^+$ e $\int_E f^-$ são ambos finitos e f é integrável. Por outro lado, as funções para as quais $\int_E f = +\infty$ ou $-\infty$ não são ditas integráveis, mesmo que seja definida sua integral. São então integráveis todas as funções com integral finita. (Isnard, 2018, p.68)

Encerrado os conteúdos cobiçados para nosso material, faremos a seguir as considerações finais referentes ao que foi até aqui desenvolvido.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A integral de Riemann, embora se mostre relevante para o estudo da matemática diferencial, se mostra insuficiente para alguns casos, entre aqueles discutidos no decorrer da monografia, inclusive, para exemplificação. Outrossim, os resultados que vimos na integral de Lebesgue se mostraram úteis mesmo para aqueles problemas em que é possível integrarmos por Riemann, como foi o Exemplo 29, visto depois do Teorema da Convergência de Lebesgue. A questão sobre a convergência entre limite e integral que antes fazia-se empecilho para nossas resoluções, finda-se em Lebesgue com os Teoremas de convergência apresentados, que vencem esse aborrecimento e tornam possíveis, ou pelo menos mostram por processos mais simples, a chave para resolução.

O estudo de medida, que foi nosso escopo para a terceira seção, não fica atrás no que tange a elaborada construção como área de estudo e foi, senão sobre seu desenvolvimento, que tivemos primeiro impulso para reelaborar a forma como até então víamos integral. Mesmo na decomposição para a Integral Geral de Lebesgue, o Exemplo 27, embora com conceitos comuns à um curso de graduação, nos mostra um meio diferente de pensar e tratar as funções negativas. No que tange a terceira seção e a que ela se refere, a discussão de medida e o debate histórico inicialmente proposto converge para o interesse de um docente de matemática, coerente pois, já que mesmo para a educação básica, há uma forte tendência de interiorizar conteúdos de geometria e falar sobre a medida em uso na realidade.

Após a primeira aparição, os conceitos de função simples e de função indicadora estiveram presentes durante todo o material, nos resultados e exemplos, pois por eles configuramos as funções e aplicamos a integral como foi trabalhada distinta para a Integral de Lebesgue. O Exemplo 22 assim calculou a Função de Dirichlet, citada várias vezes durante a monografia, enquanto o Exemplo 24 ilustrou a transição da função $f(x) = x$ para uma função simples. Decorreram os casos de integração e discorremos os conteúdos inicialmente propostos. Com a convergência de sequências de funções simples limitadas a funções que desejávamos integrar, definimos a Integral de Funções Limitadas em Conjuntos Mensuráveis e Finitos, por sua vez abrindo caminho às funções não negativas, que tem por integrais o superior de dadas funções limitadas mensuráveis $h \leq f$, para a integral de f. Desta forma, a decomposição de f, mesmo tendo f partes negativas, permitiu que fizéssemos sua integral pela operação de funções não negativas.

Conseguiu-se construir o material com os objetos de estudo de um licenciando em matemática, apresentando novos conceitos e definições com base nesses de ciente passagem pelo estudante, corroborando com o objetivo traçado e exposto na introdução da monografia. Assim, faz-se ênfase ao interesse, por parte do estudante, que se faz do estudo da Teoria da Medida e Integral de Lesbegue, dispondo pelo material desenvolvido, que é possível empreender estudo nessas áreas e pode então propor uma disciplina de

ordem optativa ou pequeno curso.

O conteúdo abordado de nenhum modo é simplório, mas deve ser tratado com cuidado e estudado com paciência, de modo que não haja desalento por parte do leitor que em algum momento pode se deparar com dificuldades em qualquer parte que seja do material. O estudo de medida, embora possa parecer pelo objeto de estudo que se ocupa, não são simples casos indutivos e todos de fácil apreensão, mas trata-se também de abstrato e com forte formalização matemática. Dissertamos, durante os históricos feitos em cima de medida, sobre passagens em diversos instantes do tempo, concluindo que, para se tornar o que é hoje, o estudo de medida passou por milênios de amadurecimento.

Do mesmo modo, diversos autores ditos gênios matemáticos estudaram e auxiliaram no desenvolvimento dos métodos de integração. O estudo de Lebesgue não fica atrás, agora conhecendo suas possibilidades e avanços, e isso inclusive por sua propagação, cientes das áreas às quais influenciou e participou de seus progressos. Muitos dos enunciados que cercam a Integral de Lebesgue possuem sua complexidade, não deixando de considerar os próprios conceitos e ideias por trás de tudo, que estabelecem as bases para nortear e organizar toda nossa construção. Podemos assim dizer que a Integral de Lebesgue é um sofisticado método de integração e, por isso, foi do nosso intento, dentre outros objetivos, buscar facilitar seu estudo, justamente pela dificuldade do tema.

Para fechar as considerações desta monografia, acreditamos que o material promove o estudo de Teoria da Medida e Integral de Lebesgue, indicando pesquisas nos conteúdos próprios a essa área, por exemplo, aprofundado conceitos pouco trabalhados neste material, como as funções semi-integrais e não integráveis em Lebesgue. Aplicar os conhecimentos os contextualizando também é uma sugestão de pesquisa. Ademais, como material didático, insinua-se que possa haver uma aplicação como produto educacional, colhendo resultados de licenciados em matemática.

Também acredita-se que há incentivo em discutir os conteúdos estudados na graduação, bem como abrindo caminhos para interação de novos conteúdos com a licenciatura em matemática. A relação desses conteúdos são objetos de estudo a que concerne discutir os seus tratamentos diante dos cursos e a implicação desses conhecimentos para a formação do graduando e na sua atuação após a graduação.

6 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, SADDO Ag et al. *Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações.* Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, vol **10**, n. 2, 2008.

BOYER, Carl B. *História da matemática.* São Paulo: Editora Blucher, 2012.

CARDOSO, Matheus Pires; LOBO, Matheus Pereira. *CONJUNTOS INFINITOS: CARDINALIDADE, NÚMEROS TRANSFINITOS E SUA ARITMÉTICA.* XV Semana Acadêmica de Matemática, VI Encontro Regional de Educação Matemática e II Encontro de Pós-graduação em Educação e Educação Maetmática, 2018.

COELHO, Emanuela Régia de Sousa. *Introdução à Integral de Lebesgue.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, 2012.

CORRÊA, João Nazareno Pantoja; BRANDEMBERG, João Cláudio. *Revisitando a história da teoria de integrais com vistas a um entendimento dos processos avançados de integração.* Cuadernos de Educación y Desarrollo, vol **15**, n. 10, p. 12277-12303, 2023.

FOLLAND, Gerard B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, 1999.

FOSSA, John A.; MOREY, Bernadete Barbosa; ERICKSON, Glenn W; BATARCE, Marcelo Salles; BARONI, Rosa L.S.; NASCIMENTO, Vanderlei M. do. *Matemática e medida: três momentos históricos.* São Paulo: Editora Livraria da Física; SBHMat, 2009.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social.* 6. ed. São Paulo, Editora Atlas S.A., 2008.

GOMES, Jonas Renan Moreira; CARDONA, Fernanda S.P. *Uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de uma função real.* IV Simpósio de Iniciação Científica e Pós-Graduação do IME-USP, vol **11**, 2008.

INSTITUTO FEDERAL DE BRASÍLIA. *Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Matemática.* Brasília, IFB, 2018.

ISNARD, C. *Introdução à medida e integração.* 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

LIMA, Elon Lages. *Análise real: Funções de uma variável.* Coleção Matemática Universitária, vol **1**, 1°edição. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

MAEKAWA, Lucas Hideo. *Introdução à teoria da medida e integração.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos,

São Carlos, 2022.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. 3.a Edição. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

MARTÍNEZ-ADAME, Carmen. *CARATHÉODORY AND THE AXIOMATIZATION AND ALGEBRAIZATION OF MEASURE THEORY IN THE FIRST HALF OF THE XX CENTURY*. Facultad de Ciencias - UNAM, México, 2015.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. *Por que análise real na licenciatura?*. Zetetiké, vol **13**, n. 1, p. 11-42, 2005.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; VIANNA, Carlos Roberto. *Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol **30**, p. 515-534, 2016.

MOURA, Elis Coimbra de; SANTOS, Elisa Regina dos. *Conjunto de Cantor: um conjunto nao enumerável com medida de Lebesgue zero*. 31° Colóqui Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.

OLIVEIRA, Tiago Silva de. *Um breve paralelo entre a integral de Riemann e a integral de Lebesgue*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção-Ceará, 2021.

PIRES, Luiz Fernando Rodrigues. *Evolução da Teoria da Integração com Análise da Definição Riemann e de Lebesgue para Integral*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Católica de Minas Gerais, Betim, 2010.

PIZZANI, Luciana et al. *A arte da pesquisa bibliográfica na busca do conhecimento*. RDBCI: Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação, v. **10**, n. 2, p. 53-66, 2012.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. 2ª ed, 2ª Reimpressão. Rio de Janeiro: lnterciéncia, 1995.

RESÉNDIZ, Edgar Iván Hernández. *Comparación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue*. Centro Universitario, Querétaro, 2021.

ROCHA, Luciana Parente. *(Re)constituição dos saberes de professores de Matemática nos primeiros anos de docência*. Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação. Unicamp, Campinas, 2005.

ROYDEN, H.L. *Real Analysis*. Stanford University, 3°edição, 1988.

SANTOS, Gabriel Eduardo Carvalho dos. *Métrica e Medida e suas correlações na Formação do docente em matemática*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Instituto Federal de Brasília, Brasília, 2019.

SANTOS, Felipe Fonseca dos; COSTA, Natiely Sampaio. *Medida de Lebesgue: uma análise especifica por meio dos conjuntos de Cantor*. Revista de Matemática da UFOP, vol 2, p. 59-75, 2022.

SENA, Harllen Araújo de. *Tópicos fundamentais em teoria da medida*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). João Pessoa, 2019.

SILVA, F. H. S. da; SANTOS, R. A. dos. *CONEXÃO DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS ENSINADOS NA ESCOLA: FUNDAMENTAÇÃO EM PIAGET, AUSUBEL E VERGNAUD*. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, Brasil, v. **10**, n. 3, p. e22067, 2022.

SILVA, Mariana. *Desvendando e Aplicando a Integral de Lebesgue*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2019.

SHULMAN, Lee S. *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Educational researcher, vol **15**, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. *A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos*. Cadernos da FUCAMP, vol **20**, n. 43, 2021.

STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, 2009.

Wikipédia. File:Dup cubo.jpg. [Imagem]. Disponível em: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File\:Dup\_cubo.jpg`. Acesso em: 12 fev. 2025.

Wikipédia. File:Squaring the Circle J.svg. [Imagem]. Disponível em: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File\:Squaring\_the\_Circle\_J.svg`. Acesso em: 12 fev. 2025.

Wikipédia. File:Trisecçao.png. [Imagem]. Disponível em: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trisecçao.png`. Acesso em: 12 fev. 2025.

APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÕES DA SEÇÃO 3

Proposição 4. Seja $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ a Medida Exterior de Lebesgue. Neste caso, valem as seguintes propriedades.

1. $m^*(\emptyset) = 0$;
2. se $A \subset B$ então $m^*(A) \leq m^*(B)$ (monotonia);
3. se $x \in \mathbb{R}$ então $m^*(\{x\}) = 0$ (não singularidade);
4. $m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m^*(A_n)$. ($\sigma$-subaditividade);
5. se A é enumerável então $m^*(A) = 0$;

Prova.

1. Dado $\varepsilon > 0$, temos que, por estar contido em qualquer intervalo, $\emptyset \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. A medida $\ell((-\varepsilon, \varepsilon))$ cobre o conjunto vazio, ou seja, $\emptyset \subset \ell((-\varepsilon, \varepsilon))$, por isso, a medida exterior, que é ínfimo, não pode ser maior que o valor dessa medida. Assim, $0 \leq m^*(\emptyset) \leq \ell((-\varepsilon, \varepsilon)) = 2\varepsilon$. Sendo ε valor que tende a 0, como foi um valor arbitrário dado inicialmente, temos que $0 \leq m^*(\emptyset) \leq 0$ tal que, somente podemos atribuir a medida externa valor $m^*(\emptyset) = 0$

2. Seja $\{\mathcal{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos em que $\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$. Como $A \subset B$, temos que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$ e $m^*(A) \geq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$. Como $m^*(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$, então $m^*(A) \leq m^*(B)$.

3. Dado $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq m^*(\{x\}) \leq l((x, y)) = 0$. Por isso, $m^*(x) = 0$.

4. Se $m^*(A_j) = \infty$, para algum $j \in \mathbb{N}$, então que $\sum_n m^*(A_j) = \infty$. Assim, para qualquer valor de $m^*\left(\bigcup_n A_n\right)$ temos $m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m^*(A_j)$.

Para o caso de $m^*(A_n) \neq \infty$, existe uma sequência finita ou enumerável de intervalos $\mathcal{J}_n = \left\{I_i^{(n)}\right\}_{i\in\mathbb{N}_n}$, dados $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}_n$. Vamos explicitando melhor esses índices conforme continuamos a prova. Por definição, a medida exterior de $m^*(A_n)$ é o ínfimo entre os somatórios de intervalos $I_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$m^*(A_n) = \inf\left\{\sum_n \ell\left(I_i^{(n)}\right) \; ; A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{(\kappa)}} I_i^n\right\}$$

$\mathbb{N}_n$ são subconjuntos de $\mathbb{N}$, definimos $\mathbb{N}_n$ como sendo um conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, ..., \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ se a sequência de intervalos $\mathcal{J}_n = \left\{I_i^{(n)}\right\}_{i\in\mathbb{N}_n}$ for finita e $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}$, caso $\mathcal{J}$ for uma sequência infinita de intervalos. O índice i denota os i intervalos que unidos cobrem A_n. Assim, temos:

$$A_n \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} I_n^{(n)}$$

e, como $m^*(A_n)$ é o ínfimo de $\sum_n \ell\left(I_i^{(n)}\right)$, é o maior entre suas cotas inferiores. Desse modo, o menor valor que seja, somado com $m^*(A_n)$, nos permite afirmar que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \ell\left(I_i^{(n)}\right) < 2^{-n}\varepsilon + m^*(A_n)$$

A sequência $\{\mathcal{J}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cobre $\bigcup_n A_n$. Assim,

$$m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}_n}\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_i^{(n)}\right)$$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_n}\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_i^{(n)}\right) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}}(2^{-n}\varepsilon) + m^*(A_n) = \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n)$$

Portanto, $m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m^*(A_n)$.

5. Se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, então $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, pois possui a mesma cardinalidade dos números naturais. Desse modo,

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_n \{x_n\}\right) \geq \sum_n m^*\left(\{x_n\}\right) = \sum_n 0 = 0$$

■

Teorema 8. Seja f_n uma sequência de funções mensuráveis. As funções $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\lim f_n$, $\overline{\lim} f_n$ e $\underline{\lim} f_n$ são mensuráveis.

prova. Para a sequência de funções, $\sup f_n$ compreende o supremo das funções que compõe a sequência, para cada n há, em uma função f_n, $\sup_n f_n > a \in f_n$ de modo que $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$. Como f_n é mensurável, $\sup_n f_n$ também o é. Do mesmo modo, temos $\{\inf_n f_n < a\} = \bigcup_n \{f_n < a\}$ e, então, $\inf_n f_n$ é mensurável.

Para os limites, cientes de que $\lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) = \inf_k \left\{\sup_{n\geq k} f_n(x)\right\}$ e $\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = \sup_k \left\{\inf_{n\geq k} f_n(x)\right\}$, temos que, por estarem também ambos os conjuntos de pontos na sequência mensurável, são estas funções mensuráveis.

APÊNDICE B - CONJUNTO DE VITALLI

Recordemos do problema de medida de Lebesgue e das propriedades dispostas na proposição 4. Vamos estudar um conjunto memorável, em relação ao estudo de teoria da medida, no que se refere a exemplificar um conjunto não mensurável. Considere:

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Sendo μ^* uma medida exterior, as seguintes propriedades, abordadas na subseção 3.3, são satisfeitas:

1-$\mu^*([a,b)) = b - a$;

2-Se $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, então $\mu^*(A) = \mu^*(A + x)$, em que $A + x = \{a + x : a \in A\}$ (medida invariante à translação);

3- Se $A \in \mathbb{R}$ é tal que, $A = \bigcup_{j\geq 1} E_j; E_j \cap E_i = \emptyset, i \neq j$, então

$$\mu^*\left(\bigcup_{j\geq 1} E_j\right) = \sum_{j\geq 1} \mu^*(E_j)$$

As propriedades não se esgotam nessas, mas por meio dessas acima citadas, façamos progressivamente algumas afirmações das quais obteremos por absurdo que μ^* não existe como medida.

Suponhamos, por contradição, que existe $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{+\infty} \cup \{+\infty\}$, satisfazendo as propriedades apresentadas acima. Vamos definir a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{R}$: Se $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Q}$. Vamos provar que essa é uma relação de equivalência,

Seja $x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, então temos $x \sim x$. Assim, satisfazemos a propriedade de reflexão entre as equivalências.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \sim y$, tal que $x - y \in \mathbb{Q}$, temos $-(x - y) \in \mathbb{Q}$, logo $y \sim x$. Portanto, satisfeita a propriedade de simetria entre as equivalências.

Sejam $x, y, z \in \mathbb{Q}$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$. Temos $x - y \in \mathbb{Q}$ e $y - z \in \mathbb{Q}$ e, consequentemente $(x - y) + (y - z) = x - z \in \mathbb{Q}$, tal que $x \sim z$. Assim, satisfeita a propriedade da transitividade entre as relações.

Por verificar as três propriedades acima, concluímos que há uma relação de equivalência, existe $\overline{\alpha}$, uma classe de equivalência, tal que:

$$\overline{\alpha} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim \alpha\}$$

em que $x \sim \alpha$ são equivalentes se $x - \alpha \in \mathbb{Q}$ e, consequentemente:

$$\overline{\alpha} = \{x \in \mathbb{R} : x - \alpha \in \mathbb{Q}\} = \{x \in \mathbb{R} : x - \alpha = q \in \mathbb{Q}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x - \alpha = q, q \in \mathbb{Q}\} = \{x \in \mathbb{R} : x = q + \alpha, q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} + \alpha$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha} = \mathbb{Q} + \alpha$$

Desse modo, pretendemos fazer duas afirmações acerca de $\overline{\alpha}$:

1- $\overline{\alpha}$ é enumerável. Provamos isso da seguinte maneira:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos definir a função f:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Q} & \to & \overline{\alpha} \\ & q & \to & f(q) \end{array}$$

Essa é uma função de domínio $\mathbb{Q}$ para a relação de equivalência $\overline{\alpha}$ já definida. Para $\overline{\alpha} = \{x \in \mathbb{R} : x = a + q, q \in \mathbb{Q}\}$, seja $y \in \overline{\alpha}$, existe para cada y um $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $y = \alpha + q'$. Se consideramos $q = q'$, implica que:

$$x = f(q) = \alpha + q = \alpha + q' = y$$

Assim, f é sobrejetiva, ou seja, a imagem de f é o próprio $f(q)$. Com esse fato e como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, segue que $\overline{\alpha}$ é enumerável.

2- Vamos provar que $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \overline{\alpha} = \mathbb{R}$.

(Inclusão) Dado $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \overline{\alpha}$, sabemos que x está em pelo menos uma das classes de $\overline{\alpha}$. Pela representação obtida anteriormente,

$$\overline{\alpha} = \mathbb{Q} + \alpha$$

Seja $x \in \overline{\alpha}$, $\exists q \in \mathbb{Q}$, de modo que

$$x = q + \alpha \in \mathbb{R} \to x \in \mathbb{R}$$

Concluímos que, como feito para x generalizado, $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \overline{\alpha} \subset \mathbb{R}$

(Inclusão contrária) Seja $\beta \in \mathbb{R}$, vamos provar que $\beta \in \overline{\beta}$. Veja, todo elemento da classe de equivalência $\overline{\beta}$ é $x \sim \beta$. Como, pela propriedade reflexiva da relação de equivalência, $\beta \sim \beta$, temos que $\beta \in \overline{\beta}$ e, portanto, $\beta \in \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \overline{\alpha}$ sendo generalizado $\beta \in \mathbb{R}$ e tendo sido dado $\alpha \in \mathbb{R}$. Desse modo, $\forall\beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\beta \subset \cup_{\alpha\in\mathbb{R}}\overline{\alpha} \to \mathbb{R} \subset \overline{\alpha}$$

Portanto, desde que $\overline{\alpha} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \subset \overline{\alpha}$, provamos que $\cup_{\alpha\in\mathbb{R}}\overline{\alpha} = \mathbb{R}$.

Guardemos esses resultados. Vamos encarar agora a medida na reta e o conjunto quociente de $\sim$ em $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathcal{I} : \mathbb{R}/\sim$. Segue-se que $\mathcal{I}$ é expresso por:

$$\mathcal{I} = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Veja que, com base no que provamos anteriormente, isso é, $\overline{\alpha}$ é enumerável e $\cup_{\alpha\in\mathbb{R}}\overline{\alpha} = \mathbb{R}$, se $\mathcal{I}$ for enumerável, então teríamos que $\cup_{\alpha\in\mathbb{R}}\overline{\alpha} = \mathbb{R}$ é enumerável, o que é um absurdo. Assim, $\mathcal{I}$ não é enumerável.

Com o mesmo conjunto quociente $\mathcal{I}$ definido, vamos focar em determinado intervalo da reta e analisá-lo conforme a invariância da medida por transitividade. Primeiro, vejamos que a intersecção de $\overline{\alpha}$ com $[0, 1)$ é diferente de zero. Dado $\gamma \in \overline{\alpha}$, tem-se que para $\gamma \geq 0$, $-\gamma \in \mathbb{Q}$ e $\gamma + (-\gamma) \in \mathbb{Q}$. Assim, $\gamma + (-\gamma) \in \overline{\gamma} = \overline{\alpha}$. Veja, $\gamma + (-\gamma) \in [0, 1)$, então $\forall\overline{\alpha} \in \mathcal{I}$, $\overline{\alpha} \cap [0, 1) \neq \emptyset$

Enunciamos então o axioma da escolha a seguir, para que possamos estudar um conjunto E de elementos de $\overline{\alpha}$.

Axioma 1. *(Axioma da Escolha) Se x é um conjunto que pode ser representado pela união de conjuntos disjuntos não vazios, há pelo menos um conjunto y com exatamente um elemento de cada disjunto que constitui x. Podemos representar, simbolicamente, por linguagem matemática:*

$$\forall x(\forall y\forall z((y \in x) \wedge (z \in x) \wedge (y \neq z)) \to ((y \neq \emptyset) \wedge (y \cap z = \emptyset))$$

$$\rightarrow \exists y \forall z (z \in x \rightarrow \exists w (y \cap z = \{w\})))$$

Pelo axioma da escolha, nos permitimos escolher representantes $\alpha_0 \in \overline{\alpha}$ tais que $\alpha_0 \in [0,1)$. Assim, definimos:

$$E = \{\alpha_0 \in [0,1) : \alpha_0 \in \overline{\alpha}, \overline{\alpha} \in \mathcal{I}\}$$

Tomando $p \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, definimos

$$E + P = \{\alpha_0 + p : \alpha_0 \in E\}$$

Esse conjunto representa-se como translação de p do conjunto E na reta. Vamos verificar que, dados $p, q \in \mathbb{Q}_{[0,1)}$, se $p \neq q$, então $E_p \cap E_q = \emptyset$.

Sobre esses conjuntos, suponha que $p \neq q$ e $E_p \cap E_q \neq \emptyset$. Esses conjuntos podem ser expressos por:

$$E_p = \{x + p : x + p < 1, x \in E\} \cup \{x + p - 1 : x + p \geq 1, x \in E\}$$

$$E_q = \{y + q : y + q < 1, y \in E\} \cup \{y + q - 1 : y + q \geq 1, y \in E\}$$

Seja $\alpha \in E_p \cap E_q$, então,

$$\alpha = \begin{cases} x + p, x + p < 1 \text{ ou} \\ x + p - 1, x + p \geq 1 \end{cases}$$

, e

$$\alpha = \begin{cases} y + q, y + q < 1 \text{ ou} \\ y + q - 1, y + q \geq 1 \end{cases}$$

Onde $x, y \in E$. Nos casos em que $E_p \cap E_q \neq \emptyset$, temos $\alpha \in (x + p)$ e $\alpha \in (y + q)$. Como x e y são valores quaisquer de E, tomamos

$$\alpha = x_0 + p = x_0 + q \Rightarrow p = q$$

De modo análogo, concluímos que, para os outros casos, se $E_p \cap Eq \neq \emptyset$, então $p = q$, os que contradiz nossa hipótese. Concluímos que, se $p \neq q$, então $E_p \cap E_q = \emptyset$.

Por fim, vamos verificar que

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q}_{[0,1)}} E_p = (0,1]$$

(Inclusão) Para qualquer p, $E_p \subset [0,1)$. Supondo que $c \in [0,1)$ e $c \notin \bigcup_{p \in \mathbb{Q}_{[0,1)}} E_p$, $\forall p \in \mathbb{Q}_{[0,1)}$, haveria c para o qual $\forall x \in \mathbb{R}$, não poderíamos escrever $c = x + p$, o que é um absurdo.

(Inclusão contrária) Seja $z \in [0,1)$, então existe $\alpha - z = p \in \mathbb{Q}$.

Pela tricotomia, podemos afirmar que $\alpha = z$, $\alpha < z$ ou $\alpha \geq z$. Se $\alpha = z$, então

$z = 0 + \alpha$, $0 + \alpha \leq 1$, $\alpha \in E$. Desse modo, $z \in E_0$ e, portanto, $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{Q}_{[0,1)}} E_p$.

Logo, dadas as nossas hipóteses iniciais, para a função $\mu^* : P \to \mathbb{R}_{+\infty} \cup \{+\infty\}$, podemos afirmar que:

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q}[0,1)} E_p = [0, 1)$$

$$E_p \cap E_q =, p \neq q$$

$$\mu^*(E_p) = \mu^*(E), \forall p \in \mathbb{Q}$$
$$\mu^*([0, 1)) = 1 - 0 = 1$$

Assim,

$$1 = \mu^*([0, 1)) = \mu^* \left(\cup_{p \in \mathbb{Q}([0,1))} \right) = \sum_{p \in \mathbb{Q}([0,1))} \mu^*(E_p)$$

Desse modo, sabendo que a medida é sempre valor positivo, seja dado $c \in \mathbb{R}$, se $\mu^*([0, 1)) = 0$, teríamos $1 = 0$, o que é um absurdo. Por outro lado, se $\mu^*([0, 1)) = c > 0$, então $1 = \infty$, o que também configura um absurdo.

Portanto, não há função $\mu^* : P \to \mathbb{R}_{+\infty} \cup \{+\infty\}$ como apresentada, com sua existência como função medida externa nos levando a conclusões absurdas, como foi provado.

APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÕES DA SEÇÃO 4

Teorema 10. Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^d$. Existe uma sequência de funções simples não-negativas $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, esta que converge pontualmente para f, que satisfaz as seguintes condições:

1. $\phi_k(x) \leq \phi_{k+1}(x)$
2. $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x), \forall x$

Prova. Dada uma função $f(x)$ qualquer. Seja a função F_N, para $N \geq 1$, expressa por:

$$F_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{Se } x \in Q_N \text{ e } f(x) \leq N \\ N & \text{Se } x \in Q_N \text{ e } f(x) > N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

Q_N será definido por um cubo com centro na origem, que possui lado de medida N. Veja que, quando N tende ao infinito, a única possibilidade que temos é $f(x) \leq N$ e, concluímos, então, $F_N(x) \to f(x)$. Repare que, como N foi um valor dado, para $N \to \infty$, sempre poderemos trabalhar com uma função F_N para f qualquer.

Vamos fixar F_N em intervalo $[0, N]$, assim, sendo essa uma função não-negativa. Vamos definir um conjunto em que, dados $M, N \geq 1$, $\exists l$ tal que:

$$E_{l,m} = \left\{ x \in Q_N : \frac{l}{M} < F_N(x) \leq \frac{l+1}{M} \right\}, 0 \leq l < NM$$

Pela construção de F_N, para $F_N(x) = f(x)$ temos que $f(x) \leq N$ e como $N > \frac{l}{M}$, para cada $x \in Q_N$ temos $f(x) \geq \frac{l}{m}$.

Pela definição 18, de função simples,

$$F_{N,M}(x) = \sum_l \frac{l}{M} \mathcal{X}_E$$

Para todo x, temos $0 \leq F_N(x) - F_{N,M}(x) \leq \frac{1}{M}$. Como N e M foram valores dados, podemos definir $N = M = 2^k$ com $k \geq 1$ e, sendo a coleção ϕ por hipótese com domínio em $\mathbb{R}$, definiremos $\phi_k = F_{2^k,2^k}$. Assim:

$$0 \leq F_m(x) - \phi_k(x) \leq \frac{1}{2^k}, \forall x \in Q_N$$

Quanto maior for o valor k, menor será $\frac{1}{2^k}$, portanto, $\{\phi_k\}$ passa a crescer conforme aumentamos o valor de k, ou seja, $\phi_k \leq \phi_{k+1}$, como queríamos provar.

Para $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x)$, recordamos que $F_n(x) \to f(x)$ para $n \to \infty$, logo, para $k \to \infty$, $\phi_k(x) \to f(x)$. ■

Teorema 11. Suponha que f seja uma função mensurável em $\mathbb{R}^d$. Existe, então, uma sequência de funções simples $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaz:

1. $|\phi_k(x)| \leq |\phi_{k+1}(x)|$

2. $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x), \forall x$

Prova. Para provar esse teorema, usamos a decomposição de f em $f = f^+ - f^-$, que será melhor explicada na subseção seguinte. Assim, caso haja dificuldade, recomendamos que o leitor volte após chegar em tal momento do texto. por hora,

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ e } f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Vemos que, pelo Teorema 10, sendo f^+ e f^- funções não negativas, existem sequências $\{\phi_k^{(1)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{\phi_k^{(2)}(x)\}\infty_{k=1}$ que convergem, respectivamente, para f^+ e f^-.

Desde que $\{\phi_k^{(1)}(x)\}_{k=1}^{\infty} \to f^+$ e $\{\phi_k^{(2)}(x)\}_{k=1}^{\infty} \to f^-$, sabemos que $\phi_k(x) = \phi_k^{(1)}(x) - \phi_k^{(2)}(x)$ converge para $f(x)$.

Pela definição de f^+ e f^-, a sequência $\{|\phi_k|\}$ é crescente e, então:

$$|\phi_k(x)| = \phi_k^{(1)}(x) + \phi_k^{(2)}(x).\blacksquare$$