



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

Campus Estrutural

Licenciatura em Matemática

FRANCISCO AUGUSTO SAMPAIO JORGE

**UMA PROPOSTA DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO UTILIZANDO AS IDEIAS
ORIGINAIS DE FERMAT E LEIBNIZ**

BRASÍLIA
2022

FRANCISCO AUGUSTO SAMPAIO JORGE

**UMA PROPOSTA DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO UTILIZANDO AS IDEIAS
ORIGINAIS DE FERMAT E LEIBNIZ**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* Estrutural do Instituto Federal de Brasília como requisito parcial para obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Mestre Nilton César de Oliveira Borges

BRASÍLIA
2022

Dados da Catalogação na Publicação
Elaboração Lara Batista Carneiro Botelho
CRB1-2434

J82p Jorge, Franciso Augusto Sampaio

Uma proposta de introdução ao cálculo utilizando as ideias originais de Fermat e Libniz / Franciso Augusto Sampaio Jorge – 2022.

105 p.: il.; 21 cm.

Orientador: Prof. Me. Nilton César de Oliveira Borges.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília, Campus Estrutural, Curso de Licenciatura em Matemática, Brasília, 2022.

Bibliografia : p. 51-55.

1. Matemática - Métodos de ensino. 2. Matemática - História. 3. Matemática - Estudo e ensino. 3. Cálculo diferencial. 4. Cálculo. 5. Fermat. 6. Leibniz. I. Borges, Nilton César de Oliveira, orient.. II. Título. III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília.

CDU: 517.2:371.3



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília

FICHA DE APROVAÇÃO EM BANCA EXAMINADORA

Trabalho de Conclusão de Curso

Discente: Francisco Augusto Sampaio Jorge.

Título: Proposta de Introdução ao Cálculo utilizando as ideias originais de Fermat e Leibniz

Trabalho aprovado em: 27/07/2022

Brasília - DF, 27 de Julho de 2022.

Banca Examinadora

Orientador (Presidente): Me. Nilton Cesar de Oliveira Borges.

Examinadora 1 (membro): Esp. Pedro Carvalho Brom.

Examinador 2 (membro): Me. Adriana Barbosa de Souza.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Adriana Barbosa de Souza**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 05/08/2022 14:30:32.
- **Pedro Carvalho Brom**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 05/08/2022 13:07:45.
- **Nilton Cesar de Oliveira Borges**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 05/08/2022 13:00:44.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 05/08/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifb.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 399526
Código de Autenticação: 478c946352



RESUMO

Este trabalho busca utilizar a história da matemática como uma ferramenta de ensino para os conceitos iniciais de cálculo, tendo um foco maior no cálculo diferencial. Pensando nisso, estabeleceu-se o seguinte objetivo: Propor uma forma de introduzir os conceitos iniciais de cálculo utilizando as ideias originais de Fermat e Leibniz. A ideia de utilizar estes autores, vem justamente por terem sido precursores do cálculo, e acreditarmos que a forma como o cálculo se originou ser mais intuitiva. Para se alcançar este objetivo, o estudo foi feito através de análise bibliográfica de vários trabalhos e uma análise dos textos principais de Leibniz e Fermat sobre o assunto de máximos e mínimos. No intuito de facilitar esse e futuros estudos, todos os principais textos utilizados foram traduzidos e entraram em anexo deste TCC. Baseado na análise feita, foi realizada como uma ideia inicial para uma oficina.

Palavras-Chave: Leibniz, Fermat, Cálculo Diferencial, História da Matemática.

ABSTRACT

This work seeks using the history of mathematics as a teaching tool for Calculus's initial concepts, focusing on the differential Calculus. Thinking about this, the following objective was set: propose some form of introduce the initial concepts of Calculus using the original ideas from Fermat e Leibniz. The idea of use these authors, come just for to be precursors of Calculus, and we believe that the form as started of Calculus is more intuitive. To reach this goal, the study was done through the analyses bibliographic from many works and a content analysis about the main texts from Leibniz and Fermat about minimum and maximum. To facilitate this and future studies, all main texts used had been translated and entry into annex this undergraduate thesis. Based on the do analysis, was analyzed as a initial idea for a workshop.

Keywords: Leibniz, Fermat, Differential Calculation, History of Mathematics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	O PROBLEMA NA DISCIPLINA DE CÁLCULO	9
3	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	14
4	UM POUCO DE HISTÓRIA E TEORIAS	18
4.1	Eudoxo.....	18
4.2	Arquimedes	19
4.3	Apolônio	20
4.4	Século XVI e o formalismo	21
4.5	Pierre de Fermat.....	22
4.6	Gottfried Wilhelm Leibniz	24
5	METODOLOGIA	27
5.1	Os Textos de Fermat e Leibniz.....	27
5.2	Método de Análise	29
5.3	A Proposta.....	30
6	ANÁLISE DOS TEXTOS.....	31
6.1	Fermat.....	31
6.1.1	<i>Método de Fermat</i>	31
6.1.2	<i>Explicações</i>	33
6.1.3	<i>Exemplos</i>	33
6.2	Leibniz	36
6.2.1	<i>Método de Leibniz</i>	36
6.2.2	<i>Explicações</i>	39
6.2.3	<i>Exemplos</i>	44
7	A PROPOSTA.....	45
7.1	Proposta	45
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
9	REFERÊNCIAS.....	51
	ANEXO 1 – NOVO MÉTODO PARA ENCONTRAR MÁXIMOS E MÍNIMOS....	56
	ANEXO 2 – MÉTODO DE FERMAT PARA PONTOS DE MÁXIMO, MÍNIMO E TANGENTES. UMA RECONSTRUÇÃO.....	64
	ANEXO 3 – MÉTODO DE FERMAT PARA PONTOS DE MÁXIMO, MÍNIMO E TANGENTES. UMA RECONSTRUÇÃO.....	86

1 INTRODUÇÃO

É fato conhecido que a disciplina cálculo, nas universidades, é tratada com certo temor dos alunos, seja pela dificuldade em si da matéria ou seja pelos altos índices de reprovação. Tais índices, podem ser vistos já na década de 80, onde os alunos da Universidade Federal Fluminense (UFF) possuíam um alto percentual de reprovação e desistência, mas a UFF buscava maneiras de melhorar o ensino e contornar este problema, como o aumento da carga horário e até mesmo a mudança de foco da disciplina para algo mais conceitual (MELLO; MELLO, 2007).

Para melhorar o ensino de cálculo é necessário lidar com alguns desafios, dentre eles o mais comentado é a falta de conhecimentos prévios dos alunos, que deveriam ser estudados ao longo da educação básica, como pode ser visto nos trabalhos de Almeida (2016), Nasser, Sousa e Torraca (2017) e Macêdo e Gregor (2020).

Para contornar esse problema, algumas faculdades como o próprio Instituto Federal de Brasília no *Campus* Estrutural, possui uma disciplina que antecede o cálculo, chamada de Fundamentos da Matemática (BRASIL, 2018). Outras Faculdades também possuem tal matéria, com nomes distintos, mas que possuem a mesma função, nivelar os conhecimentos de matemática dos alunos para as disciplinas de cálculo (ANDRADE; ESQUICALHA; OLIVEIRA, 2019) (OLIVEIRA, 2022).

Entretanto, mesmo com tais disciplinas é notório a dificuldade dos alunos em aprenderem certos conceitos mais complexos como Limites, Derivadas e Integrais. E no intuito de melhorar o entendimento de tais conceitos, existem possibilidades que já são estudadas, como por exemplo o aumento da carga horária da disciplina, a mudança metodológica da disciplina e também utilizando de disciplinas de pré-cálculo. Dentre tantas outras formas que se pode pensar em contornar este problema, temos uma, que foi a escolhida par este trabalho, que é usar a história da matemática.

A história da matemática “é um instrumento de investigação, das origens e descobertas, métodos e notações matemáticas que foram desenvolvidas ao longo do tempo, desde as antigas civilizações até os dias de hoje” (OLIVEIRA; OLIVEIRA; VAZ, 2014, p.459), ou seja, com este auxílio podemos explicar como a matemática foi construída, além de ser uma tentativa de cativar mais alunos ao conteúdo passado.

Chaquiam (2017, p.14) diz que

[...], os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada.

Neste sentido, o estudo foi mais aprofundado nas teorias originais do cálculo diferencial. Para isso foi estudado dois trabalhos, o Novo Método para Máximos e Mínimos¹ de Leibniz e o Método para o Estudo de Máximos e Mínimos² de Fermat, que são dois grandes matemáticos precursores do cálculo que conhecemos hoje.

A partir dessa ideia, de utilizar a história da matemática para o ensino de cálculo, estabelece-se o seguinte objetivo deste trabalho: propor uma forma de introduzir os conceitos iniciais de cálculo utilizando as ideias originais de Fermat e Leibniz.

Para se alcançar este objetivo, diversos outros autores, como Eves(2011), Silva(2019), Pedroso(2013), Boyer(2012), Queiró(1993), Milies(2004) e dentre outros foram estudados em busca de compreender melhor a época e o contexto de tais trabalhos assim como a base para o surgimento de tais ideias. Tais textos foram traduzidos do inglês para o português pelo autor do Trabalho com o intuito de ficar mais didático trabalhar com eles em aulas e pesquisas em português. A proposta foi feita no intuito de fomentar futuros trabalhos que podem ser realizados a partir desta ideia, seja aprofundando mais os estudos em cima dos textos, seja construindo e aplicando a proposta.

Este trabalho foi realizado através de uma pesquisa bibliográfica que foi realizada junto a diversos trabalhos com um enfoque maior no de Leibniz e no de Fermat, ambos disponíveis em português nos anexos. Além disso, os dois textos passaram por um processo de análise para que se conseguisse extrair uma opinião sobre o conteúdo de tais trabalhos.

¹ *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*

² *Methodus Studiorum Maximis et Minimis*

Com base nessa análise foi criada a proposta de uma oficina focando mais no cálculo diferencial que pode ser aplicada da forma como está, ou como aprofundada para a área de integrais.

O trabalho de inicia abordando sobre a alta reprovação na disciplina de cálculo, além de falar formar que outros estudos já vêm buscando para contornar este problema. Dentre estas maneiras pode-se utilizar a história da matemática que é o terceiro capítulo, onde falamos dessa ferramenta e como pode ser utilizada, além de trazer um exemplo dela sendo aplicada no ensino superior.

No quarto capítulo, uma breve história sobre matemáticos que serão importantes para este trabalho, assim como alguns de seus trabalhos e ideias. Nos capítulos que seguem, temos respectivamente a metodologia falando sobre os textos traduzidos e como foram analisados, análise dos dois principais textos de forma detalhada, a proposta da oficina e por fim as considerações finais.

2 O PROBLEMA NA DISCIPLINA DE CÁLCULO

A disciplina de cálculo apresenta elevados índices de reprovação, como apresentado na tabela abaixo, que consta com dados da disciplina de Cálculo 1 da Universidade de Brasília no *Campus* Brasília,

Tabela 1 – Desempenho dos alunos no Campus Brasília

Período	Matrículas	Reprovações	Trancamentos	Número Líquido de Matrículas	Índice Líquido de reprovações
20101	1272,00	535,00	25,00	1247,00	0,43
20102	1357,00	740,00	1,00	1356,00	0,55
20111	1632,00	830,00	20,00	1612,00	0,51
20112	1534,00	828,00	89,00	1445,00	0,57
20121	1503,00	431,00	253,00	1250,00	0,34
20122	1384,00	725,00	53,00	1331,00	0,54
20131	1420,00	591,00	83,00	1337,00	0,44
20132	1352,00	687,00	59,00	1293,00	0,53
20141	1368,00	656,00	94,00	1274,00	0,51
20142	1153,00	575,00	85,00	1068,00	0,54
20151	1135,00	494,00	52,00	1083,00	0,46
20152	1126,00	587,00	64,00	1062,00	0,55
20161	1106,00	597,00	55,00	1051,00	0,57

Fonte: (NETO, 2017, p.21)

É possível calcular a partir da tabela 1 a média aproximada de reprovações líquidas, entre o período do primeiro semestre de 2010 até o primeiro semestre de 2016, o que é de 0,57, ou seja, mais da metade dos estudantes que não trancam a matéria são reprovados. Esse alto índice, não é exclusivo desse *Campus*, mas também pode ser observado no *Campus* Gama e no *Campus* Planaltina da mesma Universidade, com as médias de 0,45 e 0,40 respectivamente, que podem ser calculadas a partir das tabelas 2 e 3 a seguir.

Tabela 2 – Desempenho dos alunos no Campus Gama

Período	Matrículas	Reprovações	Trancamentos	Número Líquido de Matrículas	Índice Líquido de reprovações
20101	469,00	212,00	38,00	431,00	0,49
20102	508,00	340,00	0,00	508,00	0,67
20111	504,00	244,00	0,00	504,00	0,48
20112	461,00	269,00	15,00	446,00	0,60
20121	499,00	169,00	69,00	430,00	0,39
20122	432,00	281,00	3,00	429,00	0,66
20131	500,00	142,00	6,00	494,00	0,29
20132	384,00	176,00	7,00	377,00	0,47
20141	446,00	174,00	7,00	439,00	0,40
20142	432,00	191,00	9,00	423,00	0,45
20151	391,00	131,00	4,00	387,00	0,34
20152	348,00	136,00	3,00	345,00	0,39
20161	384,00	124,00	6,00	378,00	0,33

Fonte: (NETO, 2017, p.21)

Tabela 3 – Desempenho dos alunos no Campus Planaltina

Período	Matrículas	Reprovações	Trancamentos	Número Líquido de Matrículas	Índice Líquido de reprovações
20101	61,00	18,00	2,00	59,00	0,31
20102	86,00	40,00	2,00	84,00	0,48
20111	57,00	19,00	0,00	57,00	0,33
20112	91,00	28,00	13,00	78,00	0,36
20121	86,00	17,00	11,00	75,00	0,23
20122	108,00	47,00	15,00	93,00	0,51
20131	99,00	33,00	10,00	89,00	0,37
20132	110,00	33,00	19,00	91,00	0,36
20141	103,00	46,00	34,00	69,00	0,67
20142	97,00	44,00	13,00	84,00	0,52

20151	100,00	46,00	24,00	76,00	0,61
20152	118,00	26,00	12,00	106,00	0,25
20161	102,00	19,00	8,00	94,00	0,20

Fonte: (NETO, 2017, p.21)

Tais índices não são exclusivos da Universidade de Brasília, nem estão relacionados a um período mais atual, mas também aparecem em outros trabalhos como o de Rezende (2003), onde na UFF são contatados que “a variação dos índices de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, este não é inferior a 65%” (REZENDE, 2003, p.20) tais dados foram coletados no período do primeiro semestre de 1996 até o primeiro semestre de 2000.

Esses altos índices de reprovação já era um problema à alguns anos na UFF, “A primeira grande mudança no ensino de Cálculo I ocorre no início da década de 1980, como resposta à constatação de que os alunos ingressavam no curso de engenharia com menor nível cognitivo”(MELLO;MELLHO, 2007, p.2) para contornar esse problema, aumentaram a carga horária da disciplina de cálculo de 60 para 90 horas semestrais, o que piorou desastrosamente as reprovações, acompanhados, pelo aumento dos índices de evasão. Além disso, a reprovação estava sendo atribuída a falta de estudos dos alunos e para tentar “forçar” os alunos a estudarem começaram a utilizar listas de exercícios, que faziam com que os alunos aprendessem a resolver exercícios e não o conteúdo em si, como podia ser observado no aumento dos índices de reprovação em Cálculo 2. Alguns anos depois, a UFF voltou atrás de sua decisão, reduzindo a carga horária e mudando o enfoque da matéria, que passou a ser mais conceitual. (MELLO; MELLO, 2007).

Apesar de serem dois exemplos mais específicos, estes dois resultados de mal desempenho dos estudantes nas disciplinas de Cálculo diferencial e integral pode ser observado em outras faculdades através de outros estudos como os de Malta (2004) e de Cavasotto e Portanova (2008).

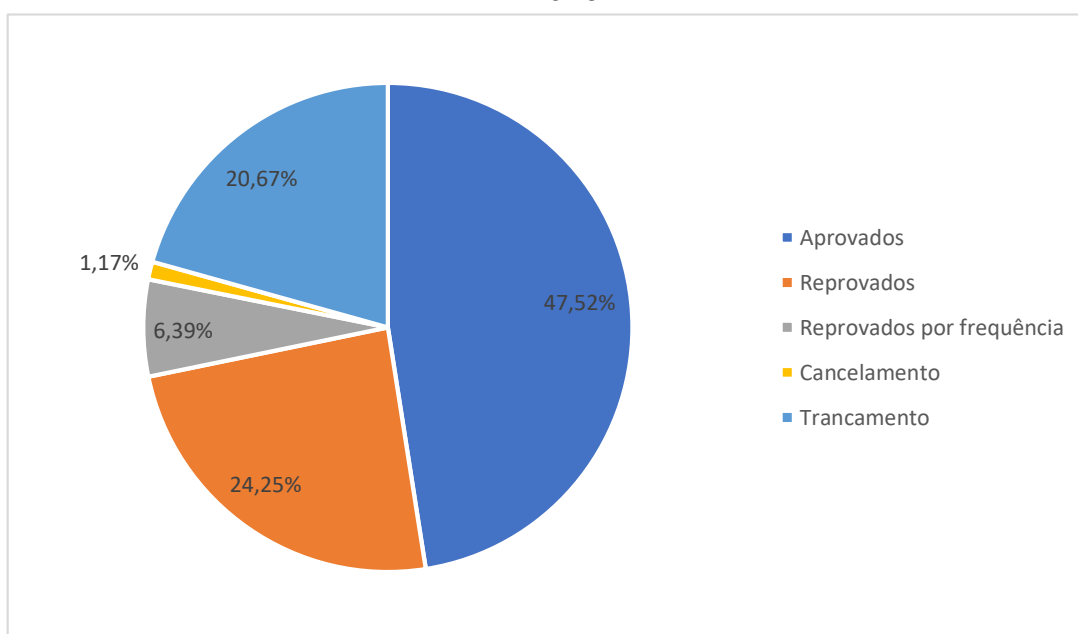
Para contornar esse problema nas disciplinas de cálculo, há vários estudos fazendo propostas de diferentes tentativas para melhorar o aprendizado nesta disciplina e consequentemente aumentar a aprovação.

Cavasotto e Portanova (2008, p.2) diz que “as discussões sobre este tema são numerosas e, de um modo geral, os discursos remetem a críticas em relação à

qualidade de ensino nos níveis Fundamental e Médio ” como no caso da UFF, também na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) em que foi realizado aulas de reforço ministradas por alunos da Licenciatura em Matemática sobre conhecimentos matemáticos de nível fundamental e médio, e como exemplo tem-se o próprio IFB *Campus* Estrutural que oferta a matéria obrigatória de Fundamentos da Matemática como uma forma de nivelar o conhecimento de matemática da educação básica dos estudantes que chegam à faculdade.

Essa matéria é comumente chamada de pré-cálculo, vem sendo debatida há alguns anos, como pode-se ver no trabalho de Andrade, Esquincalha e Oliveira (2019), e vem se mostrando uma solução bastante utilizada. Entretanto, um estudo realizado na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) entre o período de 2011 a 2016, há um alto percentual de reprovação na disciplina de pré-cálculo, conforma apresentado na figura 1.

Figura 1 – Desempenho dos acadêmicos matriculados em Pré-Cálculo – 1º/2011 a 1º2016



Fonte: Diefenthaler (2017)

Outro problema dos pré-cálculos, como pode ser visto inclusive no Projeto Político Pedagógico (PPC) da Licenciatura em Matemática do *Campus* Estrutural, e que foi evidenciado no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do estudante do próprio *campus* o Oliveira (2022), que é a falta de uma padronização dos currículos

dessas disciplinas. Em seu trabalho ele tenta contornar esse problema, buscando uma forma de padronizar os conteúdos das disciplinas de pré-cálculo.

Além disso, o que ficou evidente neste mesmo TCC é que em geral as disciplinas de pré-cálculo se preocupam em “nivelar” os estudantes, revisando conceitos importantes do ensino médio para as matérias de cálculo. Entretanto, “ministrada no início do curso, [Cálculo I] passa a ser o primeiro contato, para o aluno, com uma Matemática ‘diferente’ daquela que trabalhava no Ensino Médio” (GOMES apud MACÊDO; GREGOR, 2020, p.5).

Como a matemática do ensino médio é “diferente” da matemática que ele passa a ver nos cálculos, a matéria de pré-cálculo sendo uma revisão do ensino médio, é algo que facilita, mas não resolve a estranheza gerada quando os alunos têm os primeiros contatos com a teoria de cálculo. Sendo assim, pode-se levar em considerações outros modos de contornar os problemas, como mudar o foco da disciplina para algo mais prático, ou mais conceitual como feito de UFF, ou então, utilizar métodos diferentes para ensinar a matéria, como no caso de Palis (2010) em que utiliza o *software Maple* para o desenvolvimento de conceitos e resolução de problemas, e no caso deste trabalho que pretende utilizar a história da matemática para o ensino de cálculo.

3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O auxílio da história da matemática para o ensino de determinados conteúdo é fundamental, de acordo com D'Ambrósio (1999, p.97) "Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas", como a história.

A história da matemática sendo uma ferramenta de ensino, já é estudada a mais de um século ao redor do mundo, mas em nosso país a discussão é um pouco mais recente. Miguel e Brito (1996), destacam que, em 1989, no I Encontro Paulista de Educação Matemática, na atividade coordenada Aspectos Históricos no Processo de Ensino-aprendizagem da Matemática, foi levantada a discussão sobre a história da matemática para a formação de professores, e foi destacado a "lamentável ausência da disciplina História da Matemática, quer na quase totalidade dos cursos de Magistérios" (ANAIS I EPEM apud MIGUEL; BRITO, 1996, p.48), além de levarem a discussão mais adiante, falando sobre como só o acréscimo de tal disciplina não garante o uso nas práticas docentes e da baixa oferta de cursos para que os professores pudessem se aprofundar sobre o assunto e sua utilização em sala. Essa mesma problemática pode ser observada também em 1992 e 1995 nos IV e V Encontros Nacionais de Educação Matemática e no Seminário Nacional de História da Matemática em 1995 (MIGUEL; BRITO, 1996)

O fato dos professores conhecerem essa ferramenta e não a utilizarem nas práticas docentes é um problema comentado por Pereira (2013) em sua dissertação de mestrado, nela são destacados alguns estudos de 2011 falando sobre as razões para não se utilizar a história na educação matemática e temos que as principais são: falta de material adequado e falta de formação adequada.

Além disso, a discussão não fica somente nesses aspectos, mas também de como a história da matemática é utilizada, e diferente do que muitos professores pensam, o uso da história nas aulas de matemática não é simplesmente para contar anedotas, vai muito além, com o uso dessa ferramenta pode-se especialmente ensinar a pensar (CASTRO; FERNÁNDEZ, 2011). Tal discurso é reforçado por Pereira (2013, p. 16) quando fala sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs),

Um professor que tem em sua formação a história dos conceitos pode dar aos alunos a oportunidade de ver o conhecimento matemático como resultado da criação humana e, sendo assim, passível de mudanças, de

falhas e da incorporação de novos conhecimentos. Enfim, a História esclarece, ideias, conceitos, métodos e dá respostas a muitos porquês.

É evidente que o uso da história para contar anedotas, de maneira consciente e sem o uso repetitivo, é sempre indicado para contextualizar certos conteúdos e tentar trazer tais assuntos para a realidade do estudante, além de valorizar grandes matemáticos.

Ainda sobre os PCNs, quando falado sobre ensino da matemática podemos destacar que,

Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1997, p.23)

Que é o foco deste trabalho, buscando utilizar essa ferramenta de ensino tão importante para introduzir conceitos complexos, que são os de cálculo, através de uma trajetória histórica para a construção dos mesmos.

A junção de história da matemática e o ensino de cálculo não é um assunto comumente encontrado, como podemos ver no trabalho de Gomes e Araman (2016) que investigaram os artigos publicados nas revistas *Bolema*, *Zetetiké* e *Educação Matemática Pesquisa*, no período de 2005 a 2015, e dentre os 897 artigos publicados somente 1 deles tratava sobre o assunto.

Esse artigo em questão é o *História e Rigor em uma Iniciação ao Cálculo: uma experiência cubana*³ de Castro e Fernández (2011). Nele temos a criação de uma disciplina “radicalmente diferente de outros cursos tradicionais de cálculo e que denominamos Introdução a Análise, estuda as ferramentas analíticas que surgiram na infância e adolescência da Análise Matemática”⁽⁴⁾CASTRO; FERNÁNDEZ, 2011, p.587, tradução nossa).

Eles introduziram os conceitos de acordo com as etapas de “amadurecimento” do cálculo, seguindo o estilo das obras de Bolzano, Cauchy e Weiestrass, sem ignorar os conjuntos de Cantor. A ideia seria seguir próximo das ideias originais, mas ainda

³ *Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana*

⁴ *radicalmente diferente a otros cursos tradicionales de Cálculo y que denominamos Introducción al Análisis estudia las herramientas analíticas surgidas en la infancia y adolescencia del Análisis Matemático*

muito próximo de Euler. Dessa forma eles dividiram a disciplina em três partes: Funções Elementares, Introdução ao Cálculo Diferencial e Introdução ao Cálculo Integral.

Apesar da diferença entre as ideias comparado a este trabalho, eles trazem resultados interessantes, já que eles aplicaram essa disciplina no período de 5 semestres na *Universidad de La Habana*. Dentre os resultados trazidos, cabe-se aqui destacar alguns:

- Eles perceberam que os alunos mudaram gradualmente a compreensão sobre o que é a matemática e como ela surge. Além de muitos terem perdido o medo de se expressarem e errarem ao longo de discussões e debates, participando ativamente na elaboração de novas ideias. Esse fato pode ser observado nesses alunos inclusive em matérias de semestres posteriores.
- Através de citações e relatos biográficos, percebeu-se que alunos também sentiram a “humanização” do fazer matemática, desmistificando os matemáticos e mostrando como eles conseguiram suas conquistas.
- Ao abordarem a formalização de certos conceitos como o de limite, em semestres posteriores, constataram uma fluidez na aceitação e assimilação das definições. Para os alunos, ficou evidente a necessidade da formalização para dar a resposta a diversos paradoxos e incongruências que foram apresentados previamente. (CASTRO; FERNÁNDEZ, 2011).

É claro que existem alguns problemas para se aplicar essa ideia que os próprios autores ressaltam, como o acréscimo de mais uma disciplina no curso e a necessidade de se ter um professor que não só saiba do conteúdo de cálculo, mas também o conhecimento da gênese histórica do conteúdo a ser passado para que permita executar a ideia na medida necessária.

Entretanto, o que temos é um exemplo de sucesso utilizando a história da matemática como uma ferramenta para se introduzir os conceitos iniciais de cálculo. O que reforça a potencialidade deste e de futuros trabalhos que sigam essa mesma ideia.

Nesse mesmo intuito de fazer a ligação entre a matemática do ensino médio e o cálculo, usando a história da matemática, este trabalho optou por um caminho distinto, que é seguindo as ideias originais de Fermat e Leibniz. Para estudar tais

autores e suas teorias é necessário que passemos brevemente por alguns outros matemáticos que irão contribuir para o entendimento do todo de ambos os textos.

4 UM POUCO DE HISTÓRIA E TEORIAS

Neste capítulo, será abordado a história de alguns matemáticos assim como alguns trabalhos dos mesmos. Pode parecer ao leitor até um pouco desconexo falar sobre alguns deles, mas quando analisarmos os textos, as teorias neste momento, vão se encaixar com os textos estudados.

Os matemáticos a serem ressaltados neste capítulo serão, Eudoxo, Arquimedes, Apolônio, também será comentado sobre a matemática do século XVI, e obviamente sobre Leibniz e Fermat.

4.1 Eudoxo

Eudoxo de Cnido, “[...]era Grego e foi um médico durante alguns anos, possivelmente influenciado pela família, composta de grandes médicos. Estudou com Arquitas (discípulo de Pitágoras)” (SILVA, 2019, p.15), nascido em torno de 400 a.c., trouxe importantes teorias de proporções entre grandezas (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012). Além disso, se interessou por Astronomia, área onde publicou seu primeiro trabalho, afirmando que o ano possui 365 dias e seis horas, e não 365 dias exatos como se acreditava. (SILVA, 2019)

Apesar de não se ter muitas informações sobre a vida de Eudoxo, “[...] ele deixou uma contribuição maravilhosa: o Método de Exaustão. Muitos atribuem este método a Arquimedes. Contudo, o próprio Arquimedes o atribuiu a Eudoxo em suas cartas” (SILVA, 2019, p.16). Um exemplo dessa atribuição pode ser visto no trabalho Sobre Esferas e Cilindros⁵ onde Arquimedes cita o nome de Eudoxo utilizando o método de exaustão.

Esse método de Eudoxo, dizia que:

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade, do restante subtrairmos novamente uma parte não menor que sua metade, e assim o fazemos sucessivamente, chegaremos ao final de uma quantidade finita de retiradas a uma grandeza menor que qualquer outra grandeza predeterminada da mesma espécie. (SILVA, 2019, p.21)

O interessante a se observar, é que se fala sobre repetir o procedimento um número finito de vezes, isso porque para os gregos a questão de trabalhar com

⁵ *On the Sphere and Cylinder*, pode ser acessado através de <https://www.aproged.pt/biblioteca/worksofarchimede.pdf> e na página 44 podemos ver um dos momentos que se fala sobre o trabalho de Eudoxo.

infinitos não era muito bem aceita. O que temos é uma forma intuitiva da ideia de algo que seja muito, muito pequeno.

Este método tem suas limitações, como ressaltado por Silva (2019, p.21), já que possui um caráter argumentativo “[...]por redução ao absurdo, esse método nos obriga a conhecer previamente o resultado a ser demonstrado, isto é, não serve para encontrar novas verdades, mas apenas para demonstrar aquelas que eram descobertas empiricamente. ”

Mesmo assim, o método será usado por Arquimedes e diversos outros matemáticos. E inspirará outros trabalhos, como o de Leibniz e Newton.

4.2 Arquimedes

Arquimedes de Siracusa (cidade situada na ilha de Sicília) segundo Eves (2011), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, certamente o maior da Antiguidade. “Nasceu por volta de 287 a.C. e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a.C. Era filho de um astrônomo e desfrutava de alto prestígio junto ao rei Hierão (de quem talvez fosse parente).” (EVES,2011,p.192) Famoso por diversos engenhos criativos, principalmente nos utilizados em Siracusa para se defender do sítio romano à cidade, tal fama é esta, que até o general do ataque romano Marcelo reconheceu a sua genialidade, e ao saber de sua morte durante o ataque enterrou seu corpo, com as honras e o respeito devido, no cemitério da cidade, e em sua lápide foi feita a figura de uma esfera inscrita num cilindro circular reto, como desejado por Arquimedes.(EVES,2011)

Ainda há as histórias famosas deste matemático segundo Eves (2011), como a da coroa do rei Hierão, onde ele mostrou que a coroa havia alguns materiais além do ouro, como tinha sido prometido pelo ourives, e ao descobrir como poderia fazer isso sem desmanchar a coroa saiu gritando “Eureka, eureka! ” pela cidade.

Há também a história de como ele fez por justificar sua afirmação, “Dê-me uma alavanca que moverei a Terra”, conseguindo mover, sozinho e sem esforço, apenas com a ajuda de um sistema de polias compostas, um navio pesadamente carregado que não podia ser retirado do cais sem grande esforço e muitos homens.(EVES,2011,p.192)

Durante sua vida, deixou diversas contribuições importantes em seus trabalhos, alguns deles são: Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas I e II, Sobre Esferas e Cilindro, Sobre as Espirais, Sobre Corpos Flutuantes, A Quadratura da Parábola e A Medida

de um Círculo (SILVA, 2019). Neste último, temos o método clássico para o cálculo de π , e o A Quadratura da Parábola, que é mais famoso deles onde “mostra-se que a área de um segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela à base” (EVES, 2011, p.194). Ambos os trabalhos fazem uso do método de exaustão de Eudoxo, como pode ser visto em Pedroso (2013).

4.3 Apolônio

Para finalizar os matemáticos gregos, temos o Apolônio de Perga (uma cidade do sul da Ásia Menor), que era aproximadamente 25 anos mais novo que Arquimedes. Não se tem muito conhecimento sobre a vida deste matemático, sabe-se que quando jovem foi para Alexandria para estudar sobre Euclides, e ficou por lá um bom tempo. Depois visitou Pérgamo, no oeste da Ásia Menor, mas logo retornou para Alexandria onde morreu por volta de 190 a.C. (EVES, 2011)

Apesar de Astrônomo, publicou diversos trabalhos sobre matemática, e sua fama está principalmente em as Seções Cônicas, que conta com cerca de 400 proposições divididas ao longo de oito livros. “Secções cônicas é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto.” (EVES, 2011, p.198)

Apesar de conter conteúdos riquíssimos, não vamos nos focar nesses livros e sim em um outro trabalho de Apolônio, intitulado de Sobre Seções Determinadas, tal trabalho é indicado por Papus.

Papus, é um outro geômetra, que viveu cerca de 500 anos depois de Apolônio, e em geral o que se tem de estudo sobre alguns trabalhos antigos é mais baseado no que ele escreveu, já que

o trabalho realmente grande de Papus é sua Coleção matemática, uma combinação de guia da geometria da época, acompanhado de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Dos oito livros que compunham a obra, perderam-se o primeiro e parte do segundo. (EVES, 2011, p.210)

Dentre esses oito livros, o mais interessante para este trabalho é livro VII onde se encontra o trabalho de Apolônio citado.

O tratado de Apolônio Sobre secção determinada estuda o que se poderia chamar de geometria analítica em uma dimensão. Considerava o seguinte problema geral, usando a típica análise algébrica grega em forma geométrica:

dados quatro pontos A, B, C, D sobre uma reta, determinar um quinto ponto P sobre ela, tal que o retângulo sobre AP e CP esteja em uma razão dada com o retângulo sobre BP e DP. Aqui, também, o problema se reduz facilmente à solução de uma equação quadrática; e, como em outros casos, Apolônio tratou a questão exaustivamente, inclusive os limites de possibilidade e o número de soluções. (BOYER, 2012, p.112)

Mais detalhes sobre esses os matemáticos citados, e seus trabalhos, podem ser encontrados no Introdução a História da Matemática de Howard Eves (2011) e em História da Matemática de Carl B. Boyer (2012).

Daremos agora um grande salto no período histórico, para falar sobre os matemáticos do século XVI, e aproveitando a temática dos matemáticos gregos para falar sobre o tamanho formalismo que era utilizado e como isso impactou os matemáticos.

4.4 Século XVI e o formalismo

Até o século de XVI, a matemática ainda era essencialmente a dos gregos, ou seja, a linguagem e os métodos eram os da Geometria (QUEIRÓ, 1993). Ainda deve-se ressaltar que na época não se tinha uma separação entre geometria e álgebra, basicamente tudo deveria passar por um processo geométrico de demonstrações.

O que acontece, é que essa ideia de demonstração geométrica passou a ser extremamente complexa para que pudesse abordar sobre alguns conceitos, “limitando” o desenvolvimento matemático do período. O primeiro passo para mudar esse caminho é a descoberta para as soluções das equações de 3º grau pelos matemáticos Tartaglia e Cardano. A partir disso, começaram a surgir outras pesquisas na área, como a resolução das equações de 4º grau por Ferrari que veio logo em seguida, e o início da manipulação com raízes de números negativos por Bombelli (QUEIRÓ, 1993).

E para que o avanço na área de álgebra fosse ainda mais significativa, algumas abordagens foram adotadas, começando pelo simbolismo que era necessário para aperfeiçoar as notações e permitir o trabalho com operações mais simples, rápidas e gerais (MILIES, 2004).

Outra medida tomada, foi de certa forma deixar de lado a ideia sintética dos gregos, que nada mais é do que o formalismo das demonstrações, a matemática grega é essencialmente axiomática utilizando muito da geometria, e isso dificultava os matemáticos a irem para novas ideias. A solução, foi simplesmente ignorar mais os

porquês de certos cálculos, e focar em como poderia se utilizar as soluções para aplicações. Essa mudança de pensamento pode ser claramente vista em trabalhos da época que simplesmente não possuem as demonstrações de seus resultados, e nos trabalhos de Leibniz e Fermat não será diferente.

É claro, que mais tarde os matemáticos voltam a tentar explicar os porquês de certas conclusões e buscar demonstrações para os resultados, mas essa mudança de pensamento proporcionou uma série de avanços matemáticos que estavam muito além do que se esperava na época, tamanho avanço que séculos depois ainda buscasse demonstrações para o que foi desenvolvido e abordado nesta época.

Para este trabalho, as demonstrações serem “deixadas de lado” durante esse período, será importante para que se possa fazer uma interpretação sobre os textos estudados.

Com isso dito, finalmente chegamos a Fermat e Leibniz, ambos serão abordados e de forma mais profunda do que os autores comentados até agora, justamente por serem os principais matemáticos deste trabalho.

4.5 Pierre de Fermat

Era filho de um grande comerciante, existem poucas evidências sobre sua educação, mas, é quase certo que estudou no Mosteiro Franciscano de Grandselve. Depois,

ele esteve na Universidade de Toulouse antes de se mudar para Bordeaux na segunda metade dos anos 1620. Em Bordeaux ele começou suas primeiras pesquisas matemáticas sérias e em 1629 ele deu uma cópia de sua restauração do trabalho de Apolônio - Planos - a um dos matemáticos da instituição. Certamente em Bordeaux ele esteve em contato com Beaugrand e durante este período ele produziu importantes trabalhos sobre máximos e mínimos, dados a Etienne d'Espagnet, que claramente compartilhava com Fermat o interesse pela Matemática. (CANTÃO, 2012, p.122)

De lá, Fermat (1601 - 1665) foi para a universidade de Orléans, onde se formou advogado civil e voltou para Toulouse onde comprou um escritório e seria ali que viveria o resto de sua vida. Em 1631, por causa de seu escritório e sendo advogado oficial do governo local, mudou o nome para Pierre de Fermat. (CANTÃO, 2012)

Será em Toulouse, que casará com uma Louise de Long, prima de sua mãe. Deste casamento, nasceram três filhos, dentre eles Clement Samuel que será o assistente pessoal de seu pai tanto nas áreas científicas como nas atividades do

escritório (ARTONI, 2014). Esse filho terá um importante papel depois da morte de Fermat.

Mesmo com o escritório, ele não deixou de se preocupar com matemática, mantendo contato com Beaugrand e conhecendo outro advogado que possuía tal interesse pelo assunto, o Carcavi, com o qual compartilhou suas descobertas.

Será Carcavi que falará das descobertas de Fermat para Mersenne em Paris em 1636. Mersenne interessado pelas descobertas sobre corpos em queda, pediu para que Carcavi colocasse ambos em contato, o que aconteceu em 26 de abril de 1636 quando Fermat responde através de uma carta, falando sobre erros encontrados no trabalho de Galileu de corpos em queda livre, nesta mesma carta ele vai aproveitar para falar sobre seu trabalho em espirais e a restauração do Planos de Apolônio. É relevante ressaltar que apesar deste primeiro contato ser principalmente sobre matemática aplicada, Fermat tinha pouco interesse em aplicações físicas, estava muito mais interessado em provar teoremas de Geometria, tanto é que ao longo desta mesma carta Fermat deixou dois problemas sobre máximos para que fossem passados a outros matemáticos de Paris. (CANTÃO, 2012)

Outras cartas serão trocadas entre os matemáticos e mais problemas irão surgindo sobre máximos e mínimos passados por Fermat. Diante da dificuldade para se encontrar respostas para tais problemas Roberval e Mersenne pedem que ele divulgue seu método para encontrar tais soluções e assim Fermat mandou o seu Método para encontrar Máximos e Mínimos, que é basicamente o Método para o Estudo de Máximos e Mínimos (CANTÃO, 2012)

Com isso sua fama como um dos maiores matemáticos da época surgiu rapidamente, e houveram tentativas de publicar alguns de seus trabalhos. Mas essas tentativas foram em vão, já que Fermat nunca fez questão de formalizar seus trabalhos para fazer publicações, o que se tinha de seu trabalho eram manuscritos que circulavam entre seus discípulos e amigos. E será neste momento que entra a importância de seu filho e assistente, já que os trabalhos não foram publicados até sua morte, Clement Samuel reuniu algumas das brilhantes conclusões de seu pai e publicou em uma compilação chamada *Varia Opera Mathematica* em 1679 (ARTONI, 2014).

Pierre de Fermat deixou diversas contribuições em distintas áreas da matemática ao longo de sua vida realizando importantes pesquisas e descobertas, na geometria analítica com o livro Introdução aos Lugares Planos e Sólidos, na teoria dos números com o famoso Último Teorema de Fermat, na teoria das probabilidades com suas cartas trocadas com Pascal que originaram conceitos usados até os dias atuais, nos corpos em queda livre nas primeiras cartas com Mersenne. (ARAÚJO, 2008)

Para este trabalho o seu texto que receberá mais foco será a sua grande contribuição para as origens do cálculo que surge através das cartas trocadas com Mersenne, o método de Fermat para encontrar máximos e mínimos.

4.6 Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), teve acesso à educação desde muito cedo, pois seu pai, que faleceu quando ele tinha apenas 6 anos, era professor universitário de Filosofia Moral, deixando assim uma vasta biblioteca em que ele pudesse estudar, de tal modo que aparentemente foi com acesso a esses livros que aos 12 anos aprendeu Latim e Grego de alto nível. (SANTOS; PEDRO; SILVA, 2007)

Estudando desde muito cedo, conseguiu entrar “na universidade de Leipzig aos 15 anos e aos 17 obteve o grau de Bacharel” (FRAZON, 2011, p.4). Aos 20 anos tentava obter o doutorado em Direito, mas isso lhe foi negado devido a sua idade, então, foi para a universidade de Altdorf em Nuremberg onde obteve seu título de doutor com uma dissertação sobre a arte combinatória.

Nesta cidade, filiou-se à Sociedade Rosa-cruz. A partir daí entrou para o serviço diplomático, ficando toda sua vida a serviço de governantes alemães e, como um influente representante destes governos, viajou para diversas cidades como Paris, Londres, Amsterdã, Rússia e Viena, onde entrou em contato com os mais notáveis cientistas (FRAZON, 2011, p.4).

Suas atividades como filósofo começaram desde muito cedo, por causa do acesso aos livros de seu pai, e será justamente a partir da filosofia que ele começará a trabalhar na matemática de forma filosófica, através da lógica. Entretanto no período entre 1666 e 1678, Leibniz não teve um desenvolvimento relevante na área da lógica, mas esse tempo foi fundamental para aprofundar suas ideias presentes na dissertação de doutorado. (FRAZON, 2011)

Para a área da filosofia, dentre os trabalhos de Leibniz dois deles se destacam, o *Princípios da Natureza e Graça Fundado em Reisson*⁶ e o “*Monadologia*”. Esse segundo trabalho originalmente não possui nenhum título, entretanto existe uma cópia do texto com o título *Princípios da Filosofia*, por Sr. Leibniz⁷, o que leva a alguns autores a acharem que esse era para ser o título da obra, porém a forma como esse texto é mais conhecido atualmente vem de *Monadologie*, que surge na primeira edição alemã, de Kohler. Ambos os textos foram destinados ao Príncipe Eugénio de Sabóia, que pediu para Leibniz um resumo de seu “pensamento” (LEIBNIZ; FERRO, 2016).

Para a matemática, o seu legado começa a ficar mais interessante por volta de 1673, quando foi para Londres para uma missão diplomática, onde apresentou sua máquina de calcular para a Real Academia de Ciências. “Esta, para além de somar e subtrair, o que já a pascalina, criada por Blaise Pascal (1623 – 1662), conseguia, efetuava também multiplicações e divisões ” (SANTOS; PEDRO; SILVA, 2007, p.8).

Leibniz tornou-se membro desta academia em Londres, onde pode ter tido o primeiro contato com os trabalhos de Isaac Newton. Ambos vieram a produzir trabalhos sobre o Cálculo Infinitesimal, Leibniz publicando o seu em 1684 e Newton em 1671, mas só o publicou em 1687, em geral atribuem a descoberta a ambos os autores, mas na época surgiu uma amarga polêmica, que persiste até depois da morte de Leibniz (SANTOS; PEDRO; SILVA, 2007).

Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. A controvérsia, que irrompeu por maquinações de outras partes, levou os britânicos a negligenciar por muito tempo os progressos da matemática no Continente em prejuízo de sua própria matemática (EVES, 2011, p.444).

O trabalho de Newton apresenta uma maior precisão técnica, entretanto está ligada diretamente a física e se utiliza muito da Geometria para sua teoria. Já o de Leibniz, este apresenta um maior refinamento lógico e filosófico, o que, apesar de menos preciso, torna mais fácil de ser entendido.

O trabalho de Leibniz em questão é o Novo Método para Máximos e Mínimos, que será o trabalho utilizado. Escolhemos ele exatamente por Leibniz utilizar uma

⁶ *Principes de la Nature et de la Grace Fondés em reisson*

⁷ *Les principes de la philosophie, par Monsieur Leibniz*

notação que diz mais sobre sua teoria e além de facilitar o entendimento das propriedades, como falaremos mais adiante.

Para que o trabalho pudesse ser realizado, e os respectivos textos analisados foram utilizadas algumas metodologias que estão descritas logo abaixo.

5 METODOLOGIA

Trata-se de investigação realizada a partir de pesquisa bibliográfica, seguida de uma análise dos principais textos e pôr fim a criação de uma proposta de uma oficina.

A pesquisa bibliográfica foi realizada junto a diversos trabalhos com um enfoque maior em dois trabalhos, o Novo Método para Máximos e Mínimos de Leibniz e o Método para o Estudo de Máximos e Mínimos de Fermat. Tal metodologia é extremamente comum, sendo realizada por todos os alunos em algum momento.

A pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental nos cursos de graduação, uma vez que constitui o primeiro passo para todas as atividades acadêmicas. Uma pesquisa de laboratório ou de campo implica, necessariamente, a pesquisa bibliográfica preliminar. Seminários, painéis, debates, resumos críticos, monográficas não dispensam a pesquisa bibliográfica. Ela é obrigatória nas pesquisas exploratórias, na delimitação do tema de um trabalho ou pesquisa, no desenvolvimento do assunto, nas citações, na apresentação das conclusões. Portanto, se é verdade que nem todos os alunos realizarão pesquisas de laboratório ou de campo, não é menos verdadeiro que todos, sem exceção, para elaborar os diversos trabalhos solicitados, deverão empreender pesquisas bibliográficas (ANDRADE apud SOUSA; OLIVEIRA; ALVES, 2021, p. 65).

A ideia de trabalhar com tais textos, surge através do orientador deste TCC, que os buscava, por curiosidade, de modo que não tivessem opiniões de outros autores, e assim compreender suas ideias e conclusões mais originais possíveis.

5.1 Os Textos de Fermat e Leibniz

Tendo isso em mente, os dois textos mais próximos encontrados, e que fosse de fácil compreensão foram o Um Novo Método para Encontrar Máximos e Mínimos⁸ que é uma tradução direta do original do Leibniz em Latim para o inglês, e o Método para o Estudo de Máximos e Mínimos⁹ que é o de Fermat traduzido do francês para o inglês.

Alguns pontos devem ser ressaltados sobre os textos, primeiramente o de Fermat, não temos o original de fato pois ele foi escrito em Latim e utilizando a linguagem do matemático François Viète, que é o

[...]responsável pela introdução de vários símbolos na matemática e aos poucos foi substituindo as palavras nas equações, sendo por esse motivo conhecido, por muitos, como o Pai da Álgebra. Usou as vogais para representar as incógnitas, substituiu as palavras mais e menos por p e m

⁸ *A New Method for Finding Maxima and Minima*

⁹ *Method for the Study of Maxima and Minima*

respectivamente, escrevendo o traço sobre essas letras significando que elas estão sendo usadas como símbolos matemáticos. (SILVA; OLIVEIRA; LIMA, 2021, p.353)

Por exemplo “para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escreveria em bom latim: *5 in A quad. Et 9 in A planu minua 5 aequatur 0. (5 em A quadrado e 9 em A plano menos 5 é igual a zero)* ” (VENTURI, 1949, p.18-19). O que dificultaria ainda mais o entendimento do trabalho de Fermat.

Para contornar essa linguagem temos que, o texto original foi passado para francês utilizando de uma simbologia algébrica moderna baseada em René Descartes, apresentada por ele no A Geometria¹⁰ anexo do famoso livro Discurso Sobre o Método¹¹. Neste anexo temos a construção dessa forma de se escrever matemática, além de defendê-la explicando como ela deve ser escrita e o que significa, por exemplo, ele escreve:

$$z = b$$

$$\text{ou } z^2 = -az + b^2$$

$$\text{ou } z^3 = +az^2 + b^2z - c^3$$

E depois explica,

portanto, z que tomo por quantidade desconhecida é igual a b ; ou, o quadrado de z , é igual ao quadrado de b , menos a multiplicado por z ; ou, o cubo de z , é igual a a multiplicado pelo quadrado de z , mais o quadrado de b multiplicado por z , menos o cubo de c (DESCARTES, 2015, p.15)

Ou seja, ele formaliza a maneira como escrevemos matemática até os dias atuais, e será para essa notação que o texto de Fermat foi passado.

Essa tradução do Latim para o francês está no livro *Œuvres de Fermat*¹²(1895) contendo diversos outros textos de Fermat em francês. E a tradução para o inglês foi feita por Jason Ross, e para este trabalho foi traduzido para o português através de conhecidos que possuem fluência nesta língua, e está disponível no Anexo 2.

O segundo trabalho é o de Leibniz, esse já foi escrito inicialmente com a notação de Descarte e foi traduzido direto do Latim para o inglês por Ian Bruce, que é

¹⁰ *La Geometrie*

¹¹ *Discours de la Methode*

¹² *Œuvres de Fermat*, traduzido para o Frances por M. Paul Tannery, pode ser acessado através de:

<https://www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/oeuvresdefermt03ferm.pdf> , para aqueles que buscam uma versão ainda mais próxima dos trabalhos originais de Fermat escritos em Latim.

um pesquisador independente com o objetivo de fornecer, aos estudantes e professores de matemática, livre acesso a textos em inglês originais dos autores que datam de aproximadamente de 1600 até 1750, que é quando mais ou menos surge os métodos analíticos modernos (BRUCE, 2022). Em seu site onde divulga as traduções a 16 anos, consta com mais de centenas de traduções que são utilizadas por todo o mundo, dentre tantas traduções temos o Um Novo Método para Encontrar Máximos e Mínimos de Leibniz. Este texto também foi traduzido para o português através de conhecidos, e está disponível no Anexo 1.

Apesar de não ser o foco deste trabalho, também existe o Anexo 3, contendo uma tradução para o português do Métodos de Máximos e Mínimos de Fermat e de tangentes. Uma reconstrução¹³ de Strømholm. Esse texto consta com a reconstrução dos trabalhos de Fermat, o que irá ajudar a fazer a análise de seu texto, além de ser um texto bastante comentado ao longo das pesquisas. Por essa importância, e pela disponibilidade de conhecidos o texto foi traduzido e será utilizado ao longo da Análise.

5.2 Método de Análise

Para se realizar estudos críticos em cima destes trabalhos foram utilizadas ideias do livro Análise de Conteúdo de Lowrence Bardin (2011). Deve-se ser ressaltado, e de forma clara, que não foi realizado a análise de conteúdo de Bardin, utilizou-se somente a ideia por trás dessa análise que é a descrição do conteúdo da mensagem, de tal modo “[...]que permita fazer inferências de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção”(BARDIN, 2011, P.48). E essa mensagem pode ir tanto para a área linguística como para a documental, que será o foco para este trabalho.

Com isso em mente, optou-se por criar três categorias: método, explicações e exemplos, essa criação se deu pelo simples fato de serem tópicos importantes e que estão presentes em ambos os textos.

Essa abordagem foi escolhida por se encaixar perfeitamente no que foi realizado no trabalho, além de ser uma forma de deixar claro ao leitor como que a análise dos textos foi feita. Sabe-se que Análise de Conteúdo é um processor complexo, de extrema importância, e que inclusive poderia ser utilizada para este

¹³ *Fermat's Methods of Maxima and Minima and of tangentes. A Reconstruction*

trabalho. Porém, por questões de tempo e da extensão deste trabalho, somente foi aproveitado as ideias de Bardin.

5.3 A Proposta

Foi pensado algumas vezes como poderia se escrever uma forma de introduzir os conceitos estudados, mas a partir de algumas conversas optou-se por propor a ideia inicial de uma oficina.

A ideia dessa oficina, seria mostrar introdução de conceitos iniciais do cálculo, partindo da ideia de Fermat e Leibniz, que são mais intuitivas comparado com a ideia do cálculo 1 que em geral é passada para os alunos.

É claro que para esta proposta alguns assuntos ficam de fora, como é o caso das integrais, que seria necessário estudar outros autores antigos que abordaram de forma mais direta sobre o assunto.

Como se trata de uma proposta, cabe aos futuros trabalhos modificar, melhorar e adaptar da forma que acharem melhor, para então construir uma aplicação. Assim como, aprofundar os estudos para a área de integrais e deixar a proposta de forma mais completa abrangendo melhor os principais conteúdos iniciais de cálculo.

6 ANÁLISE DOS TEXTOS

Os textos foram analisados separadamente, cada um deles seguindo as categorias comentadas na metodologia.

6.1 Fermat

As cartas de Fermat possuem um grande problema, que é exatamente o fato de serem cartas e não uma publicação, fazendo com que a sua teoria não esteja de forma direta e simples acesso.

Além disso, a informalidade de uma carta faz com que certos termos, ou a maneira de se dizer algo, mudem de uma carta para outra, o que é prejudicial quando buscasse entender sua lógica por traz do método.

6.1.1 *Método de Fermat*

Nas primeiras páginas de seu trabalho uma coisa já é deixada bem clara. Ele criou um método para resolver máximos e mínimos, e que segundo ele, para resolver os exemplos desse tipo basta aplicarmos o método que teremos uma resposta. Também temos o método para encontrar as tangentes que é levemente diferente do de máximos e mínimos, tanto é que para ele esse segundo método é um caso especial do método geral.

Interessante observar, que Fermat vai para um extremo quando se fala sobre não se preocupar com os porquês de o método funcionar, indo para uma matemática mais antiga que a dos gregos, uma matemática em que o importante é estar funcionando para os problemas que estão sendo propostos.

Essa falta de explicações para o método faz com que haja uma pressão sobre Fermat com matemáticos dizendo sobre erros em seu trabalho e pedindo demonstrações que justificassem o método, essa pressão pode ser vista ao longo do texto, como por exemplo em Fermat (1638, p.135) temos o início de uma de suas cartas, e ao fim do primeiro parágrafo temos “[...] e portanto provar aqui, por esse novo exemplo e por um novo e brilhante emprego deste método, o erro daqueles que acreditam que ele é defeituoso”.

Com relação a demonstração, Fermat comenta “eu não adiciono a demonstração da regra, nem as outras inúmeras aplicações que poderiam confirmar

o alto valor da regra, [...]”, o que nos dá a entender que ele possuía tal demonstração. Porém, Fermat não mostrou nenhuma demonstração neste trabalho como também observado por Strømholm (1968, p.50) “Em lugar nenhum de seus primeiros escritos existe uma prova dada por Fermat para este procedimento. Isto, como tentarei mostrar, foi pela simples razão de que não existia tal prova”. Mais tarde, Fermat tenta uma demonstração para justificar o seu método, que como pode ser visto ao longo no anexo 3 estava errada.

Para aprofundarmos um pouco mais o estudo sobre o método,

Seja a uma variável desconhecida escolhida arbitrariamente da questão (se tem uma, duas ou três dimensões, como segue na declaração). Expressaremos a quantidade máxima ou mínima em termos de a , através de termos de qualquer grau. Substituiremos então $a + e$ pela desconhecida a , e expressaremos a quantidade máxima ou mínima em termos que contenha a e e em qualquer grau. Vamos *ad-equate*, como diz Diophantus, as duas expressões da quantidade máxima e mínima, e removeremos delas os termos comuns em ambos os lados. Tendo feito isso, descobriremos que, em ambos os lados, todos os termos envolvem e ou dependem de e . Dividiremos todos os termos por e ou pelo maior termo dependente de e , de modo que em pelo menos um dos lados e desapareça. Eliminaremos então todos os termos onde e (ou um de seus dependentes) ainda exista, e vamos considerar os outros iguais, ou se não houver termos em nenhum dos lados, é necessário igualar os termos adicionados com os termos subtraídos, que passaram a ser iguais. A solução da última equação resulta no valor de a , que será máximo ou mínimo, da expressão original. (FERMAT, 1638, p.121)

Primeiramente, pode-se observar que Fermat utiliza as letras a e e para os valores desconhecidos, que hoje seria como x e y . Porém, como comentado, Fermat seguia a linguagem matemática de Viète e as letras utilizadas na versão original não foram alteradas quando fizeram a tradução para uma linguagem matemática mais próxima de Descarte. Também são utilizadas as consoantes para os valores constantes.

Observa-se também que temos o termo “*adquate*” que optamos por não traduzir, já que uma tradução perderia parte do sentido deste termo tão importante. *Adquate* ou do latim *adaequalitas*

foi o método do algebrista grego para encontrar uma solução de uma equação indeterminada que fosse o mais próximo possível de um determinado número. Heath chamou este método de “Método de Aproximação dos Limite”; uma melhor interpretação seria talvez “o método de variação de quantidades pequenas”. A base da aproximação de Fermat, foi a comparação das duas expressões que, embora tivessem a mesma forma, não eram exatamente iguais. Essa parte do processo é chamada de “*comparare per adaequalitatem*” ou “comparador *per adaequalitatem*” (STRØMHOLM, 1968, p.50).

Para Fermat em certo momento trabalhamos com a igualdade, depois com *adquate* para voltarmos então para uma igualdade, alguns autores utilizam o termo “pseudo-igualdade” para falar sobre o *adquate*. Seu método fica claro quando tratamos do seu primeiro exemplo proposto, que será abordado mais abaixo.

6.1.2 Explicações

Ao longo do texto teremos várias cartas, como já comentado, Fermat não publicou nenhum destes textos o que temos são suas cartas, em cada uma delas ele fala um pouco sobre o método e nos dá pequenas dicas de como ele construiu o raciocínio para o método.

Também sabemos que o método de Fermat não é perfeito, e possui algumas falhas, que são exatamente com relação ao e , pois, em certo momento, dividisse por e até que tenhamos algum termo sem e , logo depois eliminasse todos os termos que contenham e .

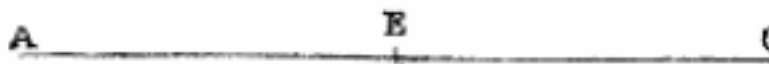
Ambos os assuntos não serão aprofundados neste trabalho, até porque acreditamos que tal assunto foi muito bem abordado por Strømholm e para os que quiserem realizar estudos aprofundados podem ler na íntegra o seu texto no anexo 3. Focaremos assim em mais alguns pontos que achamos importantes de serem ressaltados.

6.1.3 Exemplos

Iniciaremos mostrando o primeiro exemplo em Fermat (1638), temos de forma mais simples como o método era usado.

Divida a linha AC (fig. 2) em E, de modo que AExEC seja máximo.

Figura 2 – Seguimento AC



FONTE: (FERMAT, 1638, p.121)

Tomemos $AC = b$; deixe a ser um dos segmentos, e que o outro segmento seja $b - a$, e o produto cujo máximo que precisamos encontrar é: $ba - a^2$. Agora faça $a + e$ ser o primeiro segmento de b , o segundo $b - a - e$, e o produto dos dois segmentos será: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Deve ser igual ao produto anterior:	$ba - a^2;$
Removendo os termos em comum:	$be \sim 2ae + e^2;$
Dividindo todos os termos por e :	$b \sim 2a + e;$
Remova e :	$b = 2a.$

Portanto, para resolver o problema, a metade de b deve ser tomada.

Neste exemplo, ele nos diz que $ba - a^2 \sim ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ o símbolo $\sim$ representa exatamente o processo *adquate* pois sabemos que os dois lados são diferentes, pois um deles possui $a + e$ no lugar de a , mas com o $\sim$ ele trabalha como se os lados fossem iguais. Quando removemos o e os lados voltam a ser considerados iguais.

Isso nos mostra que, Fermat considerava os lados próximos, e para que fosse verdade e deve ser um valor “pequeno”, dizemos “pequeno” pois Fermat não traz uma definição exata para e . Nos dias atuais utilizamos o termo infinitesimal, mas tal analogia com o e ser algo tão pequeno não é feita.

Gerando assim, algumas dúvidas sobre até onde ele sabia sobre o seu método, tais dúvidas são o foco de pesquisa de Strømholm, onde propõem que os conhecimentos de Fermat não surgiram de acordo com a data das cartas, seguindo uma nova ordem faria sentido ter chegado a tal método.

Outro fator bastante relevante inclusive para entendermos a lógica por trás desse método, e agora abusando um pouco do texto utilizando uma linguagem atual. Chamemos $ba - a^2 = f(a)$ e com isso $f(a + e) = b(a + e) - (a + e)^2$, reescrevendo o que temos no exemplo:

$$f(a) \sim f(a + e)$$

$$f(a) - f(a + e) \sim 0$$

Dividindo por e assim como temos no exemplo,

$$\frac{f(a) - f(a + e)}{e} \sim 0$$

Para os mais atentos, já perceberam que isso tem uma cara muito semelhante a algo que conhecemos hoje em dia como derivada, e neste caso igualando a 0 que é exatamente o processo para se encontrar um ponto crítico de uma função no cálculo.

Só que no cálculo temos os conceitos de limites que fazem com que a *adquate* passe a ser uma igualdade.

Apesar de focar mais neste exemplo, exatamente por sua simplicidade, nas cartas de Fermat temos muitos outros exemplos, e sobre assuntos diferentes abordados através de seu método, como o cálculo de centro de gravidade e tangentes. Entretanto, para compreendemos e comentar mais profundamente sobre eles seriam necessários outros estudos que não puderam ser realizados.

Porém, um fato extremamente importante deve ser destacado, como Fermat não possuía uma demonstração para seu método ele precisava mostrar que funcionava. A melhor forma de mostrar que seu método funciona, sem uma demonstração, é através de exemplos, e será exatamente isso que ele irá fazer ao longo das cartas.

O ponto é de onde que ele vai retirar esses exemplos. Como ele queria que seu método fosse valorizado e reconhecido ele buscou em grandes matemáticos famosos da antiguidade, como Arquimedes e Apolônio.

No caso de Arquimedes, ele utiliza o cálculo para a superfície máxima de um cone inscrito em uma esfera determinada e um exemplo do *De æquiponderantibus* para encontrar o centro de gravidade do conóide de Arquimedes. Em ambos os casos ele usa o método, inclusive ao final do cálculo da superfície do cone é o momento onde ele deixa claro que o método para encontrar tangentes “procede do método geral”.

De Apolônio ele é um pouco mais específico, utilizando o livro Sobre Seções Determinadas¹⁴ e utilizando os comentários de Pappus sobre a dificuldade de tais exemplos, dificuldade essa que também é reconhecida por Fermat. E será por ter essa dificuldade, que ele pega esse exemplo e mostra como o seu método consegue resolver de forma simples e chegar ao mesmo resultado de Apolônio.

Essas comparações com exemplos de Apolônio considerados difíceis por Pappus, se repetem em uma outra carta e, do mesmo modo, ele afirma como seu método é simples e chega às mesmas conclusões.

¹⁴ *On the Determined Section*

O que deixa a entender com esses exemplos, buscados tanto em trabalho de Arquimedes como de Apolônio, é que ele buscava mostrar que seus resultados resolviam problemas tão difíceis quanto os que esses autores propunham, porém de uma forma mais simples e direta.

Por fim, temos ainda alguns exemplos que não estão relacionados a esses, e sim a outros matemáticos da mesma época. Aqui vale destacar um matemático já comentado, Descarte, esse que se envolveu por certas polêmicas com Fermat com relação aos trabalhos de refração, em que Fermat questionou as deduções nos trabalhos de Descarte, e este por sua vez questionou o método de Fermat.

As duas últimas cartas contam exatamente as ideias que Fermat dará sobre as refrações, e ambas se referem a Descarte, a primeira mostrando uma forma de chegar às mesmas conclusões usando o método. A segunda, ele estabelece um princípio de que a luz sempre percorre o caminho mais curto, o que hoje é uma das leis básicas da ótica, mas que na época não deram muita atenção para seu resultado (CANTÃO, 2012).

6.2 Leibniz

O trabalho de Leibniz já é bem diferente do de Fermat, um dos motivos mais claros é o fato de Leibniz ter publicado o trabalho, o que já traz um formalismo e algumas explicações. Porém, ainda temos um texto bastante complexo e de difícil entendimento, já que em certos momentos ele não explica aos detalhes o que está fazendo deixando alguns pontos do texto implícitos, e além disso, assim como Fermat, as demonstrações não são o fato mais importante, e sim sua aplicação.

Sendo assim, o primeiro fato interessante a ser ressaltado deste trabalho é exatamente a falta de demonstrações, em nenhum momento Leibniz se preocupa em demonstrar seus resultados, nem comenta sobre a existência de tal. Isso pode ocorrer por uma ideia simples: para ele os resultados eram óbvios, essa afirmação pode parecer exagerada, mas como mostraremos mais adiante, se seguirmos sua definição teremos em poucas linhas grandes resultados. Mas antes disso, vamos falar sobre o que ele define e qual o seu método utilizado no trabalho.

6.2.1 Método de Leibniz

Em vez de exatamente um método, neste trabalho temos uma definição, que é a de diferenças, ou como Leibniz chama, diferenças. Os diferenciais são trazidos inicialmente, somente como um operador de diferenças, $dx = x_1 - x_0$.

Mais à frente ele comenta como essa diferença infinitamente pequena, lembrando que não se pensava sobre um conceito de limite como temos hoje, já que tal conceito só vai ser dado no século XIX (SAPUNARU; SOUZA; PELLI; SANTIAGO, 2013). Essa ideia de infinitamente pequeno está muito mais próximo de algo intuitivo, como temos o teorema de exaustão de Eudoxo, se pensarmos neste teorema entendemos melhor o que Leibniz quer dizer com “como pode ser considerado em geral, encontrar uma tangente é desenhar uma linha reta, que une dois pontos da curva com uma diferença infinitamente pequena, ou o lado de um polígono angular infinito produzido, que é equivalente à curva para nós” (LEIBNIZ, 1687, p.470), sem usar o conceito de limites.

Um exemplo que nos ajuda a entender é pensarmos no tamanho de uma formiga, comparado com o tamanho do planeta, a formiga é infinitesimal com relação ao planeta. Para Leibniz, o diferencial é algo extremamente pequeno, “desprezível”, quando comparado com o todo.

Infelizmente a teoria de Leibniz está incompleta, já que a ideia dos infinitesimais só vai ser formalizada com a criação das definições dos limites. Essa falta de formalização vai ser um dos grandes pontos a serem criticados por pensadores da época, como o Michael Rollé (SAPUNARU; SOUZA; PELLI; SANTIAGO, 2013), tanto são as críticas, que existem cartas de Leibniz enviadas a outros pensadores sobre o debate interessantíssimo sobre o cálculo infinitesimal, como é o caso da carta enviada ao matemático Dancicourt que foi traduzida por Silva e Piauí (2012), nesta carta em questão, ele comenta tanto sobre ideias filosóficas como sobre o cálculo infinitesimal, mostrando como o debate sobre os infinitésimos e infinitos era tratados como algo extremamente filosófico por Leibniz.

Além disso, apesar de comentar sobre dx ser infinitesimal, não diferencia o seu operador de uma diferença qualquer, hoje em dia chamamos uma diferença qualquer de Δx .

Uma curiosidade histórica sobre esse fato, que está mais para uma especulação história dos autores deste trabalho, é que esta diferenciação entre dx e

Δx pode ter surgido a partir da Nicolaus de Daniel Bernoulli, pois podem ter trabalhado com o cálculo durante o período que estava na antiga Academia das Ciências de São Petersburgo, hoje chamada de Academia de Ciências da Rússia. Essa ideia pode parecer estranha, mas se observarmos a letra D em cirílico temos que no lugar de dx eles escreviam dx , e quando analisado por matemáticos do ocidente pode ter sido facilmente entendido como Δx . Essa especulação se torna mais provável quando observamos que Nicolaus e Daniel eram filhos de Jean Bernoulli, que por sua vez foi discípulo de Leibniz, Nicolaus morre menos de ano após chegar na Rússia, mas Daniel permaneceu na Rússia e logo passou a trabalhar com Leonard Euler, discípulo de Jean Bernoulli. Dessa forma, como discípulos de discípulos não seria difícil que tivessem acesso aos trabalhos de Leibniz e pudessem começar a trabalhar com as ideias dos diferenciais e de diferenças quaisquer. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002)

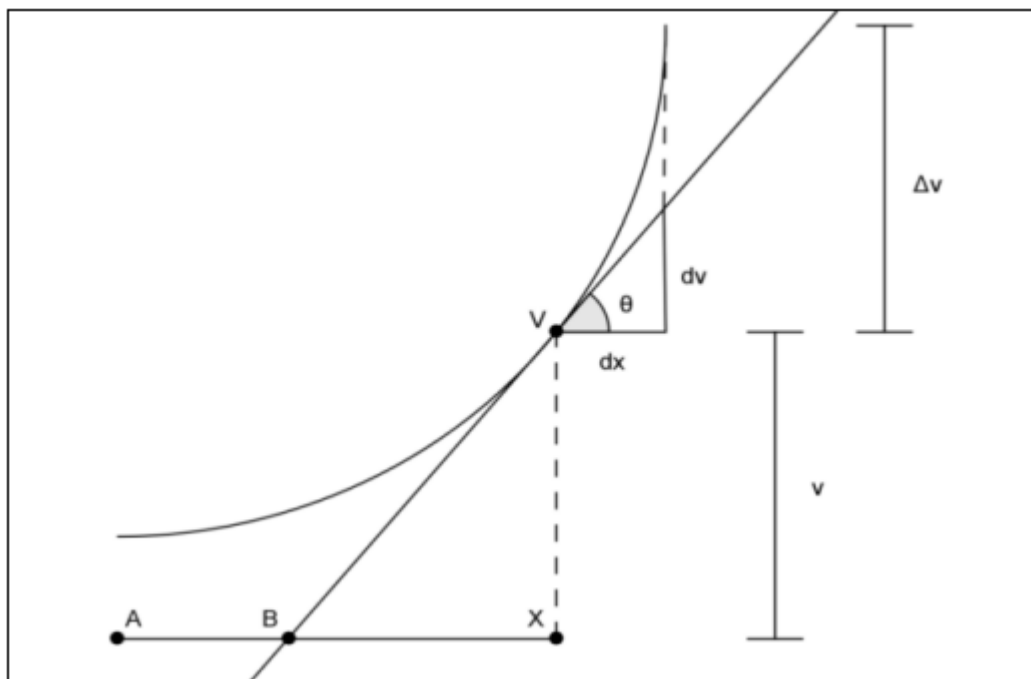
Não temos um trabalho para embasar essas afirmações acima, por isso consideramos simplesmente como uma especulação histórica, as afirmações históricas que foram utilizadas e que ajudam nesta ideia foram retiradas do *MacTutor*, projeto da *University of St Andrews*.

E para finalizar essa primeira parte da análise, temos um dos pontos mais importantes, que está de forma muito sucinta, o trecho em questão é:

“Se dv deve ser infinito em relação a dx , então a tangente está perpendicular ao eixo, ou é a própria ordenada. Se dv e dx forem iguais, a tangente forma um meio ângulo reto com o eixo”(LEIBNIZ, 1684, p.468).

Apesar de não dizer de forma clara, temos que para Leibniz as tangentes em um certo ponto é a divisão dos diferenciais, ou dizendo de forma mais atual, o que ele basicamente está dizendo é que a derivada é a divisão dos diferenciais. Para que fique melhor entendido, será utilizada uma explicação dada no Os Conceitos de Infinitesimais e Diferenciais nas Regras de Derivação de Leibniz (SAPUNARU; SOUZA; PELLI; SANTIAGO, 2013). Este trabalho em questão, também buscou compreender os pensamentos originais de Leibniz, e como concordamos com tal pensamento, ele será utilizado para ajudar a explicar melhor essa ideia.

Figura 3 – Diferencial de Leibniz



Fonte: (SAPUNARU; SOUZA; PELLI; SANTIAGO, 2013, p.10)

Leibniz define sua diferencial da seguinte forma: consideremos, como na Figura 2, o eixo AX e a curva passando pelo ponto V . Consideremos ainda uma reta tangente à curva passando por V , interceptando o eixo AX no ponto B . De acordo com a Figura 2, a distância do ponto X ao ponto V é denominada v . Dado um segmento arbitrário de comprimento dx , a diferencial dv é definida usando a relação de semelhança entre triângulos retângulos. O menor de lados dv e dx e o maior de lados v e BX , através da fórmula. (SAPUNARU; SOUZA; PELLI; SANTIAGO, 2013, p.10)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{BX}$$

Em termos mais atuais, sabemos que $dx \neq 0$, $\frac{dv}{dx}$ será a $\text{tg}(\theta)$ que é o coeficiente angular e que dv é uma função linear de dx , em que dx é um segmento variável. O que se tem atualmente no cálculo quando calculamos as derivadas é exatamente essa divisão desses diferenciais, porém muito melhor definido utilizando o conceito de limite.

6.2.2 Explicações

Após uma breve definição para os diferenciais, e algumas importantes observações, ele começa a explicar como eles se comportam de maneira bem direta e, assim como Fermat, sem se preocupar em dar muitas explicações. Entretanto, quando estudado o seu texto percebe-se que muitas das conclusões que ele dá,

seguindo a sua definição dada, são quase diretas. Se tratarmos dx como uma diferença entre dois valores x_0 e x_1 , temos de imediato que $dk = 0$, sendo k uma constante qualquer, pois a diferença de k até ele mesmo, ou seja $k - k = 0$, ou ainda, quando temos uma constante multiplicando o x , ou seja $d(k \cdot x)$, seguindo a ideia de Leibniz teríamos $d(k \cdot x) = k \cdot x_1 - k \cdot x_0 = k \cdot (x_1 - x_0) = k \cdot dx$.

O que nos leva a considerar, que Leibniz simplesmente pode não ter se preocupado em demonstrar tais conclusões por achar elas extremamente simples, e demonstrar tais resultados não era o ponto mais importante do trabalho, e sim mostrar como ele funcionava e mostrar exemplos que podia resolver.

Para entender melhor a simplicidade de seus resultados, foi escolhido exemplos dos diferenciais, o da multiplicação e o da divisão e mostraremos duas formas de se chegar a cada um dos resultados. A primeira da forma é a como acreditamos que Leibniz tenha pensado usando puramente sua definição, e a segunda é usando o conceito de limite e um conceito mais formal para derivadas.

Como este trabalho trata-se de uma análise de conteúdo, as inferências que já foram e continuaram sendo feitas em cima do trabalho de Leibniz podem distinguir de outros trabalhos, como por exemplos já citado trabalho de (SAPUNARU; SOUZA; PELLI; SANTIAGO, 2013), apesar de termos certas interpretações em comum, na parte abaixo temos diferentes formas de expor como Leibniz chegou a algumas conclusões. Portanto, para aqueles interessados no assunto, e que queiram ver outra interpretação e até mais alguns detalhes sobre o trabalho, podem consultar o texto citado nas referências deste trabalho.

Multiplicação:

$$d(x \cdot v) = x \cdot dv + v \cdot dx$$

Utilizando a definição de Leibniz sabemos que dx é uma diferença muito pequena entre dois valores de x , podemos reescrever dx como,

$$dx = (x + dx) - x$$

E do mesmo modo em um dv . Logo, seguindo os diferenciais definidos até o momento teríamos que,

$$d(x \cdot v) = (x + dx)(v + dv) - x \cdot v$$

$$d(x \cdot v) = x \cdot v + x \cdot dv + dx \cdot v + dx \cdot dv - x \cdot v$$

$$d(x \cdot v) = x \cdot dv + dx \cdot v + dx \cdot dv$$

Como para Leibniz dx e dv são valores infinitesimais, o produto deles seria um valor desprezível, e simplesmente poderíamos ignorar tal termo ficando somente com

$$d(x \cdot v) = x \cdot dv + v \cdot dx$$

Para mostrar a demonstração pela definição utilizada no cálculo 1, temos primeiro que definir a derivada, seguindo que tem-se em Araújo (2010, p.63):

“A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1 , denotada por $f'(x_1)$, é definida pelo limite $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, quando este limite existe. Neste caso, dizemos que a função $f(x)$ é derivável (ou diferenciável) no ponto x_1 ”

Além disso, ela continua:

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$ tal que seu valor em qualquer x pertencente ao domínio de f é dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se este limite existe. Dizemos que a função é derivável quando existe derivada em todos os pontos de seu domínio. (ARAÚJO, 2010, p.63)

Utilizando essa definição Araújo (2010) traz para a regra do produto, que:

Sejam f e g duas funções e p a função definida por $p(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $p'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot [g(x+h) - g(x)] + g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} = \\ &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Ambas as demonstrações chegam a um mesmo resultado, porém uma está utilizando um conceito que Leibniz não possuía na época, o limite. Fica evidente também que no caso da primeira forma temos uma parte que simplesmente é desprezada enquanto na segunda, que é mais formal, não temos nenhum ponto de estranheza nos cálculos, porém é fundamentalmente mais complexa.

Para ilustrar ainda mais a diferença entre as duas formas, temos também o cálculo de diferenciais para divisão.

Divisão:

$$d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{v \cdot dx - x \cdot dv}{v^2}$$

Utilizando da mesma ideia inicial de Leibniz tanto para x como para v temos que,

$$d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{x + dx}{v + dv} - \frac{x}{v}$$

$$d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{v \cdot (x + dx) - x \cdot (v + dv)}{v \cdot (v + dv)}$$

$$d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{v \cdot x + v \cdot dx - x \cdot v - x \cdot dv}{v \cdot (v + dv)}$$

$$d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{v \cdot dx - x \cdot dv}{v \cdot (v + dv)}$$

Lembrando que, Leibniz considerava dv um valor extremamente pequeno comparado ao todo, ou seja, podemos pensar que nas multiplicações esse valor faz uma grande diferença, mas na soma não. Por exemplo, $1000000 \cdot 0,000001 = 1$, mas $1000000 + 0,000001 \approx 1000000$, portanto para $v + dv$ podemos considerar que é igual a v . Logo

$$d\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{v \cdot dx - x \cdot dv}{v \cdot v}$$

Mais uma vez, utilizando definição de cálculo 1 já apresentada, vamos utilizar novamente o texto de Araújo (2010):

Sejam f e g duas funções e q a função definida por $q(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$.

Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $q'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h) + f(x).g(x) - f(x).g(x)}{g(x+h).g(x)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h).g(x)} = \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x)} = \\
 &= \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}
 \end{aligned}$$

Observando tanto a multiplicação quando a divisão, podemos perceber uma bela semelhança entre ambas as formas de chegar ao resultado, mas a de Leibniz através de passos que são mais intuitivos e não necessitam de uma definição formal para ser entendida, basta saber como Leibniz definiu o seu operador, o diferencial. Enquanto do outro lado, temos a demonstração, que possui sua formalidade e sua grande importância, por dar uma explicação mais completa que a de Leibniz.

Também temos que Leibniz traz as regras:

Potências:

$$dx^a = a \cdot x^{a-1} dx$$

$$d \frac{1}{x^a} = - \frac{a dx}{x^{a+1}}$$

Raízes:

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$$

Por fim, cabe aqui uma breve explicação de algo comentado por Leibniz, que está junto a ideia de relação entre dv e dx onde dv depende de dx . Quando encontrado o $\frac{dv}{dx}$ em um certo ponto de uma curva, se esse valor for positivo temos que a curva neste ponto é crescente, se negativo será decrescente, mas quando $\frac{dv}{dx} = 0$ ele dá um destaque maior dizendo:

[...]nada acontece sobre o ponto médio M , no qual as mudanças de v não aumentam nem diminuem, mas estão em repouso e, portanto, como consequência dv igual a 0, onde zero refere-se a uma quantidade nem positiva nem negativa, pois $+0$ é igual a -0 : portanto, na própria posição v , verdadeiramente, a ordenada LM é um *Máximo* (ou se a convexidade pode ser girada em direção ao eixo, um *Mínimo*) e a tangente da curva em M não é desenhada acima de X em direção a A em qualquer lugar próximo ao eixo, nem abaixo de X no sentido oposto, mas paralelo ao eixo (LEIBNIZ, 1684, p.468)

Basicamente ele está dizendo que quando a relação dos diferenciais (derivada) for igual a zero, temos um ponto de máximo ou mínimo, que é exatamente a ideia por trás do método trabalhado por Fermat.

Leibniz vai ainda um pouco além nessa ideia de observar alguns pontos específicos da curva, analisando o ponto de inflexão “E, portanto, um ponto de curvatura contrária [ou seja, um ponto de inflexão] tem lugar, quando nem v nem dv podem se tornar 0, mas ddv é 0” (LEIBNIZ, 1684, p.468) O que basicamente temos é que a relação do diferencial do diferencial (ddv) com relação à dx é 0 quando temos um ponto de inflexão. Para a linguagem atual do cálculo ele está dizendo que a segunda derivada é igual a 0 nos pontos de inflexão.

6.2.3 Exemplos

Na parte final do trabalho temos alguns exemplos. O primeiro é uma aplicação algébrica de suas regras através de uma conta relativamente grande, não tão complexa já que é basicamente aplicações consecutivas de suas regras.

Os dois exemplos seguintes são com relação à ótica, o primeiro muito semelhante ao que Fermat fez logo após dizer que a luz deve sempre fazer o caminho mais rápido. Em ambos o foco é encontrar a tangente, para isso, basicamente Leibniz

busca encontrar o coeficiente angular da reta, através do método de divisão de diferenciais já comentado.

E ele diz que:

[...],e dessa forma é que temos a crença de que o uso de nosso método facilita a resolução do exemplo mais raro. E estes são, de fato, apenas o início de um certo tipo de geometria muito mais sublime, estendendo-se aos mais difíceis e belos problemas, com uma mistura de matemática que sem nosso cálculo diferencial, ou algo semelhante, não será capaz ser tratado com a mesma facilidade, mas sim cegamente (LEIBNIZ, 1684, p.474)

Para reafirmar essa ideia de exemplos raros, e finalizar o texto e com isso esta análise, no último exemplo temos um problema proposto por De Baune a Descarte, em que utiliza de um caso específico para falar brevemente sobre como a curva necessariamente será logarítmica através de seus diferenciais. Nas anotações feitas das traduções para o inglês, fica mais claro que Leibniz está falando sobre os diferenciais resultarem em logaritmos, e que seria a função inversa a da exponencial.

7 A PROPOSTA

Neste penúltimo capítulo trazemos a ideia inicial de uma oficina, inicialmente foi considerado montar um curso de fato, mas por questões de tempo optou-se somente pela proposta da oficina.

Em um primeiro momento considera-se que esta proposta seja adequada para a construção de uma oficina que pode ser aplicado em eventos. Porém, com certos estudos e uma ampliação dos conteúdos estudados para além do cálculo diferencial, indo para as ideias de integrais, como as de Arquimedes para a aplicação do teorema de exaustão, e estudando sobre as integrais depois de Leibniz, acreditasse que a proposta possa ser estendida até para uma matéria optativa a ser ofertada.

Neste último caso a ideia poderia partir do teorema de exaustão e chegar até o teorema fundamental do cálculo, sempre buscando de forma mais intuitiva para que os alunos possam entender como surgiram as teorias e a justificativa para o cálculo possuir toda a formalidade dos limites. Algo que já sabemos ser possível de se alcançar graças a trabalhos como o de Castro e Fernández (2011).

Para este trabalho, não pretendemos ir tão longe, chegando somente da ideia de máximos e mínimos através das derivadas.

7.1 Proposta

Com uma duração de 4 horas, esta proposta parte do seguinte objetivo para a oficina: Compreensão inicial do cálculo diferencial a partir das ideias de Fermat e Leibniz.

Acredita-se que os alunos que cursarem a oficina poderão ter uma melhor compreensão sobre o cálculo diferencial, e professores que se interessem pelo assunto, podem passar a adotar metodologias semelhantes em aulas de cálculo ou outras disciplinas.

Abaixo temos de forma mais geral como pode ser realizada esta oficina:

ATIVIDADE	OBJETIVO	DURAÇÃO
Teorema de Exaustão de Eudoxo	Compreender uma ideia intuitiva sobre os infinitesimais	30 minutos
Debate sobre infinitesimais	Entender de forma mais filosófica como podemos trabalhar com os infinitesimais	30 minutos
Método de Fermat - 1	Mostrar e exemplificar o método de Fermat para encontrar máximos e mínimos	30 minutos
Método de Fermat - 2	Mostrar onde Fermat falha em seu método, deixando claro que não possuía uma explicação formal para o mesmo	30 minutos
Diferenciais de Leibniz	Definir os diferenciais de Leibniz, usando a ideia de infinitesimais já trabalhada	15 minutos
Regras de Derivação	Trabalhar com as regras de derivação, assim como suas respectivas demonstração.	1 hora
Coeficiente Angular	Mostrar como Leibniz entendia a divisão de diferenciais como o coeficiente angular da reta tangente.	30 minutos
Finalização	Finalizar a oficina levantando o debate sobre os problemas nas ideias de Leibniz e sobre a importâncias de conceitos como o de Limite.	15 minutos

Para que se tenha mais detalhes da oficina, abaixo temos um detalhamento de como ela foi pensada:

Como ambos os trabalhos trabalham com infinitesimais, o primeiro passo para poder utilizar os trabalhos é exatamente buscar explicar o que é algo infinitesimal. Para isso, uma forma mais intuitiva de se entender é usando o teorema de exaustão de Eudoxo, e a partir dele fazer comparações entre coisas que são infinitesimais diante de outras.

Utilizando essas ideias de infinitesimais nas equações, a ideia de Fermat fica mais clara de ser explicada. Apresentado o método da forma comumente apresentadas em trabalhos que falam sobre Fermat, que é seguindo os seguintes passos:

- Seja a uma incógnita qualquer do problema;
- Substitua a por $a + e$;
- “igualemos” a e $a + e$;¹⁵
- Elimina os termos que são iguais em ambos os lados;
- Divide-se toda a expressão por e ou potências de e , até que tenhamos algum termo que não possua e ;
- Agora elimina-se os termos que ainda possuem e ;
- A resolução é esta última equação, que se dará em valor de a .

Passada essa ideia, pode-se trabalhar com dois exemplos clássicos da utilização deste método, o primeiro já está mostrado em 6.1.3, o segundo está em Fermat (1638, p.51), ou se forma mais direta, no Anexo 2 na página 65 deste trabalho.

Mostrado que o método funciona, torna-se necessário mostrar onde ele é falho, diante do que Fermat possuía na época, como pode ser muito bem visto em Strømholm (1968).

¹⁵ Colocou-se o termo “igualemos”, mas na verdade o que iremos fazer é o *adquate*, que pode ser entendido como os dois lados da equação serem aproximadamente iguais, utilizando a ideia de que e é um valor infinitesimal, seguindo a ideia de Leibniz para infinitesimais. Ou seja, como e é um valor desprezível diante de a , a expressão $a + e$ é equivalente a a .

Passa-se assim, para a introdução do método de Leibniz, começando pela definição de seu operador de diferenças, que chamamos de diferencial.

Para mostrar como o diferencial irá funcionar seguiremos o que nos é apresentado no trabalho, mostrando os diferenciais: de uma constante, uma constante multiplicando uma variável, de adição, subtração, multiplicação e divisão de variáveis, de potência da variável e por fim de raízes da variável.

Recomenda-se fortemente trabalhar com mais exemplos do que os abordados por Leibniz, alguns mais simples para depois trabalhar com um exemplo mais complexo como o que ele traz.

Com isso, podemos buscar uma explicação semelhante a dada no fim da subseção 6.2.1 deste trabalho, introduzindo assim a ideia do que hoje chamamos de derivada. Desta forma deixando mais claro que o diferencial de Leibniz nada mais é que a diferença entre dois pontos que estão extremamente próximos, baseando ainda na ideia de infinitesimais.

Por fim, pode-se trabalhar com o cálculo de máximo mínimos de funções partindo do que se é apresentado no próprio trabalho de Leibniz, calculo coeficiente angular em vários pontos de curvas e analisando o comportamento destes resultados. O intuito seria exatamente provocar o aluno a compreender como encontrar o ponto de máximo ou mínimo.

Assim como no caso de Fermat é importante reforçar ao final sobre os pontos problemáticos da teoria de Leibniz, levantando debates sobre os infinitésimos e sobre a importância de se ter uma definição de Limite, para formalizar as teorias de cálculo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de cálculo apresenta elevados índices de reprovação, e a anos faculdades buscam solucionar esse problema, seja adicionando disciplinas extras, ou até mudando o foco da disciplina.

Este trabalho teve como objetivo propor uma forma introduzir os conceitos iniciais cálculo baseado nas ideias originais de Fermat e Leibniz. Para buscar essas origens, escolhemos por ir diretamente na fonte, nos textos originais desses autores.

Com os textos originais encontrados em inglês, realizou-se a tradução de ambos para o português, no intuito de facilitar este e futuros estudos sobre o assunto, assim como de um terceiro texto, de Strømholm, que foi fundamental para compreender melhor o texto de Fermat.

Com essas traduções realizou-se uma análise baseada somente nas ideias de Bardin, como uma forma de ficar mais claro como o texto estava sendo analisado e pudesse fazer as inferências necessárias.

Durante essa análise comprovou-se uma ideia que se tinha no início do trabalho, de que a origem do cálculo era mais intuitiva do que a forma atual, algo que vai de acordo com o trabalho de Castro e Fernández (2011). Além disso, encontrou-se muitas dificuldades na parte de interpretação em ambos os textos, apesar da ideia ser intuitiva, tanto Leibniz quando Fermat não a passaram de forma simples, Fermat tendo sua ideia fracionada ao longo das cartas, e Leibniz com o excesso de detalhes implícitos. Mesmo com tais dificuldades, os trabalhos de fato se mostraram ricos em conteúdo e em ideias que estavam muito além de seu tempo.

Baseado nisso, propusemos uma ideia inicial para uma oficina, que é uma ideia viável de construção e aplicações futuras. Entretanto, acreditamos que a ideia seria melhor aproveitada se a proposta fosse estendida para a área de integrais, partindo de Arquimedes e conseguisse chegar até o teorema fundamental do cálculo. Dessa forma, a proposta teria conteúdo suficiente para ser uma matéria optativa a ser ofertada, na tentativa de ajudar os estudantes em cálculo 1. E com isso, poderia se realizar estudos e observar o desenvolvimento dos estudantes em cálculo que fizeram cálculo 1 durante ou depois da matéria optativa proposta, para se ter provas que corroborem, ou não, com a eficiência dessa optativa.

Acreditamos que este trabalho seja um passo inicial para uma longa pesquisa, que envolve mais aprofundamento e muito mais trabalho a ser realizado. E apesar de, inicialmente, considerarmos ir além em nossa proposta, chegando à construção de fato de um curso, optamos por parar até onde conseguimos chegar e deixar para que futuros alunos ou até mesmos que os autores deste trabalho deem prosseguimento ao estudo.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Wagner Quintão. **DIFICULDADES DOS ALUNOS NO APRENDIZADO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I: uma reflexão**. 2016. 55 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-AH9ML7/1/monografia_wagner.pdf . Acesso em: 12 jul. 2022.
- ANDRADE, Fabiana; ESQUINCALHA, Agnaldo; OLIVEIRA, Ana Teresa de. O PRÉ-CÁLCULO NAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA DAS INSTITUIÇÕES PÚBLICAS DO RIO DE JANEIRO: o prescrito. **Vidya**, Santa Maria, v. 29, n. 1, p. 131-151, jul. 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/2417/2320> . Acesso em: 12 jul. 2022.
- ARAÚJO, A. S. ; RODRIGUES, L. J. ; SILVESTRE, I. B. M. ; FONSECA, J. C. ; SCHULZ, L. M. ; VIEIRA, L. B. . Pierre de Fermat: advogado por profissão matemático de coração. In: **XVII Congresso de Iniciação Científica e X Encontro de Pós-Graduação**, 2008, Pelotas. Disponível em : https://www2.ufpel.edu.br/cic/2008/cd/pages/pdf/CE/CE_01702.pdf .Acesso em:16 jan. 2022
- ARAUJO, Maria Julieta Ventura Carvalho de. Capítulo 4: Derivada. In: ARAUJO, Maria Julieta Ventura Carvalho de. **Cálculo I**. Juiz de Fora: Ufjf, 2010. p. 60-82. Disponível em: https://www.ufjf.br/sandro_mazorche/files/2010/03/Cap%C3%ADtulo-4.pdf . Acesso em: 15 jul. 2022.
- ARTONI, Guilherme. **História do Último Teorema de Fermat**. 2014. 10 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Campinas, [S.I.], 2014.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo : Edições 70, 2011.; Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2012
- BRASIL. Ministério da Educação/ Instituto Federal de Brasília. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Licenciatura em Matemática**. Brasília, DF: MEC/IFB, 2018
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais** : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.
- BRUCE, Ian. **Some Mathematical Works of the 17th & 18th Centuries, including Newton's Principia, Euler's Mechanica, Introductio in Analysin, etc., translated mainly from Latin into English**. 2022. Disponível em: <http://www.17centurymaths.com/> . Acesso em: 15 jul. 2022.
- CANTÃO, Renato. Nota Histórica: pierre de fermat. **Revista Elementos**, [S.I.], v. 2, n. 1, p. 121-125, jan. 2012. Disponível em: <http://www2.ufac.br/elementos/edicoes/edicao-no-02-2012/pierre-de-fermat.pdf> . Acesso em: 15 jul. 2022

CASTRO, Concepción Valdés; FERNÁNDEZ, Carlos Sánchez. Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana. : **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 581-596, 2011.

CAVASSOTTO, Marcelo; PORTANOVA, Ruth. Reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. In: **III MOSTRA DE PESQUISA DA PÓS GRADUAÇÃO PUCRS**, 2008, Porto Alegre. Anais da III Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação PUCRS. Porto Alegre: PUCRS, 2008, p. 1-6.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém: Isbn, 2017. 243 p. Disponível em: http://www.sbemrasil.org.br/files/historia_matematica.pdf . Acesso em: 21 dez. 2021.

COSTA NETO, Antonio Dantas. **O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo 1 na Universidade**: entender e intervir. 2017. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=3471&id2=150271446 . Acesso em: 13 jul. 2022.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática**. São Paulo, 1999.

DESCARTES, René. **A Geometria de René Descartes**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. Tradução de: Raquel Anna Sapunaru.

DIEFENTHALER, A. T. Disciplina Pré-cálculo: Um olhar a partir do desempenho dos acadêmicos. **Biblioteca Digital da UNIJUI**, Ijuí, 2017. Disponível em: <https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/xmlui/bitstream/handle/123456789/4238/Andresa%20Tais%20Diefenth%C3%A4ler.pdf?sequence=1> . Acesso em: 18 jun. 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERMAT, Pierre (1638): *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, **Œuvres Band 1**, S. 133–179; Tradução francesa. *Oeuvres*, Band 3, S. 121–156. [II.2]

FRANÇA, Iara da Silva. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: a história da disciplina e as contribuições da produção escolar como fonte para sua compreensão. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO - EDUCERE, 10., 2011, Curitiba. **Seminário internacional de representações sociais, subjetividade e educação - SIRSSE**. Curitiba, 2011. p. 6617-6629. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/5005_3227.pdf . Acesso em: 21 dez. 2021.

FRANZON, Carmen Rosane Pinto. **Um estudo sobre leibniz e a criação de um alfabeto do pensamento humano**. Anais XV EBRAPEM... Campina Grande: Realize Editora, 2011. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/928> . Acesso em: 15/07/2022

G.W.LEIBNIZ; FERRO, Nuno. **Novo Sistema da Natureza e da Comunicação das Substâncias, Bem como da União que há entre a Alma e o Corpo. Princípios da Natureza e da Graça Fundados sobre a Razão**. [S.l]: [S.l], 2016. 215 p. Disponível em: https://www.uc.pt/fluc/uidief/ebooks/G.W.Leibniz_NunoFerro . Acesso em: 15 jul. 2022.

GOMES, Lucas Ferreira; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: um mapeamento dos artigos publicados em alguns periódicos nacionais na última década. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 12., 2016, São Paulo: Sbem, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4584_2312_ID.pdf . Acesso em: 14 jul. 2022.

LEIBNIZ, G. W. (1684). A new method for finding maxima and minima, and likewise for tangents. **Actis Erud. Lips. Oct.** p. 467-473. (Tradução Ian Bruce, 2014). Disponível em: <https://www.17centurymaths.com/contents/Leibniz/nova1.pdf> . Acesso em 18 jul. 2022.

LOBATO, Fabricio da Silva; SILVA, Euvaldo Soares da; SÁ, Pedro Franco de. A importância da história da matemática como metodologia no ensino de função. **Brazilian Journal Of Development**. Curitiba, p. 25517-25539. mar. 2021. Disponível em: <https://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/26266/20827> . Acesso em: 21 dez. 2021.

MACÊDO, Josué Antunes; GREGOR, Isabela Cristina Soares. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. **Educação Matemática Debate**, [S.L.], v. 4, n. 10, p. 1-24, 4 abr. 2020. Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES). <http://dx.doi.org/10.24116/emd.e202008>. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1804> . Acesso em: 12 jul. 2022.

MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

MELLO, Maria Helena Campos Soares de; MELLO, João Carlos Correia Baptista Soares de. REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO. In: **CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA**, 35., 2007, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/12/artigos/357-Joao%20Soares%20de%20Mello.pdf> . Acesso em: 12 jul. 2022.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor de matemática. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.) **Cadernos Cedes** 40. Campinas: Papirus, 1996. Disponível em: https://professoresdematematica.files.wordpress.com/2010/03/a_historia_da_matematica_na_formacao_do_professor_de_matematica_antonio_miguel_arlete_brito.pdf . Acesso em: 14 jul. 2022.

MILIES, César Polcino. **Breve história da álgebra abstrata**. Minicurso da II Biental da SBM, 2004. Disponível em: <http://www.bientasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2022.

NASSER, L. ; ALVES DE SOUSA, G. ; TORRACA, M. A. A. . Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 70, p. 43–55, 2017. DOI: 10.4322/gepem.2017.020. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/115> . Acesso em: 12 jul. 2022.

O'CONNOR, Jhon.; ROBERTSON, Edmund (Escócia). University Of St Andrews. **MacTutor History of Mathematics Archive**. 2022. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/> . Acesso em: 15 jul. 2022.

O'CONNOR, Jhon.; ROBERTSON, Edmund. **Pierre de Fermat**. 2002. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat> . Acesso em: 15 jul. 2022.

OLEDANO, José María Ayerbe. Los Métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes. **Pensamiento Matemático**, v. 7, n. 2, p. 65-86, 1 set. 2017. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6268910.pdf> . Acesso em: 02 nov. 2021.

OLIVEIRA, Lucas Santos de. **ANÁLISE CURRICULAR DE PRÉ-CÁLCULO**: uma nova proposta formativa. 2022. 34 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Brasília, Brasília, 2022.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM**. 2014. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_oliveira_00971876070.pdf . Acesso em: 21 dez. 2021.

PALIS, Gilda de La Rocque. A Transição so Ensino Médio Para o Ensino Superior. In: **X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 2010, Rio de Janeiro. Palestra do X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Salvador, 2010, p.1-10. Disponível em: <https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra4.pdf> . Acesso em: 13 jul. 2022.

PEDROSO, Hermes Antônio. Arquimedes: um ponto de apoio para o método científico. **Revista Eletrônica de Matemática**, Jataí, v. 1, n. 3, p. 1-13. 2013. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/arquimedes-um-ponto-de-apoio.pdf> . Acesso em: 14 jul. 2022.

PEREIRA, Juliana de Melo. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR**: dificuldades e sugestões. 2013. 54 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16109/1/JulianaMP_DISSERT.pdf . Acesso em: 14 jul. 2022.

QUEIRÓ, João Filipe, História da Universidade em Portugal – Sec. 5, Cap. V - **O saber**: dos aspectos aos resultados, vol. I, Part II (1537-1771), Univ. Coimbra - Fund. Gulbenkian, jun. 1993. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/HistUniv.pdf> . Acesso em: 14 jul.2022

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/publico/WANDERLEY_REZENDE.pdf . Acesso em: 13 jul. 2022.

ROQUE, Tatiana Marins; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. [S.l.]: Sbm, 2012.

SANTOS, Carlos Pereira dos; PEDRO NETO, João; SILVA, Jorge Nuno. **Leibniz + GO 9x9**. [S.l.]: Edimpresa, 2007. Disponível em: http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Livro4.pdf . Acesso em: 17 jan. 2022.

SAPUNARU, Raquel Anna; SOUZA, Bárbara Emanuella; PELLI, Débora; SANTIAGO, Douglas Frederico Guimarães. OS CONCEITOS DE INFINITESIMAL E DIFERENCIAL NAS REGRAS DE DERIVAÇÃO DE LEIBNIZ. **Rencima**, [S.l.], v. 4, n. 2, p. 1-15, ago. 2013. Disponível em: <https://revistapos.cruzeiropolis.edu.br/index.php/rencima/article/view/822> . Acesso em: 15 jul. 2022.

SILVA, E. N.; DE SOUZA LIMA, A. C.; DE OLIVEIRA, T. S. P. ESTUDO DA ÁLGEBRA: o desenvolvimento histórico da formalização simbólica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 347–356, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2851. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2851> . Acesso em: 16 jan. 2022.

SILVA, Joao Dantas Almeida. **SOBRE O MÉTODO DA EXAUSTÃO DE EUDOXO E O CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES PLANAS**. 2019. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019. Disponível em: http://tede2.uefs.br:8080/bitstream/tede/1326/2/Dissertacao_final%20para%20o%20cd%20JO%C3%83O.pdf . Acesso em: 14 jul. 2022.

SILVA, Rosivaldo Pereira da. **Arquimedes e o Método**. 2014. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2418/1/Arquimedes%20e%20o%20m%C3%A9todo.pdf> . Acesso em: 14 jul. 2022.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: princípios e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, v. 20, n. 49, p. 64-83, 2021. Disponível em: <http://www.fucamp.edu.br/editora/index.php/cadernos/article/view/2336> . Acesso em: 10 dez. 2021

STRØMHOLM, P.: Fermat's methods of maxima and minima and of tangents. A reconstruction. **Arch. History Exact Sci.** 5 (1968), no. 1, 47–69.

VENTURI, Jacir J.. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 8. ed. Curitiba: Editora Unificado, 1949. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA141/ld02.pdf> . Acesso em: 16 jan. 2022.

ANEXO 1 – NOVO MÉTODO PARA ENCONTRAR MÁXIMOS E MÍNIMOS

MATEMÁTICA; N.º. XIII. A

NOVO MÉTODO

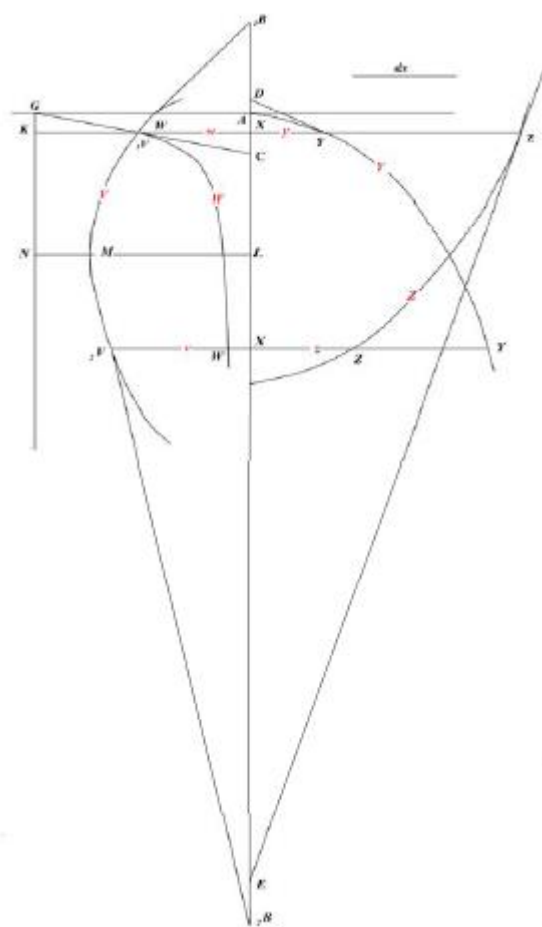
PARA ENCONTRAR MÁXIMOS E MÍNIMOS,

e para tangentes, com um único tipo de cálculo para estas, que não é impedido nem por frações nem por quantidades irracionais.

De Actis Erud. Lips. Outubro de 1684. p. 467-473

Sendo AX o eixo e várias curvas, como VV, WW, YY, ZZ , das quais as ordenadas normais ao eixo serão VX, WX, YX, ZX , que podem ser chamadas respectivamente de v, w, y, z ; e a abscissa do eixo AX pode ser denominada x . As tangentes devem ser XB, XC, XD, XE encontrando-se com o eixo nos pontos B, C, D, E respectivamente. Agora, alguma linha reta tomada arbitrariamente pode ser chamada de dx , e a linha reta que deve ser para dx , como v (ou w, y, z , respectivamente) é para VB (ou WC, YD, ZE , respectivamente) [Um erro confuso foi corrigido em 1695, pois os comprimentos VB, WC, YD, ZE foram usados originalmente.] pode ser chamado de dv (ou dw, dy, dz , respectivamente), ou os diferenciais [Leibiz prefere chama-las de “diferenças” em vez de “diferenciais”]

de v (ou de w, y, z respectivamente).



Com isso implementado, as regras de cálculo são as seguintes: Seja uma determinada quantidade constante, da será igual a 0 e $d\bar{ax}$ será igual a adx : se y for igual a v (ou a ordenada de alguma curva YY , igual à ordenada correspondente de qualquer curva VV), dy será igual a dv .

Agora para *Adição e Subtração*: se $z - y + w + x$ deve ser igual a v , $d(z - y + w + x)$ deve ser igual a $dz - dy + dw + dx$.

Multiplicação: $d\bar{x}\bar{v}$ é igual a $x dv + v dx$, ou colocando y igual a xv , dy torna-se igual a $x dv + v dx$. Pois, por opção, existe uma fórmula, de como xv , ou uma letra como y , pode ser usada como um atalho. É necessário observar que x e dx devem ser tratados da mesma maneira neste cálculo, como y e dy , ou outra letra indeterminada com seu diferencial. Deve-se notar também, que uma regressão [ou seja, um retorno à expressão original, ou o processo inverso de integração] não pode ser dada sempre para uma equação diferencial, a menos que com uma certa cautela.

Novamente para a *Divisão*, $d\frac{v}{y}$ ou (ao colocar z igual a $\frac{v}{y}$) dz é igual a $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$

[L. mais tarde abandonaria esta complicação desnecessária de usar sinais ambíguos para a regra de divisão, já que o método deixou de ser geométrico para ser algébrico, onde os sinais eram tratados de acordo com as regras usuais.]

Porque aqui os *sinais* devem ser anotados adequadamente, já que no cálculo de seu diferencial a letra mais simples pode ser substituída, mas o mesmo sinal deve ser mantido, e para $+z$ escrever $+dz$, para $-z$ escrever $-dz$, como será evidente a partir da adição e subtração postas em prática um pouco antes; mas quando o valor passa a ser avaliado criticamente, ou quando a relação de z a x é considerada, então para ser perceptível, ou o valor de dz deve se tornar uma quantidade positiva, ou menor que zero, ou negativa; porque quando isso acontece a posteriori, então a tangente ZE é desenhada do ponto z não em direção a A , mas na direção oposta, ou além de X , é então que as próprias ordenadas z diminuem, aumentando x . E porque as próprias ordenadas v às vezes aumentam, às vezes diminuem, às vezes dv será uma quantidade positiva, às vezes negativa, e no primeiro caso, a tangente $_1V_1B$ é desenhada em direção a A ; no último $_2V_2B$ na direção oposta: mas nada acontece sobre o ponto médio M , no qual as mudanças de v não aumentam nem diminuem, mas estão em repouso e, portanto, como consequência dv igual a 0, onde zero refere-se a uma quantidade nem positiva nem negativa, pois $+0$ é igual a -0 : portanto, na própria posição v , verdadeiramente, a ordenada LM é um *Máximo* (ou se a convexidade pode ser girada em direção ao eixo, um *Mínimo*) e a tangente da curva em M não é desenhada acima de X em direção a A em qualquer lugar próximo ao eixo, nem abaixo de X no sentido oposto, mas paralelo ao eixo. Se dv deve ser infinito em relação a dx , então a tangente está perpendicular ao eixo, ou é a própria ordenada. Se dv e dx forem iguais, a tangente forma um meio ângulo reto com o eixo.

Se com as ordenadas v aumentando, os próprios incrementos dessas aumentam também, ou as diferenças dv (ou se com dv se tornando positivo, também ddv , as diferenças das diferenças, são positivas, ou com estas negativas, negativas

também) a curva se torna *convexa* em direção ao eixo, em caso contrário *côncava* [inicialmente L. usava esses termos na ordem errada, o que ele posteriormente corrigiu; esses resultados referem-se a curvas ao longo da direção x positiva, o que claramente temos que considerar diminuições na ordenada para se afastar da origem no sentido negativo]; verdadeiramente onde há um incremento *máximo* ou *mínimo*, ou onde os incrementos tornam-se de crescentes a decrescentes, ou vice-versa, onde há um *ponto de inflexão* [ou seja, um ponto onde curvaturas opostas se combinam], e a concavidade e a convexidade podem ser trocadas entre si, mas aqui as ordenadas não tornam-se decrescentes de crescentes, ou vice-versa, pois a concavidade ou a convexidade da curva pode permanecer: mas para que os incrementos possam continuar a aumentar ou diminuir; na verdade, não pode acontecer que as ordenadas diminuam ou aumentem ou vice-versa. E, portanto, um ponto de curvatura contrária [ou seja, um ponto de inflexão] tem lugar, quando nem v nem dv podem se tornar 0, mas ddv é 0. Da qual também um problema de inflexão contrária não tem duas raízes iguais, como o problema dos máximos, mas três raízes iguais. E tudo isso depende, de fato, do uso correto dos signos.

Além disso, enquanto isso, requer-se usar *sinais mutáveis*, como usados recentemente em *divisão*, evidentemente, deve-se concordar primeiro em como eles devem ser explicados. E de fato, aumentando x , $\frac{v}{y}$ aumenta (diminui), os sinais em $d\frac{v}{y}$ ou em $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ portanto, devem ser explicados, de modo que esta fração se torna uma quantidade positiva (negativa). Mas $\mp$ indica o oposto de $\pm$, e um sendo +, o outro será - ou o oposto. E mais ambiguidades podem ocorrer no mesmo cálculo, o que eu distingo com colchetes, por exemplo, se deve haver $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$, deve haver

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)ydz(\mp)zdy}{zz} + \frac{((\pm))xdv((\mp))}{vv} = dw$$

caso contrário as ambiguidades decorrentes de fontes diferentes podem se tornar confusas. Deve-se notar que um signo ambíguo em si mesmo dá + por si mesmo, e em seu oposto dá -, e outra ambiguidade cria uma nova ambiguidade, dependente de ambas.

Potências: $dx^a = a \cdot x^{a-1}dx$, por exemplo $dx^3 = 3 \cdot x^2dx$.

$$d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}} \text{ por exemplo, se } w \text{ for } = \frac{1}{x^3} \text{ se torna } dw = -\frac{3dx}{x^4}$$

Raízes: $d, \sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$ (já que $d, \sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ pois nesse caso a é 1, e b é 2;)

Portanto $\frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}} = \frac{1}{2} \sqrt[2]{y^{-1}}$; agora y^{-1} é o mesmo que $\frac{1}{y}$ [estabelecido por Wallis em seu *Arithmetica Infinitorum*], da natureza dos expoentes de uma progressão geométrica, e $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ is $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$, $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$

Além disso, a regra de potências inteiras pode ser suficiente para determinar tanto frações como raízes, pois a potência deve ser uma fração quando o expoente é negativo, e é transformada em uma raiz quando o expoente é uma fração: mas preferi que estas mesmas consequências fossem deduzidas disso, como acontece com outras que ainda precisam ser deduzidas, visto que as regras devem ser excessivamente gerais e que ocorrem com frequência, sendo melhor para facilitar as deliberações por si mesmas neste complicado assunto.

Assim como a partir desse *Algoritmo* conhecido, assim, como posso dizer desse cálculo que chamo de *diferencial*, todas as outras equações diferenciais podem ser encontradas através de um cálculo comum, tanto máximas como mínimas, da mesma forma tangentes são obtidas, de modo que deve não haja necessidade de remover frações ou irracionais ou outros sinais de raiz, pois o método ainda pode ser mantido seguindo o método produzido até agora. A demonstração de todos será fácil com essas mudanças, e até agora este assunto não foi tido o suficiente em consideração: dx, dy, dv, dw, dz em si mesmos (cada um em sua respectiva série) podem ser tidos como diferenças proporcionais de x, y, v, w, z , com incrementos ou diminuições momentâneos. [Observe que esses diferenciais são feitos em quantidades momentâneas, e a linha rotulada dx no diagrama acima não é usada posteriormente; é permitido, claro, ter um triângulo de tamanho finito semelhante ao que envolve infinitesimais, e chamar a proporção dos lados $dy: dx$. Além disso, a ideia de uma função ainda não é evidente, e ambas as abscissas e ordenadas são tratadas da mesma maneira.]

Daí decorre que deve ser possível para qualquer equação proposta escrever a equação de seu diferencial, porque isso pode ser feito para qualquer *membro* (ou seja com uma parte, que apenas por adição ou subtração concorda com a equação estabelecida) substituindo a quantidade mais simples do diferencial do membro; verdadeiramente, para qualquer quantidade (que não é em si um membro [na medida em que segue por adição ou subtração apenas, como um termo em uma expressão], mas concorda da mesma maneira que um membro sendo formado), sua quantidade diferencial não é simplesmente feita formando a quantidade diferencial de seu membro sendo usado, mas segue o Algoritmo prescrito até agora [ou seja, como na multiplicação e divisão de partes]. De fato, os métodos usados até agora não têm essa transição, pois geralmente eles usam uma linha reta como DX , mesmo outra desse tipo, realmente não a linha reta dy , que é a quarta proporcional com DX, DY, dx próprios, que muda tudo [nota: essas linhas não podem ser relacionadas a algumas mostradas na Fig. 1 com os mesmos rótulos]; portanto, eles podem ser dispostos primeiro, de modo que as frações e os irracionais (que entram como indeterminados) possam ser removidos; também é evidente que nosso método se estende a linhas transcendentais, que não podem ser comparadas a um cálculo algébrico, ou que não são de ordem específica, da maneira mais universal e nem sempre obtendo sucesso sem algumas substituições particulares;

[Assim, L. admite que não pode usar seus métodos mecânicos simples para resolver a diferenciação transcendental.]; como pode ser considerado em geral, encontrar uma

tangente é desenhar uma linha reta, que une dois pontos da curva com uma diferença infinitamente pequena, ou o lado de um polígono angular infinito produzido, que é equivalente à *curva* para nós. Mas posso notar essa distância infinitamente pequena por algum diferencial, como dv , ou por uma relação que pode se expressar por ela mesma, pensada como uma tangente conhecida. Especialmente, se y fosse uma quantidade transcendente, por exemplo com a ordenada de um cicloide, e pudesse entrar nesse cálculo com a ajuda do próprio z , a ordenada de outra curva pode ser determinada e dz pode ser procurada, ou através da tangente desta última curva, dz por dy requerida a ser determinada em todos os lugares, já que a tangente do cicloide pode ser obtida. Mas essa tangente do próprio cicloide, se ainda não foi concebida, pode ser encontrada por um cálculo semelhante a partir de uma determinada propriedade da tangente do círculo.

Agrada propor um exemplo de cálculo, onde se deve notar aqui que a divisão deve ser designada por mim da seguinte maneira: $x:y$, porque isso é o mesmo que x dividido por y ou $\frac{x}{y}$. A primeira ou a equação dada deve ser $x:y + \frac{a+bx}{a+bx}c - xx$ o quadrado de $ex + fxx + ax\sqrt{gg + yy} + yy:\sqrt{hh + lx + mxx}$ é igual a 0,

$$[\text{ou seja, em termos modernos: } \frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-xx)}{(ex+fxx)^2} + ax\sqrt{gg + yy} + \frac{yy}{\sqrt{hh+lx+mx}} = 0;]$$

expressando a relação entre x e y , ou entre AX e XY , com os próprios $a, b, c, e, f, g, h, 1, m$ colocados para serem dados; a maneira buscada para elucidar YD a partir do ponto Y dado, que toca a curva, ou a razão entre a linha reta DX e a linha reta dada XY é buscada. Para abreviar, escreveremos n para $a + bx$; para $c - xx, p$; para $ex + fxx, q$; para $gg + yy, r$; para $hh + lx + mxx, s$; a equação se torna $x:y + np:qq + ax\sqrt{r} + yy:\sqrt{s}$ igual a 0, que deve ser a *segunda equação*.

Agora, a partir de nosso cálculo, estamos de acordo com $d, x:y$ para ser $\pm xdy \mp ydx:yy$;

$$[\text{ou seja, } d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}]$$

e da mesma forma $d, np:qq$ para ser $(\pm) 2npdq (\mp) q (ndp + pdn) : q^3$

$$[\text{ou seja, } d\left(\frac{np}{qq}\right) = \frac{(\pm)2npdq (\mp)q (ndp + pdn)}{q^3}]$$

e $d, ax\sqrt{r}$ para ser $+axdr:2\sqrt{r}$; e $d, yy:\sqrt{s}$ para $((\pm)) yyds ((\mp)) 4 ysydy:2s\sqrt{s}$,

$$[\text{ou seja, } d(ax\sqrt{r}) = \frac{+axdr}{2\sqrt{r}} + adx\sqrt{r}; d\left(\frac{yy}{\sqrt{s}}\right) = \frac{((\pm))yyds ((\mp))4 ysydy}{2s\sqrt{s}};]$$

em que todas as quantidades diferenciais de $d, x:y$ em si até $d, yy:\sqrt{s}$ em uma soma dão 0, e eles dão desta forma a *terceira equação*, na verdade, para os membros da segunda equação os valores de seus diferenciais podem ser substituídos.

Agora dn é bdx , e dp é $-2xdx$, e dq é $edx + 2fxdx$, e dr é $2ydy$, e ds é $ldx + 2mxdx$.

Com os quais, os valores substituídos na terceira equação darão a *quarta* equação, onde as quantidades diferenciais, das quais permanecem certamente dx , dy , são encontradas sempre fora dos numeradores e raízes, e cada membro é influenciado por dx , ou por dy , sempre com a regra da homogeneidade mantida em relação a essas duas quantidades, de qualquer maneira o cálculo possa ficar emaranhado [ou seja, todos os diferenciais de um determinado membro são da mesma ordem;]: a partir do qual um valor pode ser encontrado sempre de $dx:dy$ propriamente dito da razão de dx para dy , que é um DX procurado para um dado XY , cuja razão em nosso cálculo aqui (mudando a quarta equação para a forma Análoga) será como:

$$\mp x:yy - axy:\sqrt{r} ((\mp)) 2y:\sqrt{s} \text{ é para}$$

$$\mp 1:y(\mp) 2np(e+2fx):q^3(\mp)-2nx+pb:qq + a\sqrt{r}((\mp))yy1+2mx:2s\sqrt{s}$$

$$[\text{ou seja, } \mp \frac{x}{yy} - \frac{axy}{\sqrt{r}} ((\mp)) 2\frac{y}{\sqrt{s}} \text{ é para}$$

$$\mp \frac{1}{y}(\mp) \frac{2np(e+2fx)}{q^3}(\mp) \frac{-2nx+pb}{qq} + a\sqrt{r}((\mp)) \frac{yy(1+2mx)}{2s\sqrt{s}}]$$

Além disso, x e y são dados de acordo com um determinado ponto Y . E os valores das letras n, p, q, r, s escritas acima são dados em termos de x e y . Portanto, o que se busca é encontrado. E este exemplo nós elaboramos apenas para estarmos envolvidos o suficiente, de modo que a maneira seja aparente a partir das regras acima e também como ela pode ser usada em um cálculo mais difícil. Agora, mostremos seu uso notável confrontando mais exemplos significativos.

Os dois pontos C e E devem ser dados (fig.112), e a reta SS no mesmo plano com estes; o ponto F em SS é buscado assim sendo tido, de modo que com CF e EF , a soma dos retângulos CF para um h dado, e FE para um r dado, seja o menor possível de todos, isto é, se SS for separar os meios, e h pode representar a densidade de um meio, como a água da parte C , e r a densidade de uma média como o ar de E , o ponto F é procurado de forma que o caminho de C a E por F seja o mais conveniente possível. Podemos considerar a soma de todos os retângulos possíveis, ou todas as dificuldades dos caminhos possíveis, a ser representada pelas próprias ordenadas KV , da curva VV normal à reta GK , que chamamos de ω , e o mínimo dessas NM é procurado. [O diagrama adjacente é tirado da fig.111.] Porque os pontos C e E são dados, e as perpendiculares a SS serão dadas,

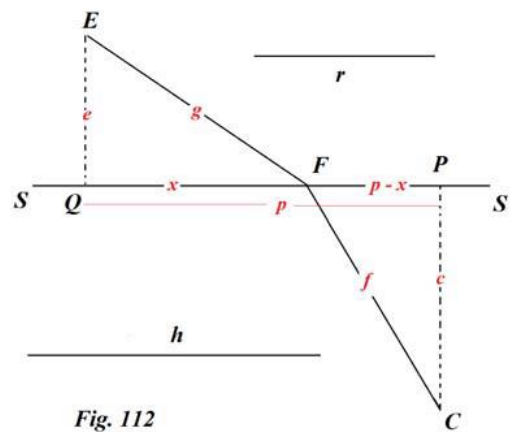
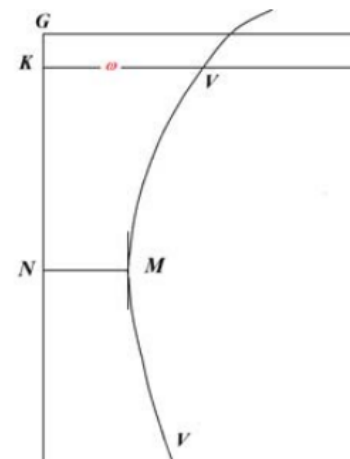


Fig. 112



verdadeiramente CP (que chamaremos de c) e EQ (como e) e além de PQ (como p), além do próprio QF , que deve ser igual ao próprio GN (ou AX), chamaremos x e CF , f , e EF , g ; surge FP , $p - x$, f é igual a $\sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ ou por brevidade $\sqrt{l}$, e g é igual a $\sqrt{ee + xx}$ ou para brevidade $\sqrt{m}$.

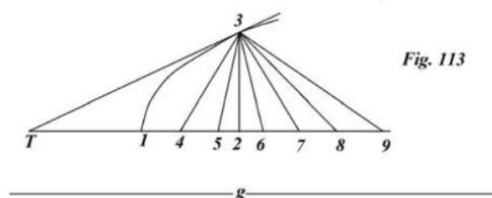
Portanto, temos ω igual a $h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$, equação da qual a equação diferencial (ao colocar $d\omega$ como 0, no caso de um mínimo) é: $+ hdl: 2\sqrt{l} + rdm: 2\sqrt{m}$ igual a 0, pelas regras de cálculo por nós tratadas;

[A palavra cálculo em latim refere-se apenas a um cálculo, como executado na Roma antiga, na vida diária usando pequenas pedras ou cálculos; *L.* pode estar usando a palavra neste sentido, mas aqui nós a usamos em seu sentido matemático moderno.];

agora dl é $-2dx\overline{p-x}$, e dm é $2xdx$, portanto: $h\overline{p-x}:f$ igual a $rx:g$.

$$[\text{ou seja, } \frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g}]$$

Mas se agora isso pode ser adaptado para ótica, e f e g podem ser igualados, ou CF e EF são iguais, porque a mesma refração permanece no ponto F , de qualquer forma um maior o comprimento da linha certa CF pode ser colocado, torna-se $h\overline{p-x}$ igual a rx , ou $h:r::x:p-x$, ou h para r deve ser como QF para FP , isto é, os senos dos ângulos de incidência e refração FP e QF serão reciprocamente como r e h , as densidades das medias, nas quais estarão a incidência e a refração. Essa densidade deve ser entendida, não em relação a nós [ou seja, temos liberdade para organizar as questões como quisermos], mas no que diz respeito à resistência que os raios de luz causam. [Agora consideramos essa 'densidade' como o índice de refração da média.] E assim, com a demonstração do cálculo feita, mostrada por nós em outro lugar nestes *Actis* [*A.E.* vol. I, p. 185], quando explicamos os fundamentos gerais da Óptica, Catóptrica e Dióptrica, que outros sábios terão encontrado de forma indireta, e que os habilidosos o farão após três linhas do cálculo. O que, neste ponto, ilustrarei com outro exemplo.



A curva 133 (fig.113) deve ser de tal tipo: que de qualquer ponto como 3, seis linhas retas devem ser traçadas em seis pontos fixos colocados no eixo em 4, 5, 6, 7, 8, 9, as seis linhas retas igualmente somadas, 34, 35, 36, 37, 38, 39 serão iguais à linha dada g . O eixo será T 14526789, e 12 será a abscissa, 23 a ordenada e a tangente $3T$; Eu digo que $T2$ será para 23 como

$$\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39} \text{ is to } -\frac{24}{34} - \frac{25}{35} + \frac{26}{36} + \frac{27}{37} + \frac{28}{38} + \frac{29}{39}.$$

[Observe que os 'números' escritos aqui são, na verdade, uma forma inicial do método de nomear pontos pelo uso de índices; assim, 23 é o comprimento de uma seção de linha d_i indicada da seguinte forma: Se designarmos qualquer um dos pontos fixos no eixo x por x_i , então a distância até o ponto 3 ou (x, y) é dado por $d_i = \sqrt{y^2(x - x_i)^2}$;

ANEXO 2 – MÉTODO DE FERMAT PARA PONTOS DE MÁXIMO, MÍNIMO E TANGENTES. UMA RECONSTRUÇÃO

O MÉTODO DE ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS¹⁶ Pierre de Fermat

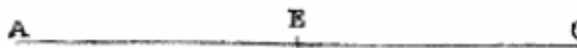
Toda a teoria de estudo de máximo e mínimo tem como base duas variáveis desconhecidas e uma única regra:

Seja a uma variável desconhecida escolhida arbitrariamente da questão (se tem uma, duas ou três dimensões, como segue na declaração). Expressaremos a quantidade máxima ou mínima em termos de a , através de termos de qualquer grau. Substituiremos então $a+e$ pela desconhecida a , e expressaremos a quantidade máxima ou mínima em termos que contenha a e e em qualquer grau. Vamos *ad-equate*, como diz Diophantus, as duas expressões da quantidade máxima e mínima, e removeremos delas os termos comuns em ambos os lados. Tendo feito isso, descobriremos que, em ambos os lados, todos os termos envolvem e ou dependem de e . Dividiremos todos os termos por e ou pelo maior termo dependente de e , de modo que em pelo menos um dos lados e desapareça. Eliminaremos então todos os termos onde e (ou um de seus dependentes) ainda exista, e vamos considerar os outros iguais, ou se não houver termos em nenhum dos lados, é necessário igualar os termos adicionados com os termos subtraídos, que passaram a ser iguais. A solução da última equação resulta no valor de a , que será máximo ou mínimo, da expressão original.

Tomemos um exemplo:

Divida a linha AC (fig.91) em E, de modo que AExEC seja máximo.

Fig. 91.



Tomemos $AC = b$; deixe a ser um dos segmentos, e que o outro segmento seja $b-a$, e o produto cujo máximo que precisamos encontrar é: $ba-a^2$. Agora faça $a+e$ ser o primeiro segmento de b , o segundo $b-a-e$, e o produto dos dois segmentos será: $ba-a^2+be-2ae-e^2$.

Deve ser igual ao produto anterior: $ba-a^2$;

Removendo os termos em comum: $be - 2ae + e^2$;

Dividindo todos os termos por e : $b - 2a + e$;

Remova e : $b = 2a$.

Portanto, para resolver o problema, a metade de b deve ser tomada.
É impossível obter um método mais geral.

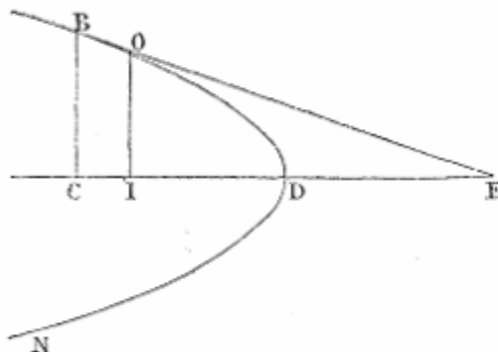
TANGENTES E LINHAS CURVAS

¹⁶ Originalmente escrito em Latin, *the Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*, foi enviado, pelo Marsenne, para Descartes, quem recebeu por volta de 10 de Janeiro de 1638. Essa tradução em inglês foi feita por Jason Ross que traduziu do francês *Œuvres de Fermat*, vol. 3, pp. 121-156.

A criação de tangentes em determinados pontos de curvas arbitrárias é redutível ao método anterior.

Seja, por exemplo, a parábola BDN (fig. 92), com vértice D e eixo DC;

Fig. 92.



Seja B um ponto sobre a parábola, através do qual a reta BE desenhada de forma tangente a parábola toca o eixo em E.

Tomamos um ponto arbitrário O na linha BE, cujo a ordenada é OI, com a ordenada BC do ponto B, teremos: $CD/DI > BC^2/OI^2$, já que o ponto O está fora da parábola. Mas $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$, por semelhança de triângulos. Portanto, $CD/DI > CE^2/IE^2$.

Agora com o ponto B dado, temos, portanto, a ordenada BC, e o ponto C e a linha CD. Logo, seja dado $CD = d$. Definiremos $CE = a$ e $CI = e$; Teremos $d/(d-e) > a^2/(a^2+e^2-2ea)$.

Vamos fazer o produto dos meios e dos extremos¹⁷:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e$$

Co-equaling então, seguindo o método anterior, removendo os termos em comum:

$$de^2 - 2dae \sim -a^2e,$$

ou, reescrevendo a mesma equação:

$$de^2 + a^2e \sim 2dae.$$

Dividindo todos os termos por e:

$$de + a^2 \sim 2da.$$

Remova de : permanece $a^2 = 2da$, portanto: $a = 2d$

Assim, provamos que CE é o dobro de CD, que condiz com a teoria do assunto.

Este método nunca falha, e pode ser estendido a várias questões interessantes: graças a ele, nós encontramos os centros de gravidade de figuras limitadas por linhas retas e curvas, bem como os centros dos sólidos e uma série de outras coisas que poderão ser retomadas mais adiante, de tivermos prazer em fazê-lo.

Quanto à quadratura de áreas limitadas por curvas e linhas retas, ou quando se trata de sólidos (dúvida nesse último parágrafo).

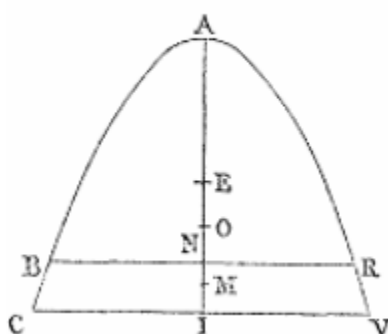
¹⁷ “multiplicação cruzada” na linguagem atual

II

CENTRO DE GRAVIDADE DO CONÓIDE PARABÓLICO¹⁸
SEGUINDO O MESMO MÉTODO

Seja CBAV (fig. 93) um conóide parabólico, tendo como eixo IA e tendo um círculo de diâmetro CIV como base. Encontramos o centro de gravidade pelo mesmo método, que nos serviu para encontrar o máximo, mínimo, e as tangentes de linhas curvas, e portanto provar aqui, por esse novo exemplo e por um novo e brilhante emprego deste método, o erro daqueles que acreditam que ele é defeituoso.

Fig. 93.



Para chegar em uma análise, vamos dizer que $IA = b$. Que O seja o centro de gravidade; chamemos a de um comprimento desconhecido AO ; corte o eixo IA pôr um plano arbitrário BN , e que $IN = e$, no qual $NA = b - e$.

É claro que em figuras como está e similares (parábola ou parabólica), os centros de gravidade, nos segmentos retirados por paralelos a base, dividem os eixos em proporções constantes (é claro, um fato, que a demonstração de Archimedes para a parábola pode ser estendida, por um raciocínio idêntico, para todas as parábolas e conóides parabólicos). Assim o centro de gravidade do segmento, no qual NA é o eixo e BN o raio da base, dividiremos AN em um ponto, determinado E , de modo que $NA/AE = IA/AO$, ou, pela notação, $b/a = (b-e)/AE$.^f

A parte do eixo assim será $AE = (ba-ae)/b$, e o intervalo entre os dois centros de gravidade, $OE = ae/b$.

Seja M o centro de gravidade da parte restante, $CBRV$; deve necessariamente estar entre os pontos N e I , dentro da figura, de acordo com o postulado 9 de Archimedes em seu *De æquiponderantibus*, já que $CBRV$ é uma figura inteiramente côncava em relação ao seu anterior.

Mas a parte $CBRV$ /parte $BAR = EO/OM$, já que O é o centro de gravidade da figura total CAV e E e M os centros de gravidade de cada parte.

Agora no conóide de Archimedes, parte CAV /parte $BAR = IA^2/NA^2 = b^2/(b^2+e^2-2be)$; portanto, dividindo: parte $CBRV$ /parte $BAR = (2be - e^2)/(b^2+e^2-2be)$. Mas nós provamos que parte $CBRV$ /parte $BAR = EO/OM$. Portanto, na nossa notação, $(2be - e^2)/(b^2+e^2-2be) = (OE(=ae/b))/OM$; onde $OM = (b^2ae+ae^3-2bae^2)/(2b^2e-be^2)$.

Seguindo o que foi estabelecido, o ponto M está entre os pontos N e I ; logo $OM < OI$; em notação, $OI = b-a$. A questão volta ao nosso método, e supomos

$$b-a \sim (b^2ae+ae^3-2bae^2)/(2b^2e-be^2)$$

¹⁸ Esta seção parece ser a que Fermat endereçou a Mersenne para Roberval, com sua carta de 20 de Abril de 1638.

Multiplicando ambos os lados pelo o denominador, e dividindo por e :

$$2b^3 - 2b^2a - b^2e + bae \sim b^2a + ae^2 - 2bae.$$

Como não há termos comuns, removemos todos aqueles que contém e e consideramos os outros iguais:

$$2b^3 - 2b^2a = b^2a, \text{ de onde } 3a = 2b$$

Consequentemente, $IA/AO = 3/2$, e $AO/OI = 2/1$. Q.E.D.

O mesmo método pode ser aplicado para centros de gravidade de todas as parábolas até o infinito, também pode ser aplicado em conóides parabólicas. Eu não tenho tempo para indicar, por exemplo, como encontrar o centro de gravidade no nosso conóide parabólico de revolução em torno da ordenada; bastaria dizer que nesse conóide, o centro de gravidade dividiria o eixo em dois segmentos cujo a razão é de 11/5.

III

SOBRE O MESMO MÉTODO

Pelo meu método, gostaria de dividir uma linha AC (fig.94), no ponto B, de modo que $AB^2 \times BC$ seja o máximo de todos os sólidos que poderiam ser formados da mesma forma dividindo a linha AC.

Fig. 94.



Supomos, em notação algébrica, que $AC=b$, a variável desconhecida $AB=a$; teremos $BC = b-a$, e o sólido a^2b-a^3 deve satisfazer a condição proposta.

Agora tomando $a+e$ no lugar de a , nós teremos para o sólido

$$(a+e)^2(b-e-a)=ba^2+be^2+2bae-a^3-3ae^2-3a^2e-e^3.$$

Comparo isso com o primeiro sólido: a^2b-a^3 , como se eles fossem iguais. Quando de fato não são. É essa comparação que chamo *adequality*, segundo Diophantus, pois assim se pode traduzir a palavra grega $\pi\alpha\rho\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$ que ele usa.

Então, eu subtraio os termos em comum de ambos os lados, isso é, ba^2-a^3 . Feito isso, um lado da equação não tem nada, enquanto o outro é $be^2+2bae-3ae^2-3a^2e-e^3$. Portanto, devemos comparar os termos positivos com os negativos; temos assim a segunda *adequality* entre be^2+2bae em um lado, e $3ae^2+3a^2e+e^3$ no outro. Dividindo todos os termos por e , a *adequality* se manterá entre *adequality*. Depois desta divisão, se todos os termos puderem ser divididos por e , a divisão deve ser repetida, até que não haja termos que possam ser divididos por e , ou, empregar a terminologia de Viète, um termo que não é mais afetado por e . Mas, no exemplo proposto, nós encontramos que a divisão não pode ser repetida; então, temos que parar por aí.

Agora, eu removo todos os termos afetados por e ; em um lado permanece $2ba$, enquanto o outro lado tem $3a^2$, termos entre os quais é necessário para estabelecer uma comparação falsa ou uma *adequação*, mas sim uma equação verdadeira. Divido ambos os lados pôr a ; dando-me $2b=3a$, ou $b/a=3/2$.

Retornamos para nossa questão, e dividimos AC por B de tal modo que $AC/AB=3/2$. Disse que o sólido $AB^2 \times BC$ é máximo de todos aqueles que podem ser formados pela linha AC dividida.

Para estabelecer a certeza deste método, pegarei um exemplo do livro de Apollonius, On the Determined Section, que de acordo como o relato de Pappus (no

início do livro VII), possuem difíceis limitações e notavelmente a que se segue, que eu considero ser a mais difícil. Pappus (Livro VII) supõe que seja encontrado, e, sem demonstrar a sua veracidade, considera-o como tal, e deriva outras consequências a partir disso. Neste local, Pappus chama de uma proporção mínima $\mu\nu\alpha\chi\acute{o}\nu$ καὶ ἐλάχιστον (singular e mínima), porque, se fizerem perguntas sobre grandezas dadas que em geral seja satisfeita por dois pontos, então para valores de máximo e mínimo haveria apenas um ponto. É por essa razão que Pappus chama a menor razão possível de questão mínima e singular (que é única). Neste ponto, Commandino duvida do significado do termo de Pappus $\mu\nu\alpha\chi\acute{o}\varsigma$, mas isso é porque ele ignora a verdade que acabei de dizer.

Aqui está a proposta. -Seja dada a linha OMID (fig.95), e nela há quatro pontos O, M, I, and D. Divida o segmento MI no ponto N, de forma que $(ON \times ND)/(MN \times NI)^{19}$ seja a menor razão entre qualquer dois retângulos $(ON \times ND)/(MN \times NI)$.

Fig. 95.



Chamamos $OM=b$, $DM = z$, $MI = g$, e seja $MN = a$ desconhecido. Teremos então, na forma de notação:

$$ON \times ND = bz - ba + za - a^2, \quad MN \times NI = ga - a^2.$$

Portanto, é necessário que a razão $(bz - ba + za - a^2)/(ga - a^2)$ seja a menor de todas aquelas que podem ser obtidas por qualquer divisão da linha MI.

Agora substitua $a + e$ por a , e nós teremos a razão

$$(bz - bas - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae)/(ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae),$$

que deve ser comparada por *adequality* na primeira, ou seja, vamos multiplicar um lado, o primeiro termo (first term) por um quarto, e do outro, multiplicaremos o segundo termo por um terço, e então comparar os dois produtos:

$$(bz - ba + za - a^2)(ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae)$$

$$\begin{aligned} &\text{Primeiro termo} \qquad \qquad \text{último termo} \\ &= bzga - gba^2 - gza^3 + bzge - bage \\ &\quad + zage - a^2ge - bza^2 + ba^3 - za^3 + a^4 \\ &\quad - bze^2 + bae^2 - zae^2 + a^2e^2 - 2bzae \\ &\quad \quad + 2ba^2e - 2za^2e + 2a^3e \end{aligned}$$

O outro lado,

$$\begin{aligned} &(ga - a^2)(bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae) \\ &\text{Segundo termo} \qquad \qquad \text{Terceiro termo} \\ &= bzga - gba^2 - gbae + gza^2 + gzae \\ &\quad - ga^3 - gae^2 - 2ga^2e - bza^2 + ba^3 \\ &\quad + ba^2e - za^3 - za^2e + a^4 + a^2e^2 + 2a^3e. \end{aligned}$$

Comparo estes dois produtos por *adequality*; removendo os termos em comum e dividindo por e , nós temos:

$$\begin{aligned} &bzg - a^2g - bze + bae - zae - 2bza + 2ba^2 - 2za^2 \\ &\quad - gae - 2ga^2 + ba^2 - za^2 \end{aligned}$$

Removendo todos os termos em que e ainda existe, resta:

$$bzg - a^2g - 2bza - 2za^2 + 2ba^2 = -2ga^2 + ba^2 - za^2,$$

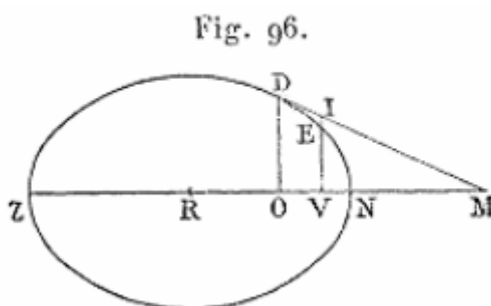
que se torna, por transposição,

$$-ba^2 + za^2 - ga^2 + 2bza = bzg.$$

¹⁹ A publicação *Œuvres* incorretamente tem MI em vez de NI.

Ao resolver esta equação, encontraremos o valor de a ou de MN , então o ponto N , e verificaremos a proposição de Pappus, que nos ensina que para encontrar o ponto N , devemos fazer $OM \cdot MD / OI \cdot ID = MN^2 / NI^2$; para a resolução da equação levaremos a mesma construção.

Para aplicar esse mesmo método em tangentes, posso proceder da seguinte forma. Por exemplo, seja uma elipse ZDN (fig.96), com eixo ZN e centro R . Tomamos um ponto D na circunferência, e desenho a tangente DM da elipse a partir deste ponto, e desenhamos a ordenada DO . Em notação algébrica, supomos que $OZ = b$ e $ON = g$; a variável desconhecida $OM = a$, é entendido que a parte do eixo OM contém, entre o ponto O e o ponto onde o diâmetro atinge a tangente.



Como DM é tangente a elipse, se, através do ponto V tomar o centro entre O e N , desenhamos IEV paralelo a DO , então é evidente que a linha IEV intersecta a tangente DM e a elipse, nos pontos I e E . Mas, porque DM é tangente a elipse, todos os pontos, exceto D , são fora da elipse. Portanto, $IV > EV$ e $DO^2 / EV^2 > DO^2 / IV^2$. Mas, seguindo a propriedade da elipse, $DO^2 / EV^2 = ZO \cdot ON / ZV \cdot VN$, e $DO^2 / IV^2 = OM^2 / VM^2$. Portanto $ZO \cdot ON / ZV \cdot VN > OM^2 / VM^2$.

De forma arbitrária $OV = e$. Temos

$$\begin{aligned} ZO \cdot ON &= bg, & ZV \cdot VN &= bg - be + ge - e^2, \\ OM^2 &= a^2, & VM^2 &= a^2 + e^2 - 2ae. \end{aligned}$$

Portanto $bg / (bg - be + ge - e^2) > a^2 / (a^2 + e^2 - 2ae)$. Se, portanto, multiplicarmos o primeiro termo pelo o último e o segundo termo pelo terceiro, teremos

$$bga^2 + bge^2 - 2bgae > bga^2 - bae^2 + ge a^2 - a^2 e^2.$$

(Produto do primeiro termo pelo último termo)

Seguindo este método, é, portanto, necessário adequar esses dois produtos, remover os termos em comum, e dividir o restante por e ; temos então

$$bge - 2bga \sim -ba^2 + ga^2 - a^2 e$$

Removendo os termos que ainda contém e ,

$$-2bga \sim -ba^2 + ga^2,$$

termos que devem ser iguais, seguindo o método. Transpondo conforme seja necessário, teremos $ba - ga = 2bg$.

Vemos que essa solução é a mesma que a de Apollonius, que, seguindo a construção, para encontrar a tangente, devemos fazer $(b-g)/g = 2b/a$ ou $(ZO \cdot ON)/ON = 2ZO/OM$, enquanto que, de acordo como Apollonius, nós devemos fazer $ZO/ON = ZM/MN$. Está claro que estas duas construções chegam ao mesmo final.

Eu poderia adicionar o número de outros exemplos, tanto os primeiros e segundos casos do meu método, mas esses são suficientes, e eles provam suficientemente que é geral e nunca falham.

Eu não adiciono a demonstração da regra, nem as outras inúmeras aplicações que poderiam confirmar o alto valor da regra, tais como a descoberta de centros de gravidade e assíntotas, as quais enviei um exemplo para o sábio M. de Roberval.

IV
O MÉTODO DE MÁXIMO E MÍNIMO

Enquanto estudava o método de *syncrise and anastrophe* de Viète, e cuidadosamente seguindo a aplicação do estudo da constituição de equações correlatas, veio na minha mente derivar dele um processo para encontrar o máximo e mínimo, e resolver facilmente todas as dificuldades em torno das condições limitadas, que tem causado muita dificuldade aos geométricos antigos e modernos.

Os máximos e mínimos são realmente únicos e singulares, como Pappus disse e os mais antigos já sabiam, apesar de Commandino alegar ignorância ao que Pappus quis dizer com o termo $\mu\upsilon\nu\alpha\chi\acute{o}\varsigma$ (singular). Segue-se que em ambos os lados do ponto limite, pode-se encontrar equações ambíguas; que as duas equações ambíguas são então correlativas, iguais e semelhantes.

Por exemplo, proponha *dividir a linha b até que o produto dos segmentos seja máximo*. O ponto que satisfaz essa questão é claramente o meio da linha, e o produto máximo é igual a $b^2/4$; nenhuma outra divisão desta linha será o produto igual a $b^2/4$.

Mas se propõe dividir a mesma linha b em produtos de segmentos que sejam igual a zII (assumindo que essa área seja $b^2/4$), vamos ter dois pontos que satisfazem a questão, e estarão situados em ambos os lados dos pontos correspondentes do produto máximo.

De fato, seja a um dos segmentos da linha b, teremos então $ba - a^2 = zII$, um equação ambígua, pois para linha reta a o valor pode ser qualquer umas das duas raízes. Portanto seja a equação correlativa $ba - e^2 = zII$. Se compararmos esses dois métodos seguindo o método de Viète:

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Dividindo ambos os lados pôr a-e, temos

$$b = a + e;$$

Além disso, os comprimentos a e e serão desiguais.

Se temos uma area maior que zII, mas ainda menor que $b^2/4$, a diferença entre as linhas a e e será menor que a anterior, os pontos de divisão se aproximam do ponto constituinte do produto máximo. A medida que o produto de segmentos é incrementado, o mais, ao contrário, a diferença entre a e e diminuirá, até que desapareça completamente as divisões correspondentes ao produto máximo. Nesse caso, há somente uma única e singular solução: a quantidade de a e e devem ser iguais.

Agora o método de Viète, aplicado para as duas equações correlatas acima, nos levou a igualdade $b = a + e$; portanto, se $e = a$ (que vai acontecer constantemente no ponto que constitui o máximo e mínimo), teremos, no caso proposto, $b = 2a$. Que é dito que se pegarmos o centro da linha b, o produto de dois segmentos será máximo.

Seja a um dos segmentos, nós devemos maximizar $ba^2 - a^3$. A equação correlativa, igual e semelhante é $be^2 - e^3$. Comparamos as duas equações usando o método de Viète:

$$ba^2 - be^2 = a^3 + ae + e^2,$$

que tem a composição das equações correlativas.

Para encontrar o máximo, fazemos $e = a$; chega em

$$2ba = 3a^2 \text{ ou } 2b = 3a;$$

o problema está resolvido.

Entretanto, como, na prática, divisões por um binômio são geralmente complicadas e muito *taxing*, é preferível, que quando comparamos equações correlatas, revelar as diferenças das raízes, então requer somente uma simples divisão por essa diferença.

Procuramos o máximo de $b^2a - a^3$. Seguindo as regras do método anterior, devemos tomar $b^2e - e^3$ como equação correlata. Assim como e e a , é desconhecida, nada nos impede de designar $a+e$, teremos então

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3.$$

Se eliminarmos os termos iguais, é evidente que todos os termos restantes serão afetados pela variável desconhecida e : aqueles que envolvem somente a são os mesmos de ambos os lados. Assim, temos

$$b^2e = e^3 + 3a^2e = 3e^2a,$$

e, dividindo todos os termos por e , temos

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae,$$

que forma das duas equações correlatas nesta forma.

Para encontrar o máximo, nós devemos equacionar as raízes de ambas as equações, na ordem que satisfaça as regras do primeiro método, de que nosso novo processo deriva seu raciocínio e seus meios de operação.

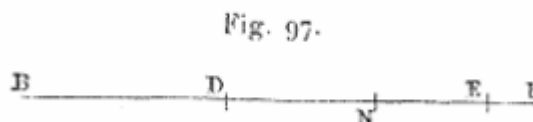
Assim, devemos equacionar $a+e$ com a , onde $e = 0$. Mas, usando a forma de equações correlativas que encontramos,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae;$$

Devemos remover, dessa equação, todos os termos afetados por e , para reduzi-los a 0; restando $b^2 = 3a^2$, uma equação que dará o máximo do produto procurado.

Para apresentar de forma mais completa a forma geral desses dois métodos, consideramos dois novos tipos de equações correlativas que não foram tratadas por Viète e que nós vamos pegar emprestadas do *Book on the Determined Section* de Apollonius (em Pappus, Livro VII, proposição.61), em que a questão das condições limitantes é expressa reconhecida pela dificuldade de Pappus.

Seja a linha BDEF (fig. 97), em que pontos B, D, E e F são dados. Encontre o ponto N entre os pontos D e E, de modo que a razão dos produtos $BN \times NF$ e $DN \times NE$ sejam mínimos.



Chamamos $DE = b$, $DF = z$, $BD = d$, $DN = a$; para minimizar a razão é requerido $(dz - da + za - a^2)/(ba - a^2)$.

A razão correlata similar e igual $(dz - de + ze - e^2)/(be - e^2)$. De acordo com o nosso primeiro método. Fazemos uma equação de produtos de termos médios e extremos, dando nos

$$\begin{aligned} dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2 \\ = dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2. \end{aligned}$$

Removendo todos os termos semelhantes e fazendo as transposições devidas:

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2.$$

Dividindo ambos os lados por $a - e$ (que será muito fácil, se termos correlacionados forem tomados juntos; assim $(dzba - dzbe)/(a - e) = dzb$. e $(dea^2 - dae^2)/(a - e) = dae$, etc; é fácil ordenar os termos correlacionados para assegurar essas divisões), teremos depois a divisão,

$$dzb + dae - zae + bae = dza + dze,$$

cuja equação fornece a forma das duas equações correlativas.

Seguindo o método, para mudar dessa forma para a de mínimo nós devemos fazer $e=a$, onde

$$dzb + da^2 - za^2 + ba^2 = 2dza;$$

A resolução desta equação será dada pelo valor de a , para que a razão proposta será mínima.

O analista não será parado pelo fato de que esta equação tem duas raízes, uma delas deve ser falsa, mesmo que não queira saber. Mesmo com equações que possuam mais de duas raízes, um analista mais ou menos sábio deve usar um ou outro de nossos métodos.

Mas é evidente, que seguindo o exemplo que nós temos tratado, que o primeiro dos dois métodos será geralmente, menos fácil de usar, por causa de divisões repetidas por binômios. Devemos, portanto, ter a segunda como recurso, embora simplesmente derivado do primeiro, como tenho dito, vai proporcionar aos analistas de hábeis uma facilidade surpreendente e numerosos atalhos. Além disso, pode ser aplicado com uma facilidade e elegância muito superiores ao estudo de tangentes, centros de gravidade, assíntotas e outras questões similares.

Assim, com a mesma confiança de antes, ainda afirmo hoje que o estudo de máximo e mínimo se resume a uma regra única e geral, cujo a alegria do sucesso sempre será legítima e não por acaso como alguns pensaram.

Seja a uma variável desconhecida (ver página 121, no final da linha 6) ... sua primeira expressão.

Se ainda houver alguém que considere o sucesso do método por acaso, ele é bem-vindo para tentar encontrar algo semelhante.

Dado três pontos, encontre um quarto ponto de modo que a soma de suas distâncias aos três pontos dados seja mínima.

V

APÊNDICE AO MÉTODO DE MÁXIMO E MÍNIMO²⁰

Radicais são frequentemente encontrados no curso de trabalho com problemas. Portanto, o analista não deve hesitar em empregar uma terceira variável desconhecida, ou, se necessário, em usar um número ainda maior deles. Dessa forma, evitaremos, de fato, ordens maiores, que ao se repetirem, geralmente complicam os cálculos. A técnica deste método será explorada pelo exemplo seguinte.

Dado um semicírculo de diâmetro AB (fig. 98), com DC perpendicular traçado sobre o diâmetro, encontre o máximo da soma $AC+CD$.

Fig. 98.



²⁰ Escrito em 1644.

Tomado o diâmetro como b e seja $AC=a$. Assim teremos $CD = \sqrt{(ba - a^2)}$. A questão torna-se a maximização da quantidade $a + \sqrt{(ba - a^2)}$.

Aplicando as regras do método, iremos *ad-equating* as expressões de grau mais alto; designamos a quantidade máxima pôr o^{21} ; por que deveríamos abandonar o costume estabelecido por Viète de utilizar vogais para representar quantidades desconhecidas?

Assim, teremos $a+(ba-a^2)=o$; portanto $(ba-a^2)=o-a$, e por quadratura temos:

$$o^2+a^2-2oa=ba-a^2.$$

Está pronto, devemos fazer transposição de forma que um dos lados da equação contenha termos com o com grau elevado. A partir disso, seremos capazes de determinar o máximo, que é o foco desta técnica. Essa transposição nos dar

$$ba-2a^2+2oa=o^2.$$

Mas por hipótese, o é a quantidade máxima; portanto o^2 , é o quadrado da quantidade máxima, ele deve ser máximo. Consequentemente, $ba-2a^2-2oa$ (a expressão igual a o^2) será máxima. No entanto, não contém radical. Seguindo o método, trataremos como uma quantidade conhecida. Teremos a coequality

$$ba-2a^2+2oa \sim ba+be-2a^2-2e^2-4ae+2oa+2oe.$$

Eliminamos os termos em comum, e dívida os outros por e :

$$b+2o \sim 2e+4a.$$

Removendo $2e$ de acordo com a regra, teremos

$$b+2o=4a, \text{ onde } 4a-b=2o \text{ ou } 2a-12b=o$$

Tendo estabelecido essa equação pelo método, deveremos primeiro, no qual supomos $a+(ba-a^2)=o$.

Mas só temos que encontrar $o=2a-12b$; portanto

$$2a-12b=a+(ba-a^2), \text{ onde } a-12b=(ba-a^2).$$

Elevando ao quadrado:

$$a^2+14b^2-ba=ba-a^2,$$

onde, finalmente

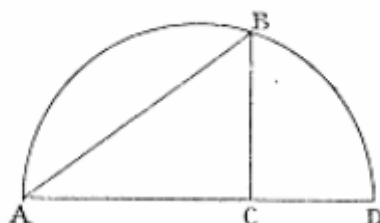
$$ba-a^2=18b^2;$$

dessa última equação podemos expressar nosso valor máximo correspondente de a .

Podemos empregar a mesma técnica para encontrar o *cone com superfície máxima que pode ser inscrito dentro de uma esfera determinada*.

Seja AD (fig.99) o diâmetro dessa esfera, AC a altura do cone procurado, AB seu lado, e BC o raio de sua base. De acordo com Archimedes, é necessário que a soma $AB \times BC + BC^2$ seja máxima.

Fig. 99.



Seja b o diâmetro e $AC=a$. Teremos $AB=ba$, e $BC=(ba-a^2)$,

²¹ Sim, esta é a vogal o . No CEuvres, um macron é colocado cima do o para evitar confusão com zero

$$AB \times BC + BC^2 = (b^2 a^2 - ba^3) + ba - a^2.$$

Vamos equacionar a soma com a área máxima, o.

$$0 + a^2 - ba = (b^2 a^2 - ba^3).$$

Agora nós quadrado, etc. O método indicado nos trouxe uma equação que tem o e assim nos permite resolver aquilo que colocamos.

Entretanto, no exemplo escolhido, podemos obter a solução sem usar uma terceira variável desconhecida; podemos resolver o problema da seguinte forma: dado a linha AB no triângulo CBA, encontre a máxima razão $(CB \times BA + CB^2)/AD^2$. Neste caso, o primeiro método é suficiente.

Seja dada a linha AB representada por b, e seja CB=a. Teremos $AC^2 = b^2 - a^2$. Mas $AC^2/AB^2 = AB^2/AD^2$; portanto $AD^2 = b^4/(b^2 - a^2)$. Ainda desejamos que a razão de $ba + a^2$ desta última expressão seja máxima.

Multiplique em cima e em baixo por $b^2 - a^2$; a razão $b^4/(b^3 a + b^2 a^2 - ba^3 - a^4)$ deve ser mínima. Mas b^4 é dado, como potência de b; portanto a quantidade deve ser mínima. Mas b^4 é dado, como potência de b; portanto a quantidade $b^3 a + b^2 a^2 - ba^3 - a^4$ deve ser máxima.

O método dá a equação

$$b^3 + 2b^2 a = 3ba^2 + 4a^3,$$

cujo o grau pode ser imediatamente reduzido²²:

$$4a^2 - ba = b^2;$$

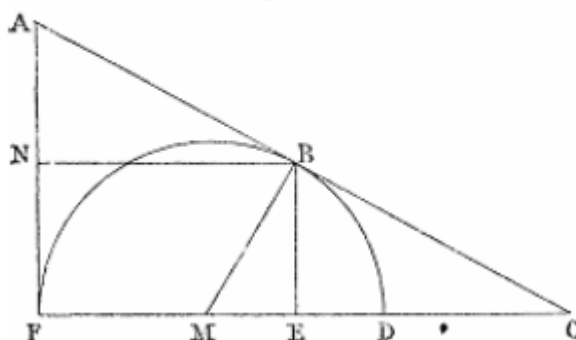
do qual a solução é clara.

Não ficaremos presos ao assunto elucidado; vemos como, fazendo uso de uma terceira ou quarta variável desconhecida, e, se necessário multiplicando novamente o número de posições auxiliares, devemos nos livrar dos radicais e todos os outros obstáculos que podem atrasar a análise.

No entanto, embora a invenção das tangentes proceda do método geral, podemos observar que, em certos casos, a questão dos máximos e mínimos podem ser resolvidas de forma mais elegante e talvez mais geométrica, através da construção de uma tangente.

Vamos dar um exemplo que pode ser utilizado em vários outros:

Fig. 100.



Em um semicírculo FBD (fig. 100), desenhe a perpendicular BE; buscamos o produto máximo de $FE \times EB$.

Se de acordo com nosso método, buscamos construir o retângulo $FE \times EB$ dando-lhe um valor, a questão se resume a descrever uma hipérbole que tem AF e FC como assíntotas e onde o produto das abscissas FE e ordenadas EB deveriam ter

²² Tomando em conta a raiz $a = -b$. (Nota dos editores de Œuvres)

o valor dado; os pontos de interseção da hipérbole e o semicírculo preencherá a questão. Mas, como o produto $FExEB$ deve ser máximo, devemos, de fato, fazer com que a hipérbole AF e AC sejam suas assíntotas, e que, ao invés de cruzar o semicírculo, seja tangente em B . Pois os pontos de contato determinam quantidades máximas e mínimas.

Suponhamos o problema resolvido: se a hipérbole tocar o semicírculo em B , a tangente do semicírculo em B também será tangente a hipérbole. Seja esta linha ABC . É tangente a hipérbole em B e toca as assíntotas em A e C ; portanto, de acordo com Apollonius, $AB=BC$. Consequentemente, $FE=EC$ e $AF=2BE=2AN$. Mas, como é tangente ao círculo, $BA=AF$; portanto $BA=2AN$, e por semelhança de triângulos, se M é o centro, $MB=2ME$. Mas a razão MB é dada; portanto o ponto E será conhecido.

Similarmente, podemos em geral reduzir qualquer busca por máximo ou mínimo para a construção geométrica de uma tangente; mas isso não diminui a importância do método geral. Já que a construção de tangentes depende dele, da mesma forma que a determinação de máximos e mínimos.

VI

O MESMO MÉTODO

A teoria de tangentes é um resultado de vários métodos publicados ao longo do tempo para o encontro de máximo e mínimo, que permite soluções fáceis de todo problema de limite, e problemas, dito famosos cuja condições de limites foram consideradas difíceis por Pappus (Livro VII, prefácio).

As linhas curvas as quais estamos procurando tangentes podem ser expressas por suas propriedades específicas, seja apenas por meio de linhas retas, ou por meio de uma combinação de curvas complexas, como desejar, com a ajuda de linhas retas ou outras curvas.

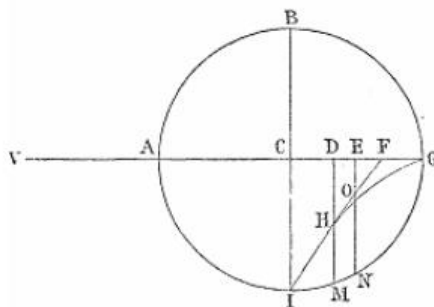
Com nossa regra, já cumprimos as condições para o primeiro caso que pode ter parecido difícil por ser demasiado conciso; no entanto, foi reconhecido como legítimo.

De fato, no plano de uma curva arbitrária, nós consideramos duas linhas dada em posição, uma chamada de *diâmetro*, a outra, de *ordenada*. Assumimos que a tangente já se encontra em um ponto dado da curva, e consideramos por *ad-equality* a propriedade específica da curva, não mais sobre a curva em si, mas sobre a tangente procurada. Seguindo nossa teoria de máximo e mínimo, eliminamos aqueles termos que devem ser eliminados, e chegamos em uma equação que determina o ponto de intersecção da tangente com o diâmetro, e então depois a própria tangente.

Para exemplos numerosos que já dei, acrescentarei que dá tangente para o cissoide, inventado, é dito, por Diocles.

Seja um círculo que há dois diâmetros AG , BI (fig. 101) se cortam perpendicularmente, e seja uma cissoide IHG , no qual, através de qualquer de seus pontos, digamos H , devemos desenhar a tangente.

Fig. 101.



Vamos considerar o problema a ser resolvido e supor que F seja a interseção de CG e a tangente HF. Chamaremos $DF = a$, e, tomando um ponto arbitrário E entre D e F, dizemos que $DE = e$.

Fazendo uso de propriedades específicas do cissoide que $MD/DG = DG/DH$, teremos assim que expressar analiticamente a adequality $NE/EG \sim EG/EO$, EO no começo da linha EN entre E e a tangente.

Seja dado $AD = z$, $DG = n$ e $DH = r$, e, como temos dito, $DF = a$ desconhecido, o $DE = e$ arbitrário.

Teremos

$$EG = n - e, EO = (ra - re)/a, EN = \sqrt{(zn - ze + ne - e^2)}.$$

De acordo com a regra, devemos considerar a propriedade específica, não na curva, mas na tangente, e, portanto, declarar que $NE/EG \sim EG/EO$, EO começando na ordenada da tangente. Ou, em notação analítica:

$$\sqrt{(zn - ze + ne - e^2)} / (n - e) \sim (n - e) / [(ra - re)/a].$$

Elevando ao quadrado, para remover o radical:

$$(zn - ze + ne - e^2) / (n^2 + e^2 - 2ne) \sim (n^2 + e^2 - 2ne) / [(r^2a^2 + r^2e^2 - 2r^2ae) / a^2].$$

Multiplicando todos os termos por a^2 , e, de acordo com a regra, por *adequalizing* a o produto dos extremos com o quadrado da média, e removendo os termos supérfluos, de acordo com nosso método, teremos finalmente

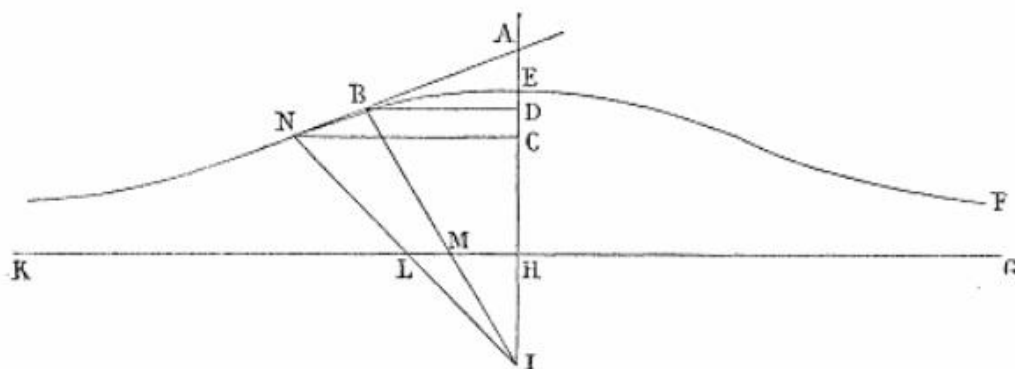
$$3za + na = 2zn.$$

De onde vem a seguinte construção da tangente: estender o raio de CA para V de maneira que $AV = AC$. Dividir $AD \times DG$ por VD , fazer DF o cociente; ligar com FH. Você terá a tangente do cissoide.

Nós também indicamos como proceder para o *concóide de Nicomedes*, mas apenas esboçamos para não ser prolongado.

Seja o concóide de Nicomedes construído na figura como em Pappus e Eutocius (fig. 102. O pólo é I, KG a assíntota, IHE a assíntota perpendicular, N um ponto dado na curva, através do qual estamos desenhando a tangente NBA encontrando IE em A.

Fig. 102.



Supomos que o problema a ser resolvido, acima. Desenhemos NC paralelo a KG. Pelas propriedades específicas da curva, temos $LN=HE$. Tomamos um ponto arbitrário entre C e E, dito D, e desenhamos DB através destes pontos, paralelo a CN, DB alcançando a tangente B. Já que a propriedade específica da curva deve ser considerada na tangente, vamos aderir o centro entre BI e KG como M. Seguindo a arte das regras, devemos adequar MB e HE. Assim chegaremos na equação procurada. Para isso, indicaremos, acima, que $CA=a$, $CD=e$, $EH=z$, e chamaremos as outras ordenadas por seus nomes. Encontraremos facilmente a expressão analítica da linha MB. Vamos então adequar, o que vem sendo dito, para linha HE, e solucionar o problema.

O que eu tenho falado parece ser superficial para o primeiro caso. A verdade é que há um número infinito de artifícios que encurtam os cálculos na prática; mas um pode facilmente deduzi-los do que vieram antes.

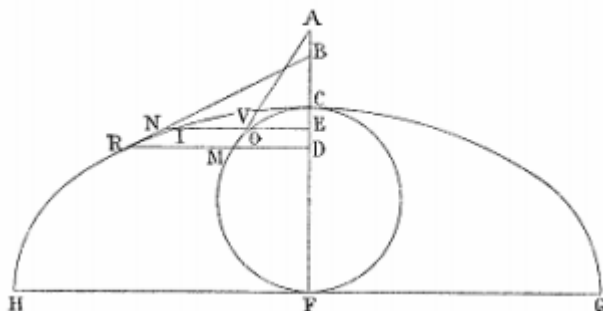
Como pelo segundo caso que M. Descartes considerou difícil, e para quem nada é, temos comprado isso como satisfatório por meio de muitos métodos elegantes e sutis.

Desde que os termos sejam formados somente por linhas retas, poderíamos encontrar e designá-los de acordo com a regra anterior. Além disso, para evitar radicais, poderíamos substituir, no lugar de ordenadas por curva, as ordenadas das tangentes encontradas pelo método anterior. Finalmente, e não menos importante, poderíamos substituir, por arcos e curvas, os comprimentos correspondentes das tangentes já encontradas, e chegar na adequação, como temos indicado: assim vamos facilmente satisfazer a questão.

Tomamos a curva de M. de Roberval - o ciclóide - como um exemplo.

Seja a curva HBIC (fig. 103), C é a cupula. e CF o eixo; descrevemos o semicírculo COMF, e tomamos um ponto arbitrário na curva, dito R, no qual a tangente RB é desenhada

Fig. 103.



Traçamos deste ponto R, perpendicularmente a CDF, a linha RMD, cortando o semicírculo em M. A propriedade específica desta curva é que a linha RD é igual a soma do arco do círculo CM e a ordenada DM. Então desenhamos, seguindo nosso método, MA, a tangente do círculo (o mesmo processo seria de fato aplicado se a curva COM fossem de outra natureza). Supomos a construção realizada, e seja DB=a desconhecido. As linhas encontradas pela construção: DA=b, MA=d; MD=r e RD=z dados, o arco do círculo CM=n dado, e a linha arbitrária DE=e.

De E traçar EOVIN paralelo a linha RMD; temos $a/(a-e)=z/NIVOE$, de onde temos $NIVOE=(za-ze)/a$.

Portanto é necessário ad-equate (devido a propriedade específica da curva, a qual é considerada na tangente) desta linha $(za-ze)/a$ para a soma $OE+arcCO$.

Mas $arcCO=arcCM-arcMO$. Portanto $(za-ze)/a \sim OE+arcCM-arcMO$.

Para obter a expressão analítica dos três últimos termos, evitando radicais, podemos, de acordo com a observação anterior, substituir a ordenada da tangente EV por OE, e a parte da tangente MV por arcMO.

Para encontrar a expressão analítica de EV, além disso temos $b/(b-e)=r/EV$, de onde $EV=(rb-re)/b$.

Para MV, por motivo da semelhança de triângulos, temos, acima, $b/d=e/MV$, de onde $MV=de/b$.

Finalmente temos $arcCM=n$. Assim, temos, analiticamente:

$$(za-ze)/a \sim (rb-re)/b + n - de/b.$$

Multiplicando ambos os lados por ab:

$$zba - zbe \sim rba - rae + bna - dae$$

Mas, pela propriedade das curvas, conhecemos $z=r+n$, e, portanto, $zba=rba+bna$.

Removendo os termos em comum, temos

$$zbe \sim rae + dae.$$

Dividimos por e; uma vez que não há mais termos desnecessários aqui, não há outras eliminações para fazer:

$$zb=ra+da, \text{ de onde } (r+d)/b=z/a.$$

Para a construção, faremos então $(MA+MD)/DA=RD/DB$; vamos unir BR que toca a curva CR.

Mas visto que $(MA+MD)/DA=MD/DC$, como é fácil demonstrar, podemos ter $MD/DC=RD/DB$, ou, para fazer a construção mais elegante, devemos unir MC e então traçar RB paralelo.

O mesmo método vai dar a tangente para toda curva deste tipo. Temos indicado sua construção geral há muito tempo.

Desde então tem sido proposto encontrar a tangente da quadratriz de Dinostratus, aqui é como podemos construir de acordo com o método anterior.

Seja AIB um quarto do círculo (fig. 104), AMC a quadratriz, na qual traçamos a tangente até um ponto M dado. I une MI, e então com I como o centro e IM o raio, I traça o quarto do círculo ZMD. Traçando MN perpendicular, I faz $MN/IM=arcMD/IO$. I une MO que será tangente a quadratriz; isso deve ser suficiente.

Mas, como uma conquista coroada, podemos sempre *encontrar as assíntotas de uma curva dada*, um estudo no qual produz notáveis propriedades para curvas indefinidas. Então desenvolvemos e demonstramos mais em um tempo futuro.

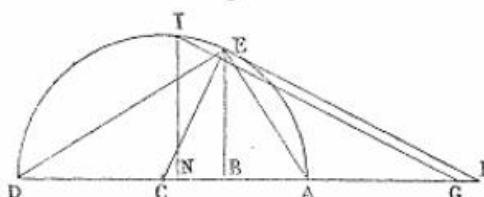
VII

PROBLEMA ENVIADO PARA O REVERENDO PADRE MERSENNE EM 10 DE NOVEMBRO, 1642

Encontre o cilindro de máxima área superficial inscrito na esfera dada.

Seja dada a esfera de diâmetro AD (fig.106), com centro C. É exigido que a inscrição do cilindro de superfície máxima esteja dentro dela.

Fig. 106.



Supomos a solução do problema. Seja DE o diâmetro da base do cilindro, EA é o lado (podemos de fato dar essa posição no cilindro, o ângulo inscrito no semicírculo começando na direita). A superfície do cilindro é proporcional a $DE^2 + 2DE \cdot EA$; é, portanto, necessário para encontrar o máximo da soma $DE^2 + 2DE \cdot EA$.

Se a perpendicular EB ser descartada, temos para um termo $DE^2 = AD \cdot DB$, e para o outro $DE \cdot EA = AD \cdot BE$. Assim, devemos encontrar o máximo da soma $AD \cdot DB + 2AD \cdot BE$, ou, dividindo os termos pela linha AD dada, o máximo da soma $DB + 2BE$.

Essa questão é fácil. Se deixamos $CB = BE/2$, ou (no qual é realmente alguma coisa), $BC = CE/5$, o ponto E resolverá o problema. De fato, traçando a tangente EF a qual alcança a extensão do diâmetro até F. Digo que a soma $DB + 2BE$ é máxima.

Já que $CB = BE/2$, $BE = BF/2$; portanto $BF = 2BE$; portanto $DF = DB + 2BE$. Assim é claro que a soma $DB + 2BE$ é máxima.

De fato, tomamos um ponto arbitrário no semicírculo - seja ele I - e descartamos a perpendicular IN; de algum ponto I, traçamos IG paralelo à tangente e coincidindo o diâmetro até G. Esse ponto G cairá entre os pontos F e D, caso contrário o paralelo GI não poderia atingir o semicírculo. Por razões paralela, temos $FB/BE = GN/NI$. Mas $FB = 2BE$; portanto $GN = 2NI$, e $GD = DN + 2NI$. Mas como $GD (= DN + 2NI)$ é menor que $DF (= DB + 2BE)$, segue-se que $DB + 2BE$ é máximo e que o cilindro desejado terá DE para sua base e EA para seu lado.

Pode-se provar, seguindo o precedente, que a razão DE/EA é do maior para o menor segmento de uma linha dividida a razão média e extrema²³.

Além disso, pelo mesmo processo, podemos encontrar e construir um cilindro com a área superficial dada.

Este problema será reduzido para questões de igualdade da soma $DN + 2NI$ e uma linha dada, que é, DG, no qual, depois de ter encontrado o valor para o máximo, deveria ser, no máximo, igual ao DF. Trace GI paralelo a FE; o ponto I resolverá o problema, e onde poderia ter dois cilindros pode ter um na condição proposta.

²³ Também conhecida como razão de ouro, ou razão divina.

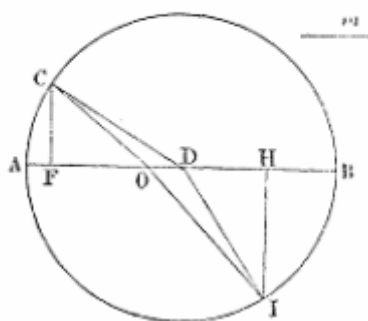
Se, de fato, o ponto G cair entre F e A, dois cilindros diferentes vão satisfazer o problema; mas se G cair em A ou qualquer ponto perto de D, a solução será única.

VIII ANÁLISE POR REFRAÇÃO²⁴

Seja ACBI (fig. 108) um círculo cujo diâmetro AFDB separa duas médias de natureza diferente, a menos densa começa no lado ACB, e a mais densa começa no lado AIB.

Seja D o centro do círculo e CD um raio incidente caindo sobre o centro do ponto C dado; procuramos saber o raio refratado DI, ou ponto I através do qual o raio passe depois da refração.

Fig. 108.



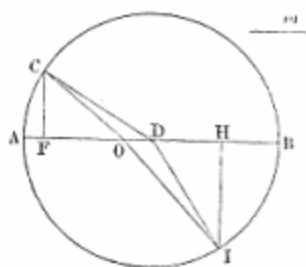
Descartar CF e IF perpendicular ao diâmetro. Ponto C sendo dado, juntamente com o diâmetro AB e o centro D, o ponto F e a linha FD são também conhecidas. Supomos que a razão da resistência da densidade média da resistência da média incomum, seja a mesma razão entre a linha DF dada e outra dada linha m traçada fora da figura. Teremos $m < DF$, a resistência média incomum necessariamente começa menor que a do meio mais denso por um axioma mais que natural.

Por meio das linhas m e DF , agora temos como medir os movimentos ao longo das linhas CD e DI ; assim poderemos representar comparativamente a totalidade do movimento ao longo dessas duas linhas pela soma de dois produtos: $CD \cdot m + DI \cdot DF$.

Assim a questão se resume a divisão do diâmetro AB até o ponto H tal que se a perpendicular HI ser construída até este ponto, e DI ser unido, a área $CD \cdot m + DI \cdot DF$ será mínima.

²⁴ Esta peça foi enviada por Fermat a M. de la Chambre, acompanhando sua carta de 1 de janeiro de 1662.

Fig. 108.



Para este efeito, empregamos nosso método, já difundido entre geométricos e exposto há cerca de vinte anos por Hérigone em seu *Cursus mathematicus*. Chamamos n o raio CD ou igual DI , b a linha DF , e $DH=a$. A quantidade $nm+nb$ deve ser mínima.

Tomemos uma linha DO arbitrária como nosso desconhecido e , e unir CO e OI . Em notação alítica, $CO^2=n^2+e^2-2be$, e $OI^2=n^2+e^2+2ae$; portanto

$$CO \cdot m = \sqrt{(m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be)}.$$

$$OI \cdot b = \sqrt{(b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae)}.$$

Seguindo as regras da arte, a soma destes dois radicais devem ser *ad-equated* para $mn+bn$.

Para causar o desaparecimento dos radicais, vamos elevá-los ao quadrado, e vamos acabar com os termos em comum. Vamos transpor os termos de forma a deixar somente os radicais restantes em um dos lados da equação. Então vamos elevar ao quadrado a nova equação. Depois novas eliminações de termos em ambos os lados, dividir por e e remover os termos que contém e , seguindo as regras do nosso método geral conhecido por um longo tempo, então revendo os fatores comum, chegaremos até a equação mais simples possível envolvendo a e m . Que é dito depois de ter removido o obstáculo dos radicais, descobriremos que a linha DH da figura é igual para a linha m .

Consequentemente, após ter traçado as linhas CD e DF , devemos encontrar o ponto de refração tomando linhas DF e DH para ser a razão da resistência e densidade da média incomum - a razão de b para m . De H construiremos a linha HI perpendicular para o diâmetro; vai interceptar o círculo I , o ponto onde o raio refratado passará. E assim o raio, passando do incomum para um médio denso, se curvará para longe do lado e em direção à perpendicular: o que concorda absolutamente e sem exceção com o teorema descoberto por Descartes. A análise acima, deriva do nosso princípio, portanto dado este teorema Cartesiano uma rigorosa demonstração exata.

IX

SÍNTESES PARA REFRAÇÕES²⁵

Descartes, o sábio, propôs uma lei de refração que, como dizem, está de acordo com a experiência; mas demonstrá-la, ele teve que confiar um postulado absolutamente indispensável para seu raciocínio, a saber: que a luz move mais

²⁵ Segundo a cópia desta parte que Clerselier recebeu, Fermat enviou para Marsenne em fevereiro de 1662.

facilmente e rapidamente em meios densos que em incomuns. Já este postulado parece ser contrário à luz da razão.

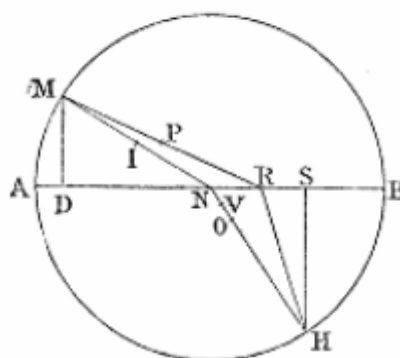
Ao procurar estabelecer a verdadeira lei de refração partindo do princípio contrário, ou seja, que o movimento da luz é fácil e rápido em meio incomum que em meio denso, chegamos à lei precisa que Descartes havia enunciado. Sem paralogismo, é possível chegar à mesma verdade por dois caminhos absolutamente opostos? Essa é a questão que deixaremos para a análise dos geométricos que têm perspicácia suficiente para resolver rigorosamente, porque, sem entrar em discussões vagas, a posse segura da verdade é suficiente para nós e consideramos preferível a uma longa série de discussões inúteis e ilusórias.

Nossa demonstração depende exclusivamente do postulado que a natureza opera pelos meios e caminhos mais fáceis e convenientes. Pois acreditamos que deve ser afirmado desta forma, e não da forma ordinárias, que diz que a natureza opera por linhas curtas.

De fato, na adição especulamos nos movimentos naturais dos corpos densos, Galileo mediu essa relação em tempo assim como no espaço, similarmente, não vamos considerar espaços ou linhas curtas, mas esses caminhos no qual podemos viajar facilmente, de maneira mais cômoda e no menor tempo.

Esta colocação, seja no meio de duas naturezas diferentes (fig. 109) separadas pelo diâmetro ANB do círculo AHBM, o meio menos denso começa no lado M, e o mais sendo no lado H.

Fig. 109.



Trace de M em direção a H as linhas arbitrárias MNH, MRH, cruzando o diâmetro nos pontos N e R.

De acordo com o postulado do axioma, a velocidade do elemento propagando ao longo de MN em um meio incomum começa maior que a velocidade do mesmo elemento movendo ao longo de NH, e o começo do movimento considerado será uniforme dentro de ambos os meios, a razão entre o tempo de movimento ao longo de MN e o tempo de movimento ao longo de NH será, como sabemos, o produto da razão do MN e NH com a razão inversa da velocidade ao longo de NH e MN. Assim temos $(\text{velocidade ao MN})/(\text{velocidade ao longo de NH}) = \text{MN}/\text{NI}$, e teremos $(\text{tempo através de MN})/(\text{tempo através de NH}) = \text{IN}/\text{NH}$.

Provaremos do mesmo modo que se a razão da velocidade em um meio incomum e denso é MR/RP , teremos $(\text{tempo através de MR})/(\text{tempo através de RH}) = \text{PR}/\text{RH}$. De onde segue que $(\text{tempo através de MNH})/(\text{tempo através de MRH}) = (\text{IN} + \text{NH})/(\text{PR} + \text{RH})$.

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2SN \cdot NR.$$

Mas para construção ($MN(=NH)/DN = NR/NO$), e $DN/NS = NO/NV$; portanto, ex æquo, $HN/NS = NR/NV$. Portanto $HN \cdot NV = NS \cdot NR$ e $2HN \cdot NV = 2SN \cdot NR$. Portanto

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2HN \cdot NV.$$

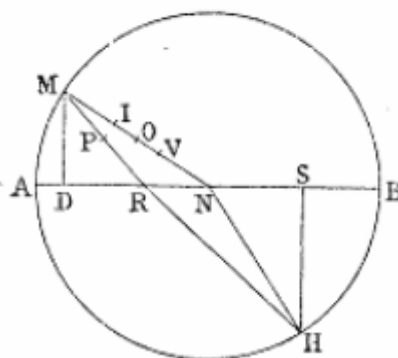
Mas temos que provar $NR^2 > NV^2$. Portanto

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 - 2HN \cdot NV.$$

Então $HN^2 + NV^2 - 2HN \cdot NV = HV^2$, segundo Euclíd; portanto $HR^2 > HV^2$ e $HR > HV$, no qual ficou por provar.

Sempre se tomarmos ponto R no raio AN, tal forma que as linhas MR e RH se estendesse uma na outra, como na seguinte figura (fig. 110) - embora a demonstração seja independente deste caso particular - o resultado seria o mesmo, ou seja, teremos sempre $PR + RH > IN + NH$.

Fig. 110.



Tomemos, como acima, $MN/DN = RN/NO$ e $DN/NS = NO/NV$. É claro que $RN > NO$ e $NO > NV$.

$MR^2 = MN^2 + NR^2 - 2DN \cdot NR$. Seguindo o raciocínio acima, podemos substituir $2MN \cdot NO$ por $2DN \cdot NR$. Além disso $NR^2 > NO^2$; portanto $MR^2 > MN^2 + NO^2 - 2MN \cdot NO$. Mas

$$MN^2 + NO^2 - 2MN \cdot NO = MO^2.$$

Portanto $MR^2 > MO^2$ e $MR > MO$.

Adicionalmente, temos por construção que $DN/NS = MN/IN = NO/NV$; portanto *vicissim*: $MN/NO = NI/NV$, e *dividindo*: $MO/ON = IV/VN$, e *vicissim*:

$$MO/IV = ON/NV = DN/NS = MR/PR.$$

Mas provamos que $MR > MO$; portanto $PR > IV$. Para estabelecer a proposta, resta provar que $RH > HN + NV$; na qual é bastante fácil após o precedente.

De fato, $RH^2 = HN^2 + NR^2 + 2SN \cdot NR$; como temos visto podemos substituir $2HN \cdot NV$ por $2SN \cdot NR$; além disso $NR^2 > NV^2$. Portanto

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 + 2HN \cdot NV;$$

Portanto, como acima, $HR > HN + NV$.

É, portanto, determinado que a soma de duas linhas PR e RH, sempre quando formam uma linha reta PRH, é sempre maior que a soma $IN + NH$.

Q.E.D.

FIM

ANEXO 3 – MÉTODO DE FERMAT PARA PONTOS DE MÁXIMO, MÍNIMO E TANGENTES. UMA RECONSTRUÇÃO

Método de Fermat para pontos de Máximo, Mínimo e Tangentes. Uma reconstrução

É bem conhecido que Fermat foi o primeiro a utilizar o comportamento característico de uma expressão algébrica próxima dos seus extremos como critério para a determinação destes extremos. Quando se trata, porém, de delinear o que o seu método realmente consistia, estamos desconsiderando um campo de estudo do qual a famosa frase dita por um filósofo grego (HERACLITOS, aparentemente) parece uma descrição singularmente adequada. A confusão começou ainda durante o tempo de vida de Fermat. Seus trabalhos e cartas, circulando apenas em manuscritos, eram os mais conhecidos na seleção. As diversas concepções dos métodos fermatianos foram, portanto, determinadas pela parte particular do corpus que tinha sido estudada por diferentes pessoas. Além disso, a influência do rápido desenvolvimento da matemática em cerca de 1630, levando a cada geração seguinte de matemáticos a interpretar seu método dentro de seu próprio quadro conceitual, e nós não podemos imaginar que quando *Varia Opera* surgiu em 1679, já era muito tarde. A tradição tinha até então se tornado muito forte e não deveria ser frustrada por meros textos.

Desde então, os historiadores tomaram suas sugestões das concepções do século 17 do método de Fermat. Eles expressaram isto tanto como a expansão de $f(x + h) - f(x) \approx 0$ em potências de h e deixando de fora os termos de segunda e maior ordem, h sendo ‘infinitesimalmente pequeno’, ou eles tomaram como base o critério de que a equação $f(x) - y = 0$ tem uma raiz dupla. Algoritmicamente não existe diferença entre essas duas aproximações. Em ambos os casos o procedimento seria para expandir $f(x + h)$ e pegar os coeficientes de primeira ordem que foram definidos iguais a zero nos pontos extremos. Este certamente também foi o método de Fermat. Entretanto, maioria dos historiadores foram além e declararam que o seu método (que é, a justificação deste algoritmo) é idêntico a um dos dois acima. Como será mostrado, existem algumas dificuldades consideráveis, se não intransponíveis, em fazer tais pontos de vista se encaixarem com suas próprias palavras. Na minha opinião, entretanto, não existe um único historiador dentre os vários que estudaram o método de Fermat que estudaram o método de Fermat antes de 1929 que fizeram uma representação correta do mesmo.

1929 foi um ano importante, pois foi quando Wieleitner publicou o artigo que deveria ter revolucionado a academia fermatiana. Ele foi o primeiro a manter a razão contra a superstição neste campo em particular – Acredito que ele deve ter sido um homem sã e um bom historiador, eu não sei nada melhor a dizer. Sua abordagem astuta consistia simplesmente em não trazer para sua tarefa uma opinião preconcebida sobre o que ele iria encontrar. Ele estava satisfeito com a reconstrução da concepção de Fermat sobre o “Método de Fermat”. Isso o levou imediatamente a

descobrir que extrair um único procedimento do trabalho de Fermat que poderia ser chamado de seu método era impossível. Os textos eram pura e simplesmente incompatíveis. Ele, entretanto, viu o que ninguém antes viu: Que existiam dois métodos separados e bruscamente distintos de determinar os extremos no trabalho de Fermat. Isto apontou os erros dos historiadores anteriores – eles sempre começavam com a consideração de que existia algo que poderia ser chamado de “método de Fermat”, e que este algo poderia ser reconciliado com suas próprias palavras. Isso deveria ser uma consequência natural de que tanto o seu método quanto suas palavras seriam perdedores em uma competição.

Wieleitner deu uma boa (embora não profunda) descrição dos dois métodos, ainda conectando-os com o método da tangente de Fermat. Ainda assim, eu não acredito que ele aproveitou ao máximo sua vantagem. Em particular, ele estava, em minha opinião, errado em relação a um aspecto importante. Ele parecia trabalhar sobre uma desilusão de que os editores são uma raça diferente dos historiadores, presumivelmente imunizados contra a enfermidade humana através da intervenção divina. Embora ele não tenha sido influenciado pela falsa tradição fermatiana e seu julgamento dos textos era sadio, quando ele viu a conjectura mais selvagem de um editor em uma nota de rodapé, ele imediatamente a aceitou como se viesse de um ser superior. Ele interpretou mal o fato de que os editores são muito menos frequentemente informados do que os historiadores para significar que eles estão muito mais frequentemente no direito. A verdade é que os editores não passam de historiadores disfarçados e estão, portanto, dispostos a cometer os mesmos erros. Essa confiança nos editores levou Wieleitner a aceitar uma cronologia impossível de vários escritos de Fermat.

Entretanto, quando um historiador preserva uma grande parte da verdade em comparação a uma pequena parte de falsidade assim como Wieleitner fez, devemos esperar que ele cause uma repercussão na historiografia da matemática. Surpreendentemente, este não foi o caso. A descoberta de Wieleitner parece ter sido pouco notada. Para ser mais claro, ele é sempre muito referido quando se trata do método de Fermat, mas poucos parecem ter colhido todos os frutos de sua perspicácia. Eu devo basear diretamente a seguinte análise e reconstrução no trabalho de Wieleitner. Quando eu polemizo, isto geralmente será contra ele (ou os editores da OF, OD e CM), considero que as falsas tradições fermatianas foram adequadamente refutadas por ele.

O estudo da matemática de Fermat é seriamente impedido pela falta de textos e cartas entre os anos de 1628 e 1635, que foi o seu primeiro período criativo. De acordo com suas palavras, ele descobriu os métodos dos extremos e das tangentes no começo de 1629. Estes métodos, portanto, não foram geralmente conhecidos entre os matemáticos franceses antes dos últimos meses de 1637 quando Mersenne recebeu (pelas mãos de Carcavi) cópias de dois pequenos ensaios *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* e *De tangentibus linearum curvarum*. Fermat foi imediatamente envolvido com Descartes em uma disputa, disputa essa que começou com o seu criticismo a Dioptrique, mas que rapidamente cresceu para incluir seu próprio método das tangentes. Para defender e explicar sua abordagem, ele se

engajou em um trabalho de aplicação e clarificação em uma série de ensaios e cartas, todos datados entre os anos 1638 e 1943.

Para Fermat, o seu meio de descobrir tangentes era apenas um caso particular de um método geral que provavelmente serviria para determinar extremos, centros de gravidade e resolver problemas na área da Teoria dos Números. Para entender as características básicas deste método geral e, se possível, descobrir a história da sua origem e desenvolvimento, nós devemos estudar três das suas aplicações fundamentais em detalhe.

Método 1. Se nós estamos determinados a usar a designação “Método de Fermat”, deve ser assim. Em todas as suas cartas e trabalhos conhecidos é, com uma notável exceção, o procedimento que ele utilizou para encontrar extremos das expressões algébricas. Primeiro algumas palavras sobre a notação que ele usou e o significado das expressões que ele tratou. Ele aderiu de forma próxima ao modo de escrita das equações de Vieta, usando vogais para as quantidades desconhecidas (variáveis), principalmente A e E . Para coeficientes constantes ele utilizou consoantes, sempre começando com B . Assim como Vieta, Fermat nunca cortou a ligação entre a geometria e a álgebra – as variações de uma equação sempre foram limitadas pela exigência de que eles tivessem um significado geométrico. Isto também é notável em sua insistência em manter a homogeneidade de uma equação, por exemplo escrevendo “ B em $A - A$ quad aequale Z plano” (o que eu representarei como $BA - A^2 = Z$). Pelo mesmo motivo ele não considerou raízes negativas e se $A = 0$ era uma solução da equação, ele não a mencionou, pois quase sempre ela era geometricamente desinteressante.

Vamos entender como Fermat encontrou o valor máximo da expressão acima – é justo, exceto por um fator $\sin \alpha$, que seja equivalente aos famosos diorismos em Euclides VI, 27. Para um valor desconhecido A ele substituiu $A + E$ e comparou a expressão resultante com a inicial, envolvendo apenas A , por equivalência. A expressão pode ser representada por

$$BA - A^2 \sim BA + BE - A^2 - E^2 - 2AE.$$

Após ter cancelado todos os termos iguais, ele dividiu por E , ou por alguma potência de E , de modo que o resultado não possuía termos contendo E e outros contendo potências de E :

$$B \sim 2A + E.$$

Agora ele suprimiu os termos que ainda continham E , e a equivalência foi transformada em uma igualdade verdade que determinava o valor de A , o que faz a expressão original de máximo:

$$A = \frac{B}{2}$$

Ele usou exatamente a mesma abordagem para encontrar os extremos de $A^2B - A^3$, $\frac{BZ - BA + ZA - A^2}{GA - A^2}$, $BA - 2A^2 + 2CA$, e $B^3A + B^2A^2 - BA^3 - A^4$.

Em lugar nenhum de seus primeiros escritos existe uma prova dada por Fermat para este procedimento. Isto, como tentarei mostrar, foi pela simples razão de que não existia tal prova. Uma demonstração publicada posteriormente por ele, era logicamente insuficiente e eu não acredito que ele foi capaz de justificar seu método de acordo em um sentido moderno. Nós podemos ainda aprender muito, entretanto, a partir de um estudo dos textos e cartas anteriores. Primeiro, a palavra ‘*adaequalitas*’, uma tradução realizada por Xylander de Diophantos ‘*παρισότης*’ ou ‘*παρισότητος ἀγωγή*’. Este foi o método do algebrista grego para encontrar uma solução de uma equação indeterminada que fosse o mais próximo possível de um determinado número. Heath chamou este método de “Método de Aproximação dos Limite”; uma melhor interpretação seria talvez “o método de variação de quantidades pequenas”. A base da aproximação de Fermat, foi a comparação das duas expressões que, embora tivessem a mesma forma, não eram exatamente iguais. Essa parte do processo é chamada de “*comparare per adaequalitatem*” ou “comparador *per adaequalitatem*”, e implicava que a identidade rigorosa entre os dois lados da “equação” era destruída pela modificação da variável de um lado por uma *pequena* quantidade:

$$f(A) \sim f(A + E).$$

Isto, eu acredito, foi o real significado do seu uso do ‘*παρισότης*’ de Diophantos, enfatizando a insignificância da variação. Uma tradução de ‘*adaequalitas*’ pode ser ‘igualdade aproximada’, mas eu prefiro o termo ‘pseudo-igualdade’ para representar o pensamento de Fermat neste ponto.

Segundamente, nunca existiu no método um uma questão sobre a variação E ser colocado igual a zero. As palavras que Fermat usou para expressar o processo de supressão dos termos contendo E foram “*elido*”, “*deleo*”, e “*expungo*”, e em francês “*efface*” e “*ôte*”. Nós podemos dificilmente acreditar que um homem são desejando expressar seu significado e procurando por palavras, se chocaria constantemente com tais formas tortuosas de transmitir o simples fato de que os termos desapareceram porque E era zero. Maioria dos historiadores foram enganados, admito, pela falta de data do ensaio *Methodus de maxima et minima*, onde há de fato uma magnitude E que é definida como igual a zero, mas este ensaio trata de um outro método bastante diferente de encontrar extremos. Após a descoberta da carta de Fermat enviada a Brulart em 1918 e o artigo de Wieleitner em 1929, não resta desculpas para representar o Método 1 dependendo de E ser zero.

Em terceiro lugar, Fermat disse a seus leitores que deveria dividir por alguma potência de E . Isso, sem dúvidas, estava errado como pode ser visto:

$$f(A + E) - f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^n}{n!} f^{(n)}(A)$$

Ainda assim seu erro foi compreensível. Como ele não pôde prever as peculiaridades e os significados futuros de $f^{(n)}(A)$, ele se guardou da possibilidade de que $f'(A)$ ser zero, um caso que poderia vir a surgir (para ele) em algum problema futuro. Além das cartas para Marsenne onde ele sugeriu que o método “tire son

principal fondement de ce que $A + E$ fait la même chose que $A - E$ ” e que “si $A + E$ donne moins que A , $A - E$ doit aussi donner moins que A ”, isto era conhecido até 1918 quando Giovanozzi descobriu uma copia de uma longa carta perdida a Brulart, em Florença. Ele provou conter a única exposição que Fermat já deu do que eu chamei de Método 1, e é, portanto, de altíssima relevância. Escrita em 1643, continha seus pensamentos maduros sobre procedimentos extremos, e nós devemos ser cautelosos para não lhe atribuímos um grau demasiado grande de sofisticação nos escritos anteriores.

Fermat inicia sua explicação a Brulart (e também a Mersenne) sobre os fundamentos do seu método:

Mon invention de *Maxima et minima* n’a que deux ou trois fondemens. Je suppose premierement que cette recherche aboutit à um point ou à um terme unique, comme, par exemple, quandd on veut *diviser une ligne en sorte que le rectangle sous les segmens soit esgal* à um *space donné*. Nous avons deux point dans la ligne qui satisfont à la question, mais quando on cherche le plus grand de tous ces rectangle, nous n’avon qu’un seul pont qui y puisse satisfaire, lequel, en l’exámple proposé, est celluy qui divise la ligne em deux parties esgales. Voylà pourquoy Pappus, dans le septième livre, appelle tousiours *maximam, unicam et singularem*, et tout de mesme *minimam*; le mot grec est *μοναχός*, qui avoit si fort estonné Commanndin, qu’il avoue tout net ne point entendre ce que Pappus a voulu dire par ce terme. Il faut donc chercher um point unique, au delà et au deçà duquel tous les termes de la question soient ou tousiours plus grand ou tousiour plus petits que celui qui sera produit par le produit par le point cherché

Podemos ver que a concepção de Fermat sobre o problema de determinar A de modo que $f(A) = \text{extr.}$ ainda era uma equação indeterminada. Para ele, sua descoberta era um método de transformar esta equação em uma solucionável. Para isso, ele conseguiu através do uso do fato de que se por exemplo $f(A) = \max.$, logo $f(A \pm E) < f(A)$, implicando que E era suficientemente pequeno e que $f(A)$ era “bem comportada”. Ele nunca mencionou estas restrições; nós podemos imaginar que se ele estava explicitamente consciente da sua necessidade. Ainda assim, o fato de que $f(A + E) < f(A)$ poderia não proporcionar a ele uma equação solucionável se a expansão de $f(A + E)$ não contivesse os mesmos termos que $f(A - E)$, exceto pelos sinais nas potências ímpares de E :

$$f(A \pm E) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{E^n}{n!} f^{(n)}(A).$$

Todas as expressões $f(A)$ que Fermat lidou eram polinomiais, deste modo, ele não teve dificuldade em obter $f^{(n)}(A)$. No entanto, nós devemos escrever:

$$f(A \pm E) = \sum_{n=0}^k (\pm 1)^n a_n(A) E^n$$

Para imitar o tipo de percepção que ele havia adquirido sobre a expansão de um polinômio de grau k .

A partir desta expansão ele tomou a equação solucionável: $\pm a_1(A) = 0$. Solucionando temos: $A = A(B, C, \dots)$, onde $B, C, \dots$ eram as constantes da expressão original e substituindo: $a_2(A) = a_2(B, C, \dots) = \pm |c|$, poderia determinar a natureza dos extremos. Um a_2 positivo poderia significar um mínimo, e um negativo, um máximo. Tudo isto Fermat expressou claramente e energicamente em sua carta a Brulart – ou seja, ele tratou a em particular a expressão $BA^2 - A^3$, porém, com o entendimento de que este método poderia ser aplicado de modo geral a polinômios: “Et la méthode et les raisons que i’ay alléguées, seront générales”. Apesar disso, nós ainda temos um longo caminho até demonstrar a exatidão do procedimento. O leitor moderno pode esperar que Fermat assuma, ou mostre que todos os $a_n(A)$ estavam limitados e levasse E a ser um número reduzido, o que completaria a prova. Este não era o jeito de Fermat – sua demonstração é brilhante, esquemática, difícil, e – infelizmente – errada.

Como $f(A)$ sempre foram polinomiais, todos os termos $a_n(A)$ terão a forma

$$\sum_{k=0}^p \alpha_{nk} A^k - \sum_{l=0}^q \beta_{nl} A^l$$

Onde $\alpha_{nk}, \beta_{nl}, A > 0$.

Após resolver $a_1(A) = 0$ e substituir a solução em $a_2(A)$, nós devemos ter um destes dois casos: $\sum \alpha_{2k} A^k \geq \sum \beta_{2l} A^l$. Se, por exemplo, o sinal superior for aplicado, então, de acordo com Fermat, deveríamos ter:

$$1 = \frac{\sum \alpha_{1k} A^k}{\sum \beta_{1l} A^l} > \frac{\sum \alpha_{2k} A^k}{\sum \beta_{2l} A^l} > \dots > \frac{\sum \alpha_{nk} A^k}{\sum \beta_{nl} A^l} > \dots$$

Agora, isto certamente (se for verdade) resolve $f(A + E)$, porém o que dizer sobre $f(A - E) = \sum (-1)^n a_n(A) E^n$? De fato, ele não considerou este termo de maneira nenhuma – aparentemente ele assumiu que se $a_2(A) < 0$ garantiria $f(A + E) < f(A)$, e isso também poderia levar a $f(A - E) < f(A)$. Porém provando que isso é impossível a menos que se considere a magnitude dos fatores de E^n , o que ele nunca fez.

Deixe-me ser claro sobre isso. É obviamente impossível justificar o Método 1 sem antes impor algumas limitações em relação aos fatores E^n , ao menos nas formas brandas de $E < 1$. Também se buscará em vão nos escritos de Fermat por qualquer menção desta limitação. Maioria dos historiadores tomaram isso em seu progresso e raciocinaram que, como ele tinha estado de posse de um método “correto”, ele deveria também ter provado isto de uma forma correta, isto é, fazendo com que E fosse infinitesimalmente pequeno ou zero. Quando confrontado com a falta de sustentação sobre essa consideração, eles alegremente postularam que mesmo se ele deixasse a condição de que E ser limitado em seus escritos, ele realmente tinha pensado nisso o tempo todo. Eu devo ser sincero e admitir que uma leitura superficial pode indicar algum fundamento para isso. Nós temos, por exemplo, o processo de *adaequação*, o

qual eu interpretei para implicar uma pequena variação. Mas foi apenas conjectural, focava em assegurar que no caso de um extremo E não seria tão grande a ponto de destruir a desigualdade $f(A \pm E) \leq f(A)$. O que nós estamos buscando também poderia estar implícito em algumas palavras de Fermat, quando ele fala sobre a substituição de $A - E$ em $BA^2 - A^3$, resultando em $BA^2 - A^3 + (3A^2 - 2BA)E + (B - 3A)E^2 + E^3$: “*Et la dernière puissance de E, qui se trouve tousiours seule, et qui est icy E³, ne changera point l’ordre de l’équation de quelque signe qu’elle soit marquée, ce qui nous paroitra clairement à la seule inspection.*” Mas essa esperança é imediatamente destruída, porque ele continua: “*La raison principale de cecy est que les deux termes marquez par E², estans em pllus grande raison que ceux qui sont mesurez par les plus hautes puissances au dessus de E².*” Ou seja, ele ainda estava pensando em termos da variação dos fatores de $a_n(A)$ e não considerava de modo nenhum a magnitude de E^n . Se a nossa for uma ciência empírica, nós podemos apenas concluir que não tem nada que indica que Fermat em algum momento achou necessário impor uma limitação para o valor de E para assegurar que $a_2(A)$ poderia determinar a natureza dos extremos.

Isto parece nos deixar com uma situação impossível em nossas mãos, porque aqui temos Fermat com um método belamente avançado de grande poder, e ele não sabia porque funcionava, nem sabia como provar sua exatidão. E neste caso parece que a descoberta do método deve depender de uma compreensão de seu funcionamento devido a sua complexidade. Dificilmente podemos acreditar que ele tenha acertado por puro acaso, mas parece que não existe um caminho natural ou racional para a descoberta. Ainda assim, na minha opinião, existe tal caminho, mas para alcançá-lo teremos que jogar fora a cronologia comumente aceita de alguns dos escritos de Fermat. Deixo isto para uma parte posterior do meu trabalho.

Método 2. Este método, que se baseia no critério da raiz dupla, foi utilizado em apenas um trabalho, o ensaio sem data *Methodus de máxima et mínima*. É muito mais simples que o Método 1 e pode, portanto, ser tratado menos minuciosamente. Felizmente, desta vez, Fermat não nos deixa na ignorância de seu caminho para a descoberta:

Enquanto eu estava trabalhando no método de Vieta de síncrise e anástrofe, e estava cuidadosamente investigando o seu uso na descoberta da natureza de equações constitutivas, pensei em deduzir dele um novo método para determinação de máximos e mínimos que irão facilmente resolver as dificuldades pertinentes ao *diorismon*, que causaram tantos problemas tanto na geometria antiga quanto na moderna.

A verdadeira base era, no entanto, a observação de Pappos que ele também havia mencionado em outro lugar: “*Maximae quippe et minimae sunt unicae et singulares.*”

A síncrise de Vieta foi um método pra expressar o coeficiente B da equação $B^n A^p - A^{n+p} = Z^{hom}$ em termos das raízes da equação. Se A e E são duas das raízes, nós temos $B^n A^p - B^n E^p = A^{n+p} - E^{n+p}$ e $B^n = \frac{A^{n+p} - E^{n+p}}{A^p - E^p}$. A anástrofe, que não é

usada no método 2 foi uma técnica para diminuir o grau de uma equação quando a raiz da “transformada negativa” era conhecida.

O primeiro exemplo de Fermat em *Methodus de maxima et minima* foi a expressão $BA - A^2$ que ele usava frequentemente. Por síncrise nós temos $B = A + E$, e de acordo com Pappos, a expressão será um máximo quando $A = E$, ou seja, quando $A = B/2$. O seu segundo exemplo foi $BA^2 - A^3$. Usando o método, nós obtemos $BA^2 - BE^2 = A^3 - E^3$. Nós devemos agora realizar a divisão por $A^2 - E^2$, porém, Fermat já havia transformado a síncrise: ele dividiu por $A - E$. Eu acredito que a razão foi muito simples: esta divisão sempre funcionou. Definindo E igual a A resultou na equação $2BA = 3A^2$ onde ele usou a única raiz $A = \frac{2}{3}B$, suprimindo como sempre $A = 0$. O seu próximo passo foi nomear as duas raízes A e $A + E$ em vez de A e E . Isto levaria, como ele observou, à divisão mais fácil por E no lugar de $A - E$. Ele então prosseguiu na solução de um problema do sétimo livro da Coleção de Pappos, o qual ele também havia tratado como Método 1. Eu não vou analisar sua solução – isto já foi feito de maneira adequada por Hofmann. Ele encerrou o seu trabalho propondo o seguinte problema “*qui hanc methodum non probaverit*”: dados três pontos, e um quarto de modo que a soma das distâncias dos três primeiros é mínima. Podemos então resumir o Método 2 da seguinte forma: na equação $P(A) = Z$, onde $P(A)$ é um polinômio, determinaremos os valores de A que levam à constante não especificada Z a ser um extremo. Tomando A e $A + E$ para duas das raízes de $P(A) = Z$, o que nos dá $P(A) = P(A + E)$. Dividindo por E e colocando E igual a zero, nos leva à equação solucionável $Q(A) = 0$.

Método 3. Este é o método das tangentes de Fermat. Ele o utilizou para encontrar as tangentes da parábola, da elipse, da cissoide, da conchoide e do Folium de Descartes. A solução do último problema estava contida em um importante trabalho onde ele descrevia a origem do seu método das tangentes. Aqui ele mencionou que o método das tangentes e de máximos e mínimos “*sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner.*” Na seguinte descrição, mudei ligeiramente a terminologia de Fermat. Para ele, a quantidade desconhecida (variável) era o comprimento da subtangente, e, portanto, normalmente rotulado como A . Usarei A e $f(A)$ para a abscissa e para a ordenada da curva.

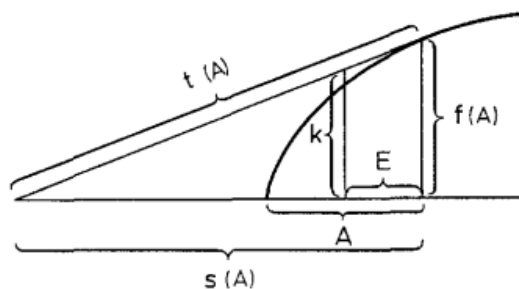


Fig. 1

O problema é para encontrar a tangente em um ponto dado na curva $f(A)$ – Ou seja, encontrar o ponto onde a tangente corta o eixo, o que mais uma vez equivale à

determinação do comprimento da subtangente $s(A)$. Fermat fez isso com o auxílio de uma comparação por *adaequação* na seguinte forma:

$$\frac{k}{f(A)} = \frac{s(A) - E}{s(A)}$$

e como $k \sim f(A - E)$, nós temos:

$$s(A) \sim \frac{E \cdot f(A)}{f(A) - f(A - E)}$$

como $f(A)$ era um polinômio ele poderia expandi-lo:

$$s(A) \sim \frac{f(A)}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{E^{n-1}}{n!} f^n(A)}$$

e por seu procedimento comum de suprimir termos contendo E:

$$s(A) = \frac{f(A)}{f'(A)}$$

Eu dei uma versão moderna do método das tangentes de Fermat – ele nunca soube que seus resultados tinham toda essa forma geral. Ainda assim, ele entendeu bem a utilidade do método:

Et ce qu'il y a de merveilleux, est l'opération nous indique si la ligne courbe est convexe ou concave, si la tangente est parallèle à l'axe ou diamètre, et de quel côté ele fait son concours lorsqu'elle n'est pas parallèle;

Tudo isso ele tirou da forma e variação de $s(A)$ e não a partir de qualquer compreensão do significado de $f'(A)$. Isso pode ser visto em sua determinação de pontos de inflexão de uma curva em *Ad eandem methodum*, o que ele fez ao encontrar os extremos de $\frac{f(A)}{s(A)}$.

Na peça mencionada na nota 40, Fermat explica sua insistência na união dos métodos de extremos e de tangentes pelo fato de que ele originalmente tratou este último como um problema de extremos. Descartes interpretou essa insistência no sentido de que a tangente foi encontrada como a linha máxima de um ponto no eixo até a curva. Mas Fermat agora lhe disse que era a determinação da normal como uma linha de comprimento mínimo. Ou seja, dado

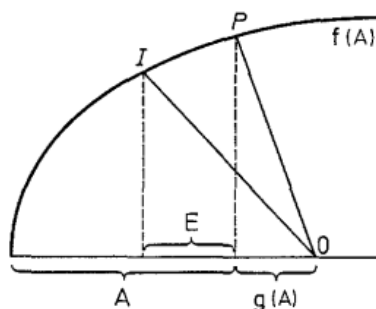


Fig. 2

o ponto P , se um determinado O de modo que OP fosse a menor linha de O para a curva, OP seria a normal à curva em P . O problema foi resolvido escrevendo

$$g(A)^2 + f(A)^2 \sim (g(A) + E)^2 + f(A - E)^2$$

e usando a rotina comum.

Fermat foi inequívoco ao falar da cronologia das duas abordagens para o problema das tangentes. Isso foi o que ele disse sobre o método das normais:

C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI ou son quarré sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie;

Por fim, ele terminou com o método padrão, que era perfeitamente geral e fácil de usar.

Nós procuramos em vão nos escritos de Fermat por qualquer justificativa de seu método padrão das tangentes. De fato, tal prova não teria sequer sido possível pela forma que ele a deu. Isto só poderia ter sido feito através do uso da *adequação* válida:

$$\frac{f(A)}{s(A)} \sim \frac{f(A - E)}{s(A) - E}$$

mas ele nunca o fez. O mais próximo que ele chegou foi perceber que $\frac{t(A)}{f(A)}$, $t(A)$ sendo a distância da tangente, era um mínimo.

Nós agora chegamos à uma questão muito difícil sobre a sequência e cronologia de vários dos métodos de Fermat. O principal problema, como eu vejo, é a interdependência do que eu chamei de Método 1 e Método 2. Deixe-me esclarecer uma coisa: atualmente, e a menos que outros textos ou cartas sejam encontrados, não pode haver esperança de chegar a um acordo final sobre a questão. Ainda assim, nenhum historiador até o momento apresentou uma discussão adequada sobre o assunto. Esta deficiência que pretendo remediar.

Como existem dois possíveis arranjos relativos do Método 1 e do Método 2 dentro da análise, pode-se prever que os historiadores que tratam a questão se formariam em dois grupos. Wieleitner, cujo relato dos métodos de Fermat é facilmente o melhor, considerou o Método 1 como sendo o mais antigo. De acordo com ele, foi

descoberto em algum período entre os anos 1628 e 1930, e foi diretamente aplicado aos problemas das tangentes e centros de gravidade. O *Methodus de maxima et minima* que continha o Método 2, ele alegava que foi provavelmente o último entre todos os escritos de Fermat em relação ao problema dos extremos. O editor do volume suplementar de OF, C de Waard, havia datado conjecturalmente como sendo de 1643-1644, por isso ele apresentou tanto o tratado como a invenção do Método 2 em 1644. Além da data de IV, ele apresentou as seguintes razões. Primeiro, ele não encontrou referência ao Método 2 em nenhum outro trabalho ou carta de Fermat. Isto teria sido muito estranho, ele opinou, se isto existisse durante o período entre 1638 e 1640 quando Fermat compôs quase tudo o que ele escreveu sobre os problemas e procedimentos para os extremos. Em segundo lugar, ele colocou grande peso nas palavras de Fermat quando ele disse que inventou “um novo método para a determinação de máximos e mínimos”, implicando assim, pensou Wieleitner, que ele já tinha inventado um método mais antigo. Hofmann, que contribuiu com uma observação matemática para o artigo de Wieleitner, reafirmou recentemente esta opinião.

O outro possível arranjo cronológico do Método 1 e do Método 2 foi sugerida por Tannery. Mas como ele claramente nunca tinha visto a carta para Brûlart, ele não fez distinção entre os dois métodos. O que ele tentou fazer foi reconstruir o desenvolvimento mais natural do híbrido “Método de Fermat”. Sua versão foi aceita por Itard, que tempos depois ainda concordava com a concepção de Tannery sobre o “método”.

Antes de discutir as vantagens e desvantagens dos dois possíveis arranjos entre o Método 1 e o Método 2, deixe-me esclarecer minha própria posição. Se alguém, ao reconstruir qualquer processo de descoberta científica ou invenção, deseja vê-lo como incorporando o sucesso alógico das ideias, então a cronologia de Wieleitner torna-se impossível. O único arranjo que apresenta o desenvolvimento do pensamento de Fermat, progredindo do mais simples para o mais complexo, do que lhe era conhecido para o que nos é conhecido, e que torna possível atribuir razões de ordem psicológica aos passos que ele deu, é colocar o Método 2 antes do Método 1 em relação ao tempo. Mas o desejo de encontrar na história intelectual um processo racional deve muitas vezes ceder à perversidade dos textos, que, suponho, espelha a da mente humana. Se, em nosso caso, a razão for deixada à deriva pelos fatos, está não será a primeira vez, nem a última.

Deixe-me primeiro discutir a data de IV, que é de importância decisiva. Como já disse, De Waard o datou como sendo de um período entre 1643-1644, embora não tenha dado nenhuma razão para esta data. Suspeito que ele a baseou no fato de que Groningen MS, que contém uma coleção de escritos de Fermat feitos antes do verão de 1643, não tinha uma cópia de IV. Itard não seguiu este raciocínio, que datou IV como sendo entre 1640-1642, deixou de revelar seus fundamentos. Neste caso, devo confessar que estou totalmente perdido – pode ser que o Professor Itard tenha conexões espíritas e, portanto, acesso a fontes de informações negadas ao resto de nós.

A falha destes dados é que eles não surgem de um estudo do conteúdo de IV. Todas as informações relativas a dados de escritos científicos não datados devem partir de uma consideração das prováveis relações de suas ideias com as de outras peças datáveis. Somente depois disto é que as conclusões devem ser testadas pelas provas circunstanciais. Mesmo um estudo superficial de IV mostra que se trata de um trabalho polêmico, vide seu final:

Confidenter itaque sicut olim, ita et nunc pronuntiamus semper et legitimam, non autem fortuitam (ut quibusdam visum), maximae et minimae disquisitionem hoc unico et generali contineri epitagmate:

Statuatur etc [se referindo à parte de abertura de *Methodus ad disquirendam* onde o Método 1 foi tratado] ... *innotescet.*

Si qui adhuc supersunt qui methodum hanc nostram debitam sorti pronuntiat, Hos cupiam similes tentando exuderes sortes

Qui hanc methodum non probaverit, ei proponatur: Datis tribus punctis, quantum reperire, a quo si ducantur três rectae ad data puncta, summa trium harum rectorum sit minima quantitas.

Fermat estava envolvido em apenas uma controvérsia que poderia ter inspirado estas escavações, a famosa *querelle des tangentes* entre Descartes e ele mesmo em 1638. Se aceitarmos mais o caráter polêmico de IV, parece que deve ter sido escrito antes do final de agosto de 1638. Naquela época Fermat recebeu uma bela carta de aprovação de Descartes, que encerrou pelo menos a parte pública da controvérsia. Por outro lado, a escolha das palavras de Fermat em IV foi claramente determinada por ele ter lido a alegação injusta de Descartes:

Car premièrement la sienne [méthode] (c'est-à-dire celle qu'il a eu envie de trouver) est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour le recontrer,

Mersenne não tinha originalmente transmitido estas palavras duras, mas Fermat sabia de sua existência através de Roberval. Em uma carta de abril nós o encontramos pedindo a Mersenne uma cópia dos comentários de Descartes:

J'attends aussi par votre faveur les réponses que M. Descartes a fait aux difficultés que je vous ai proposées sur as Dioptrique, et ses remarques sur mon Traité de maximis et minimis et de tangentibus.

Se Mersenne enviou os comentários solicitados, o que podemos assumir com segurança, eles estariam nas mãos de Fermat um pouco antes de 1 de junho de 1638.

Vamos tentar reconstruir a situação psicológica de Fermat nesta data e ver o que pode ser deduzido a partir disso. Ele tinha acabado de receber de Mersenne uma cópia da carta de Descartes de 18 de janeiro, onde este último insinuou que o método tinha sido provavelmente encontrado por pura sorte e não como resultado de uma busca industriosa para a solução de um problema geral. No mesmo pacote de Mersenne ele provavelmente também encontrou uma cópia da carta de Descartes para Mydorge respondendo às objeções que Fermat havia levantado em sua segunda

carta sobre Dioptrique. Em terceiro lugar, pouco depois de 1 de junho ele recebeu uma carta de Roberval, que tinha escrito duas vezes (em colaboração parcial com E. Pascal) contra Descartes em defesa do método de tangentes de Fermat. Pelo que Roberval diz, parece que ele não tinha feito essa defesa a partir de qualquer compreensão profunda do método, mas sim a partir de uma antipatia geral por Descartes. Ele pediu expressamente a Fermat que explicasse os fundamentos do método do qual ele tinha visto apenas um caso em particular:

Mandez-moi quel est votre sentiment, car, n'ayant pas encore le loisir de considerer bien particulièrement le fonds de votre méthode et as démonstration, il se peut être qu'elle ne contienne des mystères qui me son encores cachés.

Se o comportamento de um ser humano racional for previsível, parece que por volta de 10 de junho Fermat estaria envolvido em três tarefas distintas. A primeira coisa que ele estava escrevendo (ou tinha acabado de escrever) é um relato da descoberta de procedimento básico para extremos, para se defender contra a alegação de Descartes. Este registro, eu declaro, foi o *Methodus de maxima et minima* (IV), que contém o Método 2, e que até agora tem sido variadamente datado como entre 1640 e 1644. A segunda tarefa era a escrita de uma descrição geral de seu método de tangentes, destinado principalmente a Roberval (e Pascal) como resposta ao pedido deste último na carta de 1 de junho, mas também para ser lido por Descartes. Essa descrição foi a peça XXXI em OF II com o título *Méthode de maximis et minimis. Expliquée et envoyée par M. Fermat a M. Descartes*. Se o leitor perspicaz protestar que o título impede que XXXI seja escrito para Roberval, eu contrariarei essa objeção em particular com o oportunismo dos historiadores – vou explicar. O título de XXXI era claramente de Mersenne, como pode ser visto em Arbogast-Boncompagni MS, e não propriamente de Fermat. Além disso, este último se referia consistentemente a Descartes na terceira pessoa no corpo da peça. Ainda outra indicação da inadequação do título é que XXXI trata do método de tangentes e não dos extremos, como o título implica. Eu sugiro sem hesitação que Mersenne o anexou em algum momento confuso quando ainda não havia estabelecido a verdadeira correspondência entre os vários escritos de Fermat que ele recebeu por volta de 1 de julho e os destinatários, conforme especificado na carta de Fermat que o acompanhava. E a terceira, aparentemente Fermat escreveu sua terceira crítica contra *Dioptrique* de Descartes. Isto teria que ser uma réplica da carta de Descartes para Mydorge, mencionado acima. Mas esta terceira peça não tem nenhum interesse particular em nosso contexto, então eu a deixo discretamente de lado.

É, portanto, minha conjectura que estas três peças (ou pelo menos as duas primeiras) foram enviadas a Mersenne com uma carta de acompanhamento em 15 de junho de 1638. A primeira parte desta carta é bem conhecida – é encontrada como carta XXX em OF II. Outra parte – não tão conhecida – é o documento VI, no volume suplementar de OF, começando com as palavras “*l'ay receu um mot de vostre part de M^r Roberval ...*”, e expressamente datada de 15 de junho. Eu suspeito fortemente que um fragmento completamente desconhecido da mesma carta pode ser encontrado na seção 6 da carta de Fermat de 20 de abril a Mersenne, começando com estas palavras: “*Outre le papier envoyé à R[oberval] et P[ascal] ...*”.

Sugiro que o leitor faça uma reconstituição da carta de 15 de junho e a leia sob o ponto de vista de que ela foi acompanhada por IV e XXXI. Acredito que se descobrirá que o conjunto faz muito sentido, e que se encaixa bem com algumas observações na correspondência de Descartes e Fermat com Mersenne da última metade de 1638. Apenas apontarei alguns destes detalhes corroborantes. A carta XXX em OF II começa com as seguintes palavras:

J'avois déjà fait un mot d'écrit pour m'expliquer plus clairement à M. Descartes, sur le sujet de ma méthode de maximis et minimis et de invetione tangentium, lorsquevotre dernière m'a été rendue, qui contient copie de la réplique de M. Descartes. Je ne reste pas de lui envoyer ce que j'avois déjà fait, où il trouvera sand doute de quoi se désabuser de la croyance qu'il seble avoir, que j'ai trouvé cette méthode par hasard et que je n'em connois pas les vrais principes.

O último período refere-se, em minha opinião, a IV, e não a XXXI como o editor daquela parte de OF manteve. IV constitui, de fato, uma refutação da imputação de Descartes, enquanto que isto dificilmente poderia ser dito sobre XXXI. Todos os três fragmentos da carta de 15 de junho suportarão igualmente bem este tipo de imputação.

Quando Mersenne recebeu o pacote de escritos de Fermat, provavelmente em 1 de julho, ele não o transmitiu imediatamente para Descartes. Parece que ele reteve XXXI por algum tempo, mas anexou IV em uma carta que chegou a este último em 13 de julho. Isto parece ser uma dedução segura da resposta de Descartes da mesma data:

I'en estois parvenu iusques icy llors que i'ay receu vostre derniere avec l'enclose de M. F[ermat]. À laquelle ie ne manqueray de répondre à la premiere occasion; & ie serois plus marry qu'il m'eust passé em coourtoisie qu'em science. Mais pour ce que vou me mandez qu'il m'a encore écrit vne autre lettre pour la deffence de as regle, & que vous ne me l'avez point enuoyée, i'attendray que ie l'ay receuë, afin de pouuoir répondre tout ensemble à l'vne & à l'autre. Et entre nous, ie suis bien aise de luy donner cependent le loisir de chercher cette Tangente, qu'il a promis de vous enuoyer a ucas que ie continuasse à croire qu'elle ne se peut trouuer par as regle.

Então, em 20 de julho, Mersenne enviou XXXI, que foi recebido por Descartes em 27 de julho. A resposta que o filósofo havia prometido a ambos dos escritos de Fermat sobre procedimentos para os extremos tomou a seguinte forma característica:

*I'em estois parvenu iusques icy, lorsque i'ay receu vostre dernier paquet du 20 de ce mois, lequel ne contient que des escrit de M^r Fermat, ausquels ie n'ay pas besoin de faire grande response ; car pour celuy ou il explique as methode *ad maximas*, il me donne assez gaigné, puisqu'il em vse tout autrement qu'il n'auoit fait la premiere fois, affin de la pouuoir accomoder a l'inuention de la tangente que ie luy auois proposée; & selon ce dernier biais qu'il la prend, il est certain qu'elle est ter bonne, a cause qu'elle reuiet a celuy duquel i'ay mandé cy deuant qu'il la faloit prendre. Em sorte que, pour em dire*

entre nous la verité. le croy que s'il n'auoit point vû ce que i'ay mandé y deuoir estre corrigé, il n'eust pas sceu s'em demesler. le croy aussi que toute cete chiquanerie de la ligne EB, sçauoir si ele deuoit estre nommée la plus grande, que ses amis de Paris ont fait durer vn demi-na n'a este inuentée par eux que pour luy donner du tems a chercher quelque chose de mieux pour me respondre. Et ce n'est pas grande merueille qu'il ait trouué em six mois vn nouveau biais pour se seruir de as regle ; mais on n'auoit pas de grace de leur parler de cela, cari l n'importe pas em combien de tem ny em quelle façon il l'a trouué, puisqu'il l'a trouué.

Vamos então resumir o que podemos aprender com o estudo das cartas de 1638 entre Descartes e Fermat. Não há nenhuma prova decisiva de minha conjectura de que IV foi escrito em junho de 1638, isto é, se considerarmos as conotações lógicas de “prova”. Por outro lado, acredito que o número de indicações, das quais dei exemplos acima, que apontam para que minha conjectura seja verdadeira é tão grande que justifica a aceitação tímida dessa conjectura. Finalmente, não encontrei nada que seja incompatível com a datação que sugeri.

Se recorremos ao MSS para mais iluminação, somos seriamente prejudicados pelo fato de que existem muito poucos manuscritos de Fermat. No entanto, dois dos MSS se destacam como dignos de um estudo mais próximo do que os demais. Um deles é o Arbogast-Boncompagni MS, uma cópia feita por Arbogast das peças relacionadas a Fermat em um dos livros de cartas de Mersenne. Neste exemplar, a carta IV estava contida em duas folhas separadas nos escritos de Mersenne, enquanto os fragmentos da carta de 15 de junho, em parte com alguns escritos de Fermat, foram encontrados em vários lugares. Já mencionei que a posição da seção 6 da carta de abril era sugestiva – ela deve ser encontrada como item 6 do MS com o título *De maximis et minimis* e é imediatamente seguida por XXXI (*Méthode de maximis expliquée et envoyée par M. F. à M. des C.*).

Outra fonte importante, a Firenze MS, contem nas folhas 75 à 117 cópias de várias cartas e tratados de Fermat. Estas cópias são provenientes de transcrições feitas por Mersenne e comunicadas aos matemáticos italianos. O aspecto cronológico de seu arranjo é muito interessante. As folhas 75r a 88v contêm cinco tratados de 1637 a 1638 em ordem cronológica. Em seguida (89r – 92r) *Ad eandem methodum* conjecturalmente datada de 1640. Nas folhas 93v a 97r nós encontramos IV imediatamente seguido por um extrato de uma carta de 15 de junho de 1638. Em seguida, ainda numa sequência cronológica, um conjunto de cartas dos anos 1636 a 1638 (97r – 110r). Toda a coleção dos itens de Fermat termina (110v – 117r) com um novo conjunto de cinco ensaios e cartas de 1635 a 1644 em ordem cronológica. Que todo o arranjo não é acidental pode ser visto a partir de Groningen MS. Faltam alguns itens de Firenze MS (entre estes IV), mas ela preserva as posições relativas exatas do restante. Meu argumento é que, como Firenze MS preservou, com a possível exceção de *Ad eandem methodum*, a correta disposição cronológica intrínseca dos diversos conjuntos, a posição de IV aponta para que tenha sido escrita em 1638 e a associa estreitamente com a carta de 15 de junho.

Agora, para o resto dos objetos de apoio à datação de IV or Wieleitner. Fermat, ao falar do Método 2 como *methodus nova*, estava claramente contrastando com o método *antigo*, ou seja, aquele utilizado pelos matemáticos gregos. Caso contrário, não faria sentido mencionar as dificuldades de *diorismon* etc., porque na época o Método 1 já existia para cuidar delas. Se Fermat tivesse desejado indicar que o Método 2 era seu segundo método, ele poderia muito bem ter falado dele como *alia methodus*. Outra das “indicações” de Wieleitner era que em Firenze MS, IV tinha o título *Analytica esjusdem methodi investigatio*. Se este foi o título que Fermat lhe deu, e não há razão para duvidar disso, certamente se referia a *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* de 1637, ligando ainda mais IV ao período entre 1637 e 1638.

Mas e o argumento de Wieleitner-Hofmann de que se o Método 2, sendo um método tão bom quanto Método 1 ou até melhor, foi inventado primeiro, por que não foi usado exclusivamente e por que não foi mencionado em nenhum outro lugar além de IV? Este argumento falha por dois motivos. Primeiro, o Método 1 é sem dúvida um método melhor do que o Método 2. Este método determina a natureza dos extremos, e foi, pelo menos potencialmente, uma ferramenta poderosa para atacar alguns dos problemas mais importantes da matemática dos séculos XVII e XVIII. O Método 2, sem dúvidas, era comparativamente estéril. Em segundo lugar, mesmo admitindo que os dois métodos eram objetivamente de importância comparável, isso não influenciaria necessariamente suas frequências relativas de ocorrência no trabalho de Fermat. Isto certamente teria sido determinado pelo valor atribuído a cada um deles por ele. Como argumentarei mais tarde, ele poderia muito bem ter sido da crença de que o Método 2 sofria de falhas lógicas. Isto explicaria porque ele nunca o mencionou, exceto na única ocasião em que descreveu a gênese de todos os seus métodos. Até agora, meus argumentos só tendiam a mostrar que IV foi escrito em 1638. Mas o leitor atento já suspeitará do que eu estou levando até agora. Se admitirmos que IV foi provavelmente escrito em junho de 1638, parece que devemos aceitar que Método 2 foi o método para extremos mais antigo de Fermat. Porque, concedendo a primeira parte do meu argumento, se assumirmos que o Método 2 também foi inventado em 1638, então seria muito estranho se não fosse mencionado em nenhum dos numerosos escritos de Fermat sobre problemas de extremos daquele ano. A única maneira de explicar seu silêncio seria relegar a invenção do Método 2 ao período inicial de sua vida científica, do qual não temos provas documentais. Mais tarde, quando ele inventou o Método 1, ele considerou o Método 2 insuficiente, ultrapassado ou ambos.

Mas estas deduções do silêncio de Fermat são, na melhor das hipóteses, apenas circunstanciais. Minha identificação do Método 2 com o método para extremos mais antigo de Fermat será suportada por três argumentos. A primeira será suas próprias palavras na primeira parte de IV que traduzi acima (p. 54). Como já disse, este é o único caso que conhecemos de onde ele descreveu a invenção de qualquer método de extremos ou tangentes. Não faria sentido seu orgulho óbvio por um método que pudesse lidar com problemas relacionados a *diorismon*, etc., se este método não fosse o primeiro. Além disso, se IV fosse destinado como uma refutação das insinuações de Descartes, haveria um ponto de partida para arrastar um segundo, e posterior método que nunca tivesse sido usado para nada. Afirmo que o único arranjo

cronológico que tem pelo menos algum fundamento nas próprias palavras de Fermat é aquele que leva o Método 2 a ter sido seu procedimento para extremos mais antigo.

Meus segundo e terceiro argumentos não têm a mesma força que o primeiro. Sabemos que vários amigos de Fermat tiveram exemplos da aplicação de seus métodos durante o período de 1630-1635. Ele escreve, por exemplo, em uma carta a Roberval: “*Sur le sujet de la méthode de maximis et minimis, vous savez que, puisque vous avez vu celle que M. Despagne vous a donnée, vous avez vu la mienne que j’elui baillai, il y a environ sept ans, étant à Bordeaux.*” Agora uma possibilidade de verificar (ou falsificar) minha cronologia seria descobrir qual era a concepção de Despagne sobre o método de Fermat: Método 2 ou Método 1? Não estou em condições de fazer isso, mas deixe-me chamar a atenção para a seguinte passagem em outra das cartas de Fermat a Roberval: “*Toutes ces propositions dépendent de la méthode dont M. Despagne ne vous a pu faire voir qu’un seul cas, parce que, depuis que je n’ai eu l’honneur de voir, je l’ai beaucoup étendue et changée.*” Ele tinha estendido o método, sim, mas o mudou? Certamente, isto deve se referir à substituição do Método 2 pelo Método 1 em algum momento entre 1629 e 1636.

Outro dos primeiros correspondentes de Fermat foi Beaugrand, mas suas conexões foram cortadas por volta de 1635. A partir de várias observações nas cartas de Fermat, sabemos que seu amigo tinha mostrado exemplos do funcionamento de alguns dos métodos. É possível que as concepções de Beaugrand sobre estes métodos se refiram à fase inicial de seu desenvolvimento. De fato, temos uma exposição de Beaugrand sobre um método de tangentes provavelmente datado do outono de 1638. O método pode ser representado como a seguir. Pela Fig. 3 nós temos a igualdade.

$$\frac{f(A + E)}{f(A)} = \frac{E + s(A)}{s(A)}$$

Se $f(A)$ é um polinômio, podemos expandir e dividir por E . Se agora colocarmos E igual a zero, a secante é transformada em tangente e resolvemos o problema.

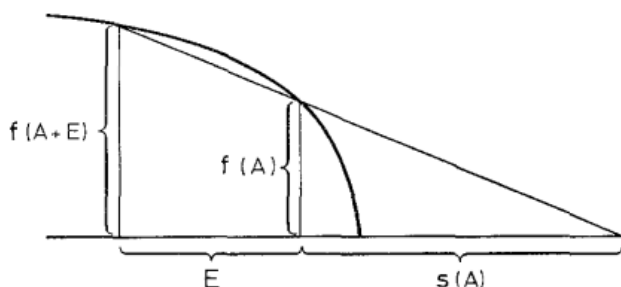


Fig. 3

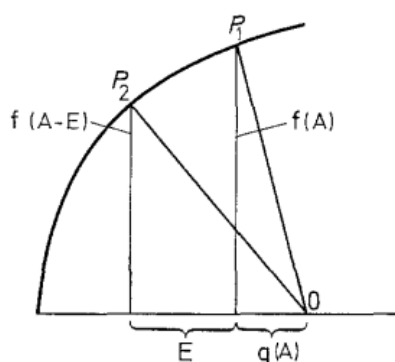
Deve ficar perfeitamente claro que o método de Beaugrand não consiste em nada além da aplicação do Método 2 ao problema da tangente. Eu posso pensar em pelo menos três maneiras possíveis pelas quais isso poderia ter acontecido. Primeiro, o Método 1 tinha sido mostrado inicialmente à Beaugrand por Fermat, e mais tarde, como seu amigo, ele se deparou com o Método 2. Este seria então um caso de descoberta simultânea e deveria ser levado ao conhecimento do Professor Merton. A

segunda, Beaugrand não se inspirou em nada em Fermat – o método era único e totalmente seu. Terceiro, Beaugrand recebeu o Método 2 de Fermat no início da década de 1630, em uma época em que este era o único método existente. Não tentarei espremer mais deste pequeno pedaço de prova, mas deixarei o leitor atribuir sua probabilidade relativa pessoal a cada uma das três explicações sugeridas.

Agora é hora de tentar uma reconstrução do desenvolvimento dos métodos de Fermat de máximos e mínimos e tangentes, uma reconstrução que incorpora a cronologia que mantive nas partes anteriores deste artigo. Não pretendo que essa reconstrução seja a única possível que abrace essa cronologia particular – pelo contrário, é meu argumento de que a falsidade da primeira não implica a da segunda – mas sinto que é, talvez, a mais limpa e simples concebível.

Algum tempo entre 1628 e 1630 Fermat estava de posse das ferramentas necessárias para a solução do problema geral de extremos. Ele sabia que na matemática grega ela estava essencialmente relacionada com os *diorismos*. Ele também havia estudado de perto as Cônicas de Apollonios, especialmente o quinto livro onde os problemas de extremos eram tratados individualmente. O ponto fraco do método antigo, ele viu, era que se tinha de conhecer a solução de antemão; só então se poderia provar que esta solução era realmente a correta. Assim, o que era necessário era um procedimento que não só garantisse a correção da solução, mas que fornecesse diretamente essa solução em si. Ele tinha algo que lhe dava uma enorme vantagem sobre os antigos: a álgebra de Vieta, que estava gradualmente se transformando em uma verdadeira geometria analítica. Entretanto, os dois pilares em que ele baseou seu método foram, por um lado, a observação de Pappos de que os extremos eram únicos e singulares e, por outro, o método de *syncrisis* de Vieta. Até este ponto, não acredito que seja possível duvidar desta reconstrução – temos as palavras expressas de Fermat para confiar. E agora pergunto ao leitor, foi o método que emitiu o relativamente simples o Método 2, que é de fato a encarnação exata dos dois pilares de Pappos e Vieta, ou foi, ao contrário, o complexo Método 1 que foi construído inteiramente sobre outros fundamentos?

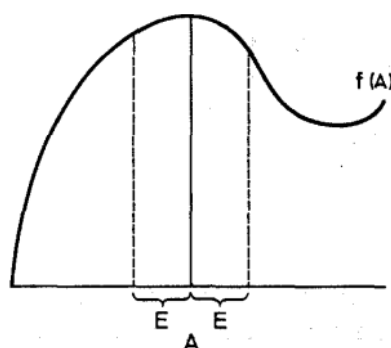
Se aceitarmos provisoriamente que este método deve ter sido o Método 2, vamos prosseguir e ver de que forma Fermat poderia ter sido levado ao método das tangentes. Se acreditarmos em suas palavras – e eu baseei todos os meus argumentos nisto – ele começou por enfrentar o problema das normais, tratando-as como um simples problema de mínimos. Isto foi de fato uma coisa natural a fazer, porque a parte principal do livro cinco das Cônicas tratava de tais problemas. Mas agora ele se deparou com o primeiro problema grave. O Método 2, que funcionou suficientemente bem com os problemas comuns de extremos, certamente forneceu soluções para os problemas das normais também. Não foi que ele fosse insuficiente, mas sim que fosse intelectualmente insatisfatório.



Pela Fig. 4 Fermat tinha que $OP_1 = OP_2$, and from this he easily formed the equality

$$g(A)^2 + f(A)^2 = (g(A) + E)^2 + f(A - E)^2$$

o que lhe deu a solução. Mas de alguma forma isso parecia fácil demais. Se ele imaginou algum ponto O específico, isso deve significar que já existia um ponto P entre P_1 e P_2 em uma posição tal que OP era uma linha de comprimento mínimo. Se ele agora desenhou OP_1 , onde P_1 era um ponto próximo a P , ficou claro que $OP_1 > OP$ e que a igualdade original só poderia ser aproximada por: $OP_1^2 > OP^2$. Embora ele só tenha compreendido mal a dificuldade causada pelo duplo papel que a quantidade A tinha sido feita para desempenhar, foi fácil transpor a melhoria para os termos dos procedimentos originais de extremos. Isto é algo muito fascinante sobre o desenvolvimento do pensamento de Fermat. Quando confrontando com a escolha entre os dois papéis de A , ele escolheu o da raiz, e assim deu um passo decisivo para a delimitação de um conceito de função. Ou seja, ele aplicou o que aprendeu com o problema das normais, onde este passo foi necessário, aos problemas comuns de extremos, onde não eram necessários.



Ele agora começou por considerar este problema como resolvido (ver Fig. 8), com A como uma constante indeterminada. O critério para um máximo seria então:

$$f(A \pm E) < f(A)$$

e o inverso para um mínimo. Ele tinha agora tratado de uma das dificuldades ligadas ao Método 2 e, inadvertidamente, deu o primeiro passo no caminho do conceito de uma equação indeterminada para o de uma função. A desigualdade que ele chegou poderia, naturalmente, ser tratada exatamente da mesma forma que a velha

igualdade: ele poderia dividir por E e depois colocar E igual a zero. Mas, como eu disse, ele não queria fazer isto. Ele manteve a primeira parte do processo, a divisão, mas E teria que permanecer finito de uma forma ou de outra. A partir do Método 2, que certamente forneceu respostas corretas, ele sabia que eram os termos que não continham E que davam a solução final. Como movimento temporário, ele instituiu o processo mecânico de supressão dos termos contendo E . Isto, é claro, teve o mesmo efeito que definir E igual a zero, mas agora ele tinha eliminado esse processo detestável em particular. A única coisa que restava era a justificativa do Método 1. Ou seja, ele tinha que mostrar que o termo de segunda ordem na expansão de $f(A \pm E)$ dominava os termos das ordens superiores.

Chegamos agora ao período a partir do qual temos as primeiras provas documentais, cerca de 1636. Fermat tinha resolvido as duas dificuldades ligadas ao Método 2: a ambiguidade causada pelo duplo papel de A , e a divisão por uma quantidade zero. Ele possuía um método de cuja correção estava convencido, mas de alguma forma ele não conseguia justificá-lo. Ele generalizou os critérios para máximos e mínimos no processo de *adaequação*, e foi um feito fácil aplicar o conjunto ao problema das tangentes, embora na forma como ele o fez tenha sido uma extensão injustificada. Ainda assim, acredito que a maior parte de seu trabalho no período entre 1635 e 1640 foi em busca de uma prova para o Método 1. Com isso, ele atingiu patamares surpreendentes em sua compreensão das propriedades da expansão das expressões $F(A \pm E)$ em potências de E . Ele não só descobriu que o coeficiente de E^2 determinou a natureza dos extremos, mas também acredito que o coeficiente de E^2 determinou a natureza dos extremos, mas também acredito que ele entendeu pelo menos parcialmente as regras pelas quais os coeficientes a_n poderiam ser formados a partir de a_{n-1} . Ele também encontrou um método brilhante para determinar os extremos das expressões da forma $f(A) \pm \sqrt{g(A)}$, e até $\sqrt{f(A)} \pm \sqrt{g(A)}$, embora neste último caso a equação resultante fosse do 6º grau e, portanto, insolúvel. Porém, mesmo sua tentativa mais ambiciosa de prova o Método 1, como foi descrita na carta a Brûlart, foi inadequada. Se de fato ele tivesse percebido a necessidade de impor algumas limitações à magnitude de E , isto teria significado um atalho surpreendente através do desconcertante campo de concepções sobre divisões por zero e quantidades infinitamente pequenas do século 17. Da mesma forma, o poder e a profundidade do pensamento matemático de Fermat é espantoso. Ele não se contentou, como teriam feito os matemáticos de menor estatura, com um método “adequado”, mas incisivamente diagnosticou suas deficiências e assim criou uma das ferramentas mais poderosas do cálculo.

Documento Digitalizado Público

TCC FRANCISCO JORGE

Assunto: TCC FRANCISCO JORGE
Assinado por: Antonio Neto
Tipo do Documento: Trabalho de Conclusão de Curso - TCC
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Público
Tipo do Conferência: Documento Original

Documento assinado eletronicamente por:

- Antonio Dantas Costa Neto, COORDENADOR DE CURSO - FUC1 - ES-GRAD-LM, em 31/01/2023 15:37:13.

Este documento foi armazenado no SUAP em 31/01/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 427494

Código de Autenticação: 2d0f3675cc

